УДК 557.114:616-006

Студ. А.Д. Радчиков
Науч. рук. доц. И.К. Асмыкович
(кафедра высшей математики)

СРАВНЕНИЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ЧАСТИЧНЫХ СУММ РЯДА ФУРЬЕ

Ряд Фурье позволяет представить непрерывную функцию f(x), определенную на некотором отрезке [0, T], в виде суммы бесконечного числа (бесконечного ряда) гармонических функций (синусоид и\или косинусоид) с определёнными амплитудами и фазами, также рассматриваемых на отрезке [0, T]. То есть в следующем виде:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi \frac{k}{\tau} x + \theta_k)$$

где A_k — амплитуда ***k***-го гармонического колебания (функции *cos*);

$2\pi \frac{k}{\tau} x = k\omega$ — круговая частота гармонического колебания; θ_k - начальная фаза ***k***-го колебания.

Ряд Фурье позволяет изучать периодические (непериодические) функции [1]. Например, если дана функция, интегрируемая на отрезке $[-l, l]$, то её можно разложить в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}$$

где a_0, a_n, b_n – коэффициенты ряда Фурье, которые находятся по следующим формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^{l} f(x)dx\,,\quad a_n = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos\frac{\pi n x}{l} dx\,,\quad b_n = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \sin\frac{\pi n x}{l} dx.$$

Цель работы: изучить зависимость точности приближения периодических функций частичными суммами ряда Фурье.

Например, для функции $f(x) = x + 1$, заданной на отрезке $[-\pi, \pi]$, тригонометрический ряд Фурье будет иметь следующий вид:

$$\mathrm{f(x)} \sim 1 - 2\sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} (\frac{(-1)^n \cdot \sin nx}{n}).$$

Разложение функций в сходящийся ряд Фурье нашло практическое применение во многих инженерных расчётах: переменные токи и напряжения, смещения, скорость и ускорение кривошипно-шатунных механизмов и акустические волны. Оно также является математической основой спектрального анализа периодических сигналов.

Частичная сумма ряда Фурье $S_N(x)$ функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-l,l]$ определяется выражением:

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_n \cos\frac{\pi kx}{l} + b_n \sin\frac{\pi kx}{l}.$$

Так для периодической функции с периодом 2π, заданной на отрезке $[-\pi,\pi]$ $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}+1$, графики частичных сумм S_2 и S_{10} имеют следующий вид:

