УДК 517.977

А. А. Якименко, кандидат физико-математических наук, доцент (БГТУ)

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ МОДАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМОЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассматривается проблема модальной управляемости для линейных стационарных динамических систем с запаздывающим аргументом нейтрального типа третьего порядка с одним запаздыванием по состоянию. В определенном классе регуляторов для таких систем получено необходимое условие модальной управляемости, что существенно упрощает задачу нахождения указанных регуляторов.

The paper considers the problem of modal control for 3rd order linear stationary dynamic time-delay systems of neutral type with one constant delay. Regulators which solving the problem of modal control for considering systems are regulators of integral type. In this class of regulators necessary condition of modal controllability is obtained. This condition allows mach more simplify constructing such regulators.

Введение. Задача модального управления для линейных стационарных систем с одним входом впервые была рассмотрена Ф. М. Кирилловой [1] в 1961 г., для многовходных систем – М. Уонэмом [2] в 1967 г. С тех пор данная задача изучалась многими авторами и для систем без запаздывания теория модального управления близка к своему завершению. Для систем с запаздыванием и систем с запаздыванием нейтрального типа изучение этой задачи существенно усложняется, что обусловлено тем, что пространство состояний таких систем, как правило, бесконечномерно. Модальное управление запаздывающими системами и системами нейтрального типа исследовалось многими авторами (см., например, [3], [4]), однако многие вопросы до сих пор остаются открытыми.

Основная часть. Рассмотрим трехмерную линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом вида

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{113} \\ a_{121} & a_{122} & a_{123} \\ a_{131} & a_{132} & a_{133} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{211} & a_{212} & a_{213} \\ a_{221} & a_{222} & a_{223} \\ a_{231} & a_{232} & a_{233} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \\ x_3(t-h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{311} & a_{312} & a_{313} \\ a_{321} & a_{322} & a_{323} \\ a_{331} & a_{332} & a_{333} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t-h) \\ \dot{x}_2(t-h) \\ \dot{x}_3(t-h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (1)$$

где $h > 0$ – постоянное запаздывание.

Характеристический квазиполином системы (1) имеет вид

$$\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\alpha_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h}, \quad (2)$$

где $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ – числа, зависящие от коэффициентов системы (1), $\alpha_{30} = 1$. Задача модального управления состоит в том, чтобы для любых наперед заданных чисел β_{ij}, где $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$, $\beta_{30} = 1$, найти такой линейный регулятор, что система (1), замкнутая этим регулятором, имеет характеристический квазиполином вида

$$\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\beta_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h}. \quad (3)$$

Регулятор будем искать в форме

$$u(t) = q'_{00}x(t) + \sum_{i=0}^{L}\sum_{j=1}^{N} q'_{ij}x^{(i)}(t - jh) + \int_{-h}^{0} q'(s)x(t+s)ds, \quad (4)$$

где $q_{ij} \in \mathbb{R}^3$, штрих $(\cdot)'$ означает транспонирование, $L, N \in \mathbb{N}$, $x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t)]'$, $x^{(i)}(\cdot) \equiv \frac{d^i x(\cdot)}{dt^i}$, $x^{(0)}(\cdot) \equiv x(\cdot)$.

В частотной области регулятор (2) примет вид

$$U(\lambda) = q'_{00} + \sum_{i=0}^{L}\sum_{j=1}^{M} q'_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h} + G'(\lambda). \quad (5)$$

Если ядро интегральной части регулятора $G'(\lambda) \equiv 0$, то регулятор (4) примет наиболее простой дифференциально-разностный вид. Однако задача модального управления при этом решается лишь в исключительных случаях. Пусть теперь $G'(\lambda) \not\equiv 0$ и имеет вид

$$G'(\lambda) = [g_1 \quad g_2 \quad g_3],$$

где

$$g_i = \sum_{j=1}^{S}\beta_{ij}\frac{\alpha_j(\lambda, e^{-\lambda h})}{(\lambda - \xi)^j}, \quad (6)$$

