раметра существенно не повысит вероятность рабочего состояния. Так, увеличение λ_1 с 5 до 7 повысит P_1 лишь на 2%.

Рациональный цикл подачи хлыстов составит

$$t_п = 1 / \lambda_1 = 1 / 5 = 0{,}2 \text{ мин.}$$

Полученное значение цикла подачи хлыста позволяет выбирать подающий механизм: растаскиватель, манипулятор или др.

В анализируемых вариантах $\lambda_1/ \mu_1 < 1$, а если система работает в режиме $\lambda_1/ \mu_1 > 1$, то предыдущий механизм вынужден простаивать либо предметы труда накапливаются перед обрабатывающей установкой. Последний случай может иметь место в течение кратковременного периода работы установки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Игнатенко В. В. Моделирование и оптимизация процессов лесозаготовок: учеб. пособие для студентов специальности «Лесоинженерное дело» / В. В. Игнатенко, И. В. Турлай, А. С. Федоренчик. – Минск: БГТУ, 2004.180 с.

2. Игнатенко В. В., Леонов Е. А. Установление рациональных параметров многооперационных машин в лесозаготовительной промышленности // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2015. Т. 3. № 5–4. С. 291–295.

УДК 634.0.30

Студ. М.М. Цмак
Науч. рук.доцент Игнатенко В.В.,
(кафедра высшей математики БГТУ)
доцент Леонов Е.А.
(кафедра ЛМДиТЛП БГТУ)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАБОТЫ ОДНОМАШИННЫХ ЛЕСОПРОМЫШЛЕННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАСОМ

Большинство лесопромышленных машин и оборудования, как правило, работают с запасом сырья, обеспечивающим ритмичность производства, уменьшение влияния негативных факторов. Это трелевочные, сучкорезные, раскряжевочные, сортировочные, окорочные, погрузочные и другие системы [1].

Рассмотрим одномашинную систему, в которую поступает поток предметов труда с интенсивностью λ_1, интенсивностью обработки μ_1 (т. е. в среднем непрерывно занятая машина будет выдавать μ_1 обработанных предметов труда в единицу времени). Предмет труда, поступивший в момент, когда система занята, попадает в запас и ожидает обработки.

Пусть размер запаса ограничен и равняется m. Составим математическую модель работы системы, используя систему дифференциальных уравнений Колмогорова. Для этого выделим все возможные состояния системы и нарисуем размеченный граф состояний (рис. 1) [2]. Все возможные состояния системы следующие:

S_0 – машина свободна, исправна, нет предмета труда;

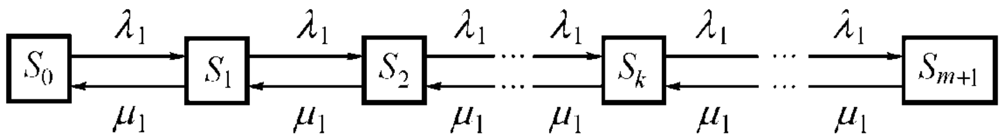
S_1 – машина обрабатывает предмет труда, запас пуст;

S_2 – машина обрабатывает предмет труда, в запасе одна единица;

…………………………………………………………………..

S_k– машина обрабатывает предмет труда, в запасе k– 1 предметов труда;

S_{m+1}– машина обрабатывает предмет труда, в запасе m предметов труда.



РАБОТА БЕЗ ЗАПАСА РАБОТА С ЗАПАСОМ

Рисунок 1 – Размеченный граф состояний одномашинной системы с ограниченным запасом

По стрелкам слева направо систему переводит поток предметов

на обработку, а справа налево – поток обработанных предметов труда с интенсивностью μ_1.

Математическая модель функционирования системы представляет систему уравнений Колмогорова

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0}{dt} = -\lambda_1 P_0 + \mu_1 P_0, \\ \dfrac{dP_1}{dt} = -(\lambda_1 + \mu_1) P_1 + \lambda_1 P_0 + \mu_1 P_2, \\ \dfrac{dP_2}{dt} = -(\lambda_1 + \mu_1) P_2 + \lambda_1 P_1 + \mu_1 P_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dP_{m+1}}{dt} = -\mu_1 P_{m+1} + \lambda_1 P_m, \\ P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_{m+1} = 1. \end{cases}$$

Здесь $P_i(t)$ означает вероятность того, что в момент времени

tсистема находится в состоянииS_i . При длительной работе системы $t \to \infty$ (установившийся режим) вероятности состояний $P_i(t)$ (предельные или финальные вероятности) будут постоянные[1].

Формулы для предельных вероятностей состояний ($t \to \infty$; $P_0 \approx$ const; $P_1 \approx$ const; …; $P_{m+1} \approx$ const) будут иметь вид

$$P_0 = \left[1 + \rho_1 + \rho_1^2 + \ldots + \rho_1^k + \ldots + \rho_1^{m+1}\right]^{-1};$$

$$P_1 = \rho_1 P_0; P_2 = \rho_1^2 P_0; \ldots; P_{m+1} = \rho_1 P_0.$$

В знаменателе формулы для P_0 стоит геометрическая прогрессия с первым членом 1 и знаменателем ρ_1. Суммируя эту прогрессию, находим

$$P_0 = \left[\frac{1 - P_1^{m+2}}{1 - P_1}\right]^{-1} = \frac{1 - P_1}{1 - P_1^{m+2}}. \qquad (1)$$

Таким образом, формулы для P_1, P_2, …, P_{m+2} примут вид с учетом найденного выражения P_0.

Формула (1) справедлива только при $\rho_1 \neq 1$, т. к. при $\rho_1 = 1$ формула для определения P_0 дает неопределенность 0/0. Сумма геометрической прогрессии со знаменателем $\rho_1 = 1$ составит m+ 2.