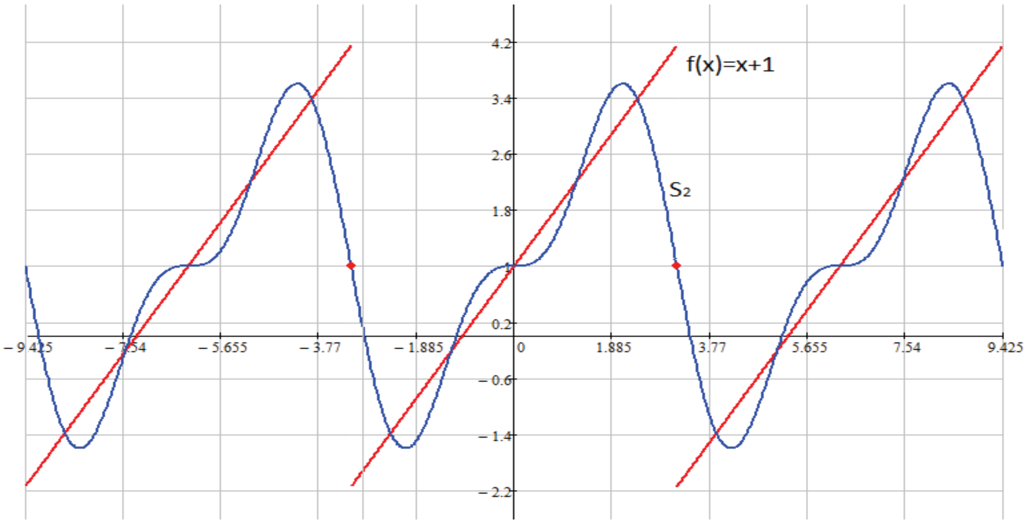

Рисунок 1 – Графики функции и частичной суммы S_2

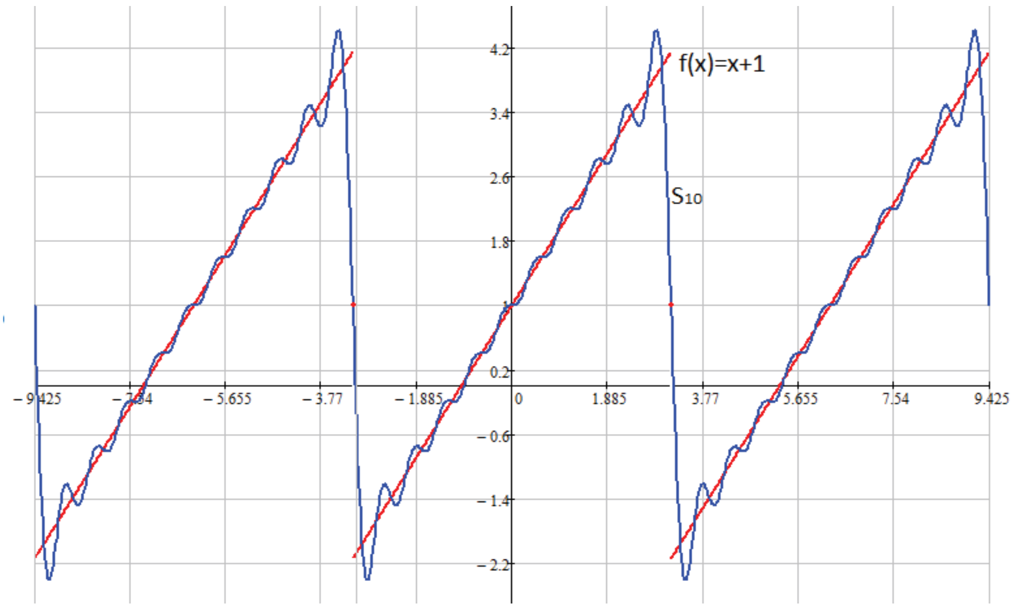

Рисунок 2 – Графики функции и частичной суммы S_{10}

Анализируя графики, можно заметить, что периоды гармонических составляющих кратны длине отрезка [0, T], на котором определена исходная функция $f(x)$ и что при устремлении числа слагаемых частичной суммы к бесконечности, среднеквадратическое отклонение от функции стремиться к нулю:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}(f(x)-S_N(x))^2\,dx=0.$$

Поэтому стоит обратить внимание на исследование частичных сумм. А именно, при каком порядке частичной суммы, значение в определенной точке будет отклонено от значения функции с определённой точностью. И наоборот, как будет отклонено значение частичной суммы порядка k от функции в определённой точке, при случайно заданном k.

Ниже приведены расчеты определения порядка частичной суммы ряда Фурье, при котором значение частичной суммы отклоняется от значения функции $f(x)=x$, определенной на отрезке $[-\pi,\pi]$, в точке $x=2.5$ с определённой точностью.

Таблица – Порядки частичных сумм

Точность	Количество слагаемы, n
0.1	7
0.01	41
0.001	95
0.0001	237
1E-5	3219
1E-6	20969
1E-7	45251
1E-8	51215
1E-9	51925
1E-10	364756

В данной работе на основании ряда численных методов [2] разработаны программы, позволяющие дать точечную оценку и оценку среднеквадратического отклонения между частичной суммой произвольного порядка и раскладываемой функции. А также алгоритмы нахождения порядка частичных сумм, по заданному соответствующему отклонению. Проведены численные эксперименты для непрерывно дифференцируемых функций, кусочно-непрерывных функций и кусочно-монотонных функций. Получено, что число слагаемых, обеспечивающих требуемую точность значения частичной суммы, существенно зависит от гладкости разлагаемой функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. – Москва. –2007. –608с.

2. Колдаев В.Д. Численные методы и программирование. – Москва. – 2009. – 335с.