$\xi \in \mathbb{C}$; $\alpha_i\left(\lambda, e^{-\lambda h}\right)$, $i = \overline{1, S}$, выбираются так, чтобы функции $\dfrac{\alpha_i\left(\lambda, e^{-\lambda h}\right)}{(\lambda-\xi)^i}$ были целыми и удовлетворяли условиям теоремы Винера – Пэли, например $\alpha_1\left(\lambda, e^{-\lambda h}\right) = e^{-\xi h} - e^{-\lambda h}$. Пусть $S = 1$, тогда характеристический квазиполином замкнутой этим регулятором системы (1) имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}(\cdot)-\lambda & a_{12}(\cdot) & a_{13}(\cdot) \\ a_{21}(\cdot) & a_{22}(\cdot)-\lambda & a_{23}(\cdot) \\ \tilde{a}_{31}(\cdot)+\beta_{11}(\cdot) & \tilde{a}_{32}(\cdot)+\beta_{21}(\cdot) & \tilde{a}_{33}(\cdot)-\lambda+\beta_{31}(\cdot) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}(\cdot)-\lambda & a_{12}(\cdot) & a_{13}(\cdot) \\ a_{21}(\cdot) & a_{22}(\cdot)-\lambda & a_{23}(\cdot) \\ \tilde{a}_{31}(\cdot) & \tilde{a}_{32}(\cdot) & \tilde{a}_{33}(\cdot)-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(\cdot)-\lambda & a_{12}(\cdot) & a_{13}(\cdot) \\ a_{21}(\cdot) & a_{22}(\cdot)-\lambda & a_{23}(\cdot) \\ \beta_{11}(\cdot) & \beta_{21}(\cdot) & \beta_{31}(\cdot) \end{vmatrix}, \quad (7)$$

где $a_{ij}(\cdot) = a_{1ij} + a_{2ij}e^{-\lambda h} + a_{3ij}\lambda e^{-\lambda h}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$, $\tilde{a}_{3j}(\cdot) = q_j\left(\lambda, e^{-\lambda h}\right) + a_{13j} + a_{23j}e^{-\lambda h} + a_{33j}\lambda e^{-\lambda h}$, a_{ijk}, $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, k = 1, 2, 3$ заданы в (1); $q_j\left(\lambda, e^{-\lambda h}\right)$ – квазиполиномы, определяемые дифференциально-разностной частью регулятора (5); $\beta_{j1}(\cdot) = \beta_{j1}\dfrac{\alpha_1\left(\lambda, e^{-\lambda h}\right)}{(\lambda-\xi)}$, $j = 1, 2, 3$, β_{j1} заданы в (6).

Второе слагаемое в правой части (7) перепишем в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11}(\cdot)-\lambda & a_{12}(\cdot) & a_{13}(\cdot) \\ a_{21}(\cdot) & a_{22}(\cdot)-\lambda & a_{23}(\cdot) \\ \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \end{vmatrix} \frac{e^{-\xi h} - e^{-\lambda h}}{\lambda-\xi}. \quad (8)$$

Обозначим $m = e^{-\lambda h}$. Представим элементы матрицы, определитель которой записан в (8) в следующем виде:

$$a_{ij}(\cdot) = a_{1ij} + a_{2ij}m + a_{3ij}\lambda m =$$
$$= a_{1ij} + a_{2ij}m + a_{3ij}\xi m + a_{3ij}(\lambda-\xi)m, \ i \neq j,$$
$$a_{ii}(\cdot) = a_{1ii} + a_{2ii}m + a_{3ii}\lambda m - \lambda =$$
$$= a_{1ii} + a_{2ii}m + a_{3ii}\xi m - \xi + a_{3ii}(\lambda-\xi)m - (\lambda-\xi),$$
$$i = 1, 2, \ j = 1, 2, 3.$$

Тогда выделим слагаемые, которые содержат множители $(\lambda-\xi)$, и воспользуемся следующим свойством определителей: определитель, в каждом элементе строки которого есть сумма двух слагаемых, равен сумме двух определителей, в соответствующих строках которых стоят эти слагаемые. Тогда определитель, который вычисляется в (8), перепишется в виде

$$c\left(\lambda, e^{-\lambda h}, \xi\right) + \frac{e^{-\xi h} - e^{-\lambda h}}{\lambda-\xi}\left(\begin{vmatrix} -\xi+a_{111} & a_{112} & a_{113} \\ a_{121} & -\xi+a_{122} & a_{123} \\ \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \end{vmatrix} + m\left(\begin{vmatrix} -\xi+a_{111} & a_{112} & a_{113} \\ a_{221}+\xi a_{321} & a_{222}+\xi a_{322} & a_{223}+\xi a_{323} \\ \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{211}+\xi a_{311} & a_{212}+\xi a_{312} & a_{213}+\xi a_{313} \\ a_{121} & -\xi+a_{122} & a_{123} \\ \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \end{vmatrix}\right) + m^2\begin{vmatrix} a_{211}+\xi a_{311} & a_{212}+\xi a_{312} & a_{213}+\xi a_{313} \\ a_{221}+\xi a_{321} & a_{222}+\xi a_{322} & a_{223}+\xi a_{323} \\ \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \end{vmatrix}\right), \quad (9)$$

где $c\left(\lambda, e^{-\lambda h}, \xi\right)$ – некоторый квазиполином, однозначно определяемый соотношением (8).