Тогда $P_0 = P_1 = P_2 = \ldots = P_{m+1} = 1 / (m+ 2)$.

Характеристики работы системы будут следующие. Вероятность простоя машины из-за отсутствия предмета труда $P_{\text{пр}} = P_0$. Вероятность работы машины с запасом

$$P_{\text{р.з}} = \sum_{i=2}^{m+1} P_i = 1 - P_0 - P_1. \qquad (2)$$

Среднее число предметов труда, находящихся в запасе, определится как математическое ожидание дискретной случайной величины R– числа предметов труда в запасе:

$$m = M[R].$$

С вероятностью P_2 в запасе находится один предмет труда, с вероятностью P_3– два предмета труда и т. д.

Тогда среднее число предметов труда получим, умножив число предметов труда в запасе на соответствующую вероятность и сложив результаты:

$$m = 1P_2 + 2P_3 + \ldots.. + (k-1)P_n + \ldots.. + m\,P_{m+1} =$$
$$= 1\rho_1^2 P_0 + 2\rho_1^3 P_0 + \ldots.. + (k-1)\rho_1^k P_0 + \ldots.. m\rho_1^{m+1} P_0$$

После преобразований получается:

$$m = \frac{\rho_1^2[1-\rho_1^m(m+1-m\rho_1)]}{(1-\rho_1^{m+2})(1-\rho_1)}. \qquad (3)$$

Пример. Окорочный станок ОК-40 осуществляет окорку лесоматериалов с интенсивностью $\mu_1 = 1$. Интенсивность подачи $\lambda_1 = 0{,}9$. Необходимо установить влияние запаса сортиментов на работу системы. Используя формулы (1), (2) и (3), построим зависимости (рис. 2, рис 3).

С увеличением количества сортиментов в запасе вероятность работы возрастает, соответственно, вероятность простоя уменьшается. Основной прирост производительности достигается созданием запаса размером 10–11 сортиментов. При этом производительность возрастает на 35% по сравнению с состоянием системы без запаса ($m = 0$). Дальнейшее увеличение запаса, например до 30 сортиментов, приведет к росту производительности всего на 4% по отношению к достигнутой при $m = 10–11$.

До сих пор рассматривалась работа одномашинной системы с запасом при его ограниченном размере. Ряд лесопромышленных систем: очистка стволов от сучьев, отгрузка хлыстов (деревьев) на лесном складе и др. выполняются с практически неограниченными запасами предметов труда ($m \to \infty$).

Рисунок 2 – Зависимости вероятности работы ($P_р$) и простоя ($P_{пр}$)окорочного станка отразмера запаса/

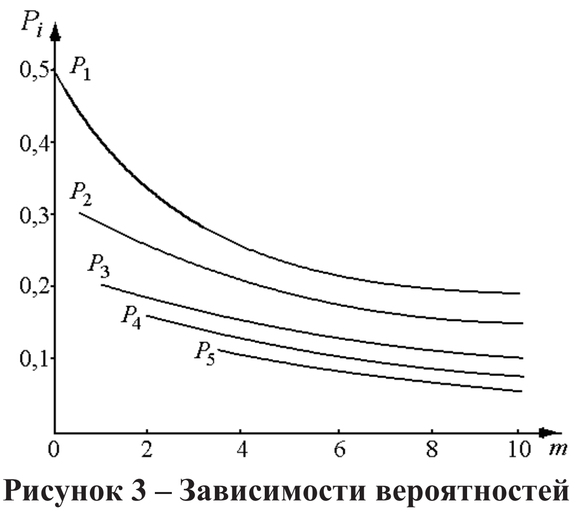


Рисунок 3 – Зависимости вероятностей состояний системы от размера запаса*m*

Исходя из этого, число состояний системы станет бесконечным, и схема состояний примет вид, показанный на рисунке 4.

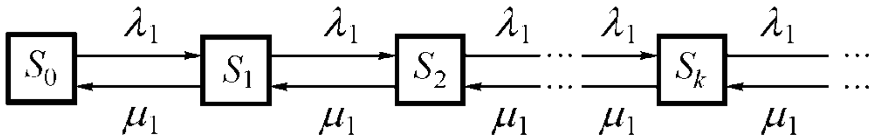


Рисунок 4 – Размеченный граф состояний одномашинной системыс неограниченным размером запаса

Функционирование подобной системы предполагает два режима, первый $-\rho_1 \geq 1$. В этом случае запас предметов труда растет в принципе до бесконечности.

Следует отметить, что лесопромышленные системы в течение продолжительного периода работать в таком режиме не могут. Тогда, естественно, сохраняется условие $\rho_1 \leq 1$. Ели в формуле (1) принять $m \to \infty$, то формулы для предельных вероятностей состояний системы примут вид

$$P_0 = 1 - \rho_1;\ P_1 = \rho_1(1-\rho_1);\ P_2 = \rho_1^2(1-\rho_1);\ \ldots;\ P_k = \rho_1^k(1-\rho_1)\,.$$

Среднее число предметов труда в запасе будетн$\overline{m} = \dfrac{\rho_1^2}{1-\rho_1}$.

Среднее время ожидания на обработку составит $t_{\text{ож}} = \dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{\rho_1}{1-\rho_1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Игнатенко, В. В. Моделирование и оптимизация процессов лесозаготовок: учеб. пособие для студентов специальности «Лесоинженерное дело» / В. В. Игнатенко, И. В. Турлай, А. С. Федоренчик. – Минск: БГТУ, 2004.180 с.

2. Игнатенко В. В., Леонов Е. А. Установление рациональных параметров многооперационных машин в лесозаготовительной промышленности // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2015. Т. 3. № 5–4. С. 291–295.