Из того, что характеристический квазиполином (3) замкнутой системы не содержит слагаемые, умножаемые на функцию $\dfrac{e^{-\xi h} - e^{-\lambda h}}{\lambda-\xi}$, следует, что второе слагаемое в (9) должно быть тождественно равно нулю. Для этого нужно, чтобы многочлен относительно m в скобках правой части (9) был бы нулевым. Поскольку из условия $G'(\lambda) \not\equiv 0$ вытекает, что $\beta_{11}^2 + \beta_{21}^2 + \beta_{31}^2 \neq 0$, то отсюда с учетом (9) следует, что система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \beta_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где

$$\gamma_{11} = \begin{vmatrix} a_{112} & a_{113} \\ -\xi+a_{122} & a_{123} \end{vmatrix}, \ \gamma_{12} = \begin{vmatrix} -\xi+a_{111} & a_{113} \\ a_{121} & a_{123} \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{13} = \begin{vmatrix} -\xi+a_{111} & a_{112} \\ a_{121} & -\xi+a_{122} \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{21} = \begin{vmatrix} a_{112} & a_{113} \\ a_{222}+\xi a_{322} & a_{223}+\xi a_{323} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} a_{212}+\xi a_{312} & a_{213}+\xi a_{313} \\ -\xi+a_{122} & a_{123} \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{22}=\begin{vmatrix} -\xi+a_{111} & a_{113} \\ a_{221}+\xi a_{321} & a_{223}+\xi a_{323} \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{211}+\xi a_{311} & a_{213}+\xi a_{313} \\ a_{121} & a_{123} \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{23}=\begin{vmatrix} -\xi+a_{111} & a_{112} \\ a_{221}+\xi a_{321} & a_{222}+\xi a_{322} \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{211}+\xi a_{311} & a_{212}+\xi a_{312} \\ a_{121} & -\xi+a_{122} \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{31}=\begin{vmatrix} a_{212}+\xi a_{312} & a_{213}+\xi a_{313} \\ a_{222}+\xi a_{322} & a_{223}+\xi a_{323} \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{32}=\begin{vmatrix} a_{211}+\xi a_{311} & a_{213}+\xi a_{313} \\ a_{221}+\xi a_{321} & a_{223}+\xi a_{323} \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{33}=\begin{vmatrix} a_{211}+\xi a_{311} & a_{212}+\xi a_{312} \\ a_{221}+\xi a_{321} & a_{222}+\xi a_{322} \end{vmatrix},$$

имеет нетривиальное решение. Значит, определитель матрицы системы (10) должен быть равен нулю. Очевидно, что определитель матрицы системы (10) представляет собой многочлен относительно переменной ξ степени не выше, чем пятой.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть система (1) модально управляема регулятором (4) ((5)), причем в (5) $G'(\lambda)\not\equiv 0$ имеет вид (6). Тогда ξ будут корнями многочлена степени не выше пятой, который является определителем матрицы системы (10).

Заключение. Полученная теорема дает одно необходимое условие модальной управляемости системы (1) в классе регуляторов (4) ((5)). Вопрос о том, достаточно ли регуляторов (4) ((5)) для решения задачи модальной управляемости, остается открытым. Доказано [5], что для аналогичной системы второго порядка такие регуляторы решают задачу модального управления. Условие теоремы позволяет свести бесконечномерную вариационную задачу нахождения регуляторов к конечномерной задаче нахождения коэффициентов регулятора (4), что существенно упрощает решение задачи модального управления.

Литература

1. Кириллова, Ф. М. К задаче об аналитическом конструировании регуляторов / Ф. М. Кириллова // Прикл. мат. и мех. – 1961. – № 3. – С. 433–439.

2. Wonham, W. M. On pole assignment in multi-input controllable systems / W. M. Wonham // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1967. – Vol. AC-12, № 6. – P. 660–665.

3. Задачи управления конечномерными системами / И. К. Асмыкович [и др.] // Автоматика и телемеханика. – 1986. – № 11. – С. 5–29.

4. Марченко, В. М. О модальном управлении многовходных систем с запаздывающим аргументом нейтрального типа / В. М. Марченко, А. А. Якименко // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 11. – С. 1534–1543.

5. Марченко, В. М. Модальное управление в системах с распределенным запаздыванием нейтрального типа / В. М. Марченко, А. А. Якименко // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 5. – С. 45–51.

Поступила 09.03.2012