УДК 517.929

Т. Б. Копейкина, кандидат физико-математических наук,
доцент, старший научный сотрудник (БГТУ)

УПРАВЛЯЕМОСТЬ СУЩЕСТВЕННО РАЗНОТЕМПОВЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Исследуется проблема управляемости разнотемповой динамической системы (РДС), состоящей из трех векторных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, в которые в качестве множителя при производной входит малый параметр μ с существенно различными степенями $\alpha, \beta, \alpha < \beta$. С помощью перехода в пространство состояний исследуемой системы и введения для нее определяющих уравнений (т. е. системы матричных алгебраических рекуррентных уравнений) доказаны удобные для использования в технических приложениях критерии полной, различные виды относительной управляемости РДС, выраженные через компоненты решения определяющих уравнений.

The controllability problem of time-invariant multi-temps singularly perturbed dynamic systems with the help of state space method is considered in this paper. System under consideration consists of three vector differential equations with small parameter multiplying state derivatives in different degrees $\alpha, \beta, \ \alpha < \beta$. Some criteria as well as algebraic conditions of complete controllability and different types of relative controllability are proved. These criteria are obtained in terms of the solutions of the defining equations which are recurrence matrix algebraic ones constructed in virtue of the view of the system under consideration.

Введение. В работе автора [1] была рассмотрена проблема управляемости разнотемповой сингулярно возмущенной динамической системы (РСВДС):

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + B_1u, \\ \mu\, \dot{y} = A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z + B_2u, \\ \mu^2 \dot{z} = A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z + B_3u, \end{cases} \qquad (1)$$

где μ – малый положительный параметр, $\mu \in \in \left(0, \mu^0\right]$, $\mu^0 \ll 1$; $x \in R^{n_1}$ – вектор медленных переменных; $y \in R^{n_2}$, $z \in R^{n_3}$ – векторы быстрых переменных с различными скоростями $\dot{y} = O\left(\frac{1}{\mu}\right)$, $\dot{z} = O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$; A_{ij}, B_j, $i, j = \overline{1,3}$ – заданные постоянные матрицы соответствующих размеров; $n_1 + n_2 + n_3 \le r$; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ – производные соответствующих вектор-функций по времени t, $t > 0$. С помощью перехода в $(n_1 + n_2 + n_3)$-мерное пространство состояний РСВДС (1) и применения метода определяющих уравнений, предложенного автором в [2] и состоящего в построении по исходной системе дифференциальных уравнений системы матричных алгебраических рекуррентных уравнений, в работе [1] были получены эффективные алгебраические условия полной, относительной управляемости, выраженные в терминах параметров A_{ij}, B_j, i, $j = \overline{1,3}$ РСВДС (1).

В данной работе проблема управляемости рассматривается для более общего вида РСВДС:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + B_1u, \\ \mu^\alpha \dot{y} = A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z + B_2u, \\ \mu^\beta \dot{z} = A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z + B_3u, \end{cases} \qquad (2)$$

где $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in Z^+$, Z^+ – множество целых положительных чисел. В (2) x – n_1-вектор медленных переменных по сравнению с n_2- и n_3-векторами y, z быстрых переменных, которые входят в систему (2) с существенно различными скоростями $\dot{y} = O\left(\frac{1}{\mu^\alpha}\right)$, $\dot{z} = O\left(\frac{1}{\mu^\beta}\right)$. Поэтому систему (2) назовем *существенно разнотемповой сингулярно возмущенной динамической системой* (СРСВДС). Отметим, что системами с малым параметром при старшей производной описывается, например, процесс обтекания затупленного тела сверхзвуковым потоком вязкого газа; движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость; поведение тонких и гибких пластин и оболочек и др. Многие задачи гидродинамики, динамики полета, химической кинетики, автоматического управления и регулирования описываются РСВС, в которые малый параметр входит в качестве множителей с различными степенями при переменных состояния системы.

Впервые проблема управляемости разнотемповых сингулярно возмущенных систем была рассмотрена в [3], где достаточные условия полной управляемости получены на основе разложения пространства состояний системы в прямую сумму подпространств меньшей размерности. В данной работе исследование полной и различных видов относительной управляемости СРСВДС (2) с постоянными коэффициентами проводится с помощью метода пространства состояний и дальнейшего развития метода определяющих уравнений [2] на более общие, чем РСВСДС (1), системы вида (2).

Постановка задачи. Определения. Рассмотрим проблему управляемости СРСВДС дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (2) с начальными условиями

$$x(0,\mu)=x_0,\ \ y(0,\mu)=y_0,\ \ z(0,\mu)=z_0, \qquad (3)$$

где $x(t)\in R^{n_1}$; $y(t)\in R^{n_2}$; $z(t)\in R^{n_3}$; $u(t)\in R^{r}$; u – вектор-функция управляющих воздействий из класса кусочно-непрерывных функций, называемых далее *допустимыми управлениями*; $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ – производные соответствующих вектор-функций по времени t, $t>0$.

Определение 1. СРСВДС (2) полностью управляема при заданном μ, если для любых $(n_1+n_2+n_3)$-векторов $\{x_0,y_0,z_0\}$, $\{x_1,y_1,z_1\}$ существуют момент времени $t_1, t_1>0$, и допустимое управление $u(t)$ такие, что соответствующая им в силу (2), (3) траектория

$$\{x(t;\,x_0,\,u(t),\,\mu),\,y(t;\,y_0,\,u(t),\,\mu),\,z(t;\,z_0,\,u(t),\,\mu)\}$$

удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered}x(0;\,x_0,\,u(t),\,\mu)=x_0,\,y(0;\,y_0,\,u(t),\,\mu)=y_0,\\ z(0;\,z_0,\,u(t),\,\mu)=z_0,\\ x(t_1;\,x_0,\,u(t),\,\mu)=x_1,\,y(t_1;\,y_0,\,u(t),\,\mu)=y_1,\\ z(t_1;\,z_0,\,u(t),\,\mu)=z_1.\end{gathered} \qquad (4)$$

Определение 2. СРСВДС (2) называется x-управляемой (y-управляемой; z-управляемой) при заданном μ, если для любых $(n_1+n_2+n_3)$-векторов $\{x_0,y_0,z_0\}$, $\{x_1,y_1,z_1\}$ существуют момент времени $t_1, t_1>0$, и допустимое управление $u(t)$ такие, что соответствующая им в силу (2), (3) траектория

$$\{x(t;\,x_0,\,u(t),\,\mu),\,y(t;\,y_0,\,u(t),\,\mu),\,z(t;\,z_0,\,u(t),\,\mu)\}$$

удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered}x(0;\,x_0,\,u(t),\,\mu)=x_0,\\ y(0;\,y_0,\,u(t),\,\mu)=y_0,\ z(0;\,z_0,\,u(t),\,\mu)=z_0,\\ x(t_1;\,y_0,\,u(t),\,\mu)=x_1,\\ y(t_1;\,z_0,\,u(t),\,\mu)=y_1;\,z(t_1;\,z_0,\,u(t),\,\mu)=z_1.\end{gathered} \qquad (5)$$

Цель работы – получить эффективные, удобные в приложениях условия полной управляемости, x-управляемости, y-управляемости, z-управляемости, выраженные через параметры A_{ij}, B_j, $i,\,j=\overline{1,3}$ СРСВДС (2).

Метод исследования. Вспомогательные результаты. Для вывода необходимых и достаточных условий управляемости СРСВДС (2) введем расширенный вектор $w=(x,y,z)'\in R^{n_1+n_2+n_3}$ – вектор состояния СРСВДС (2), $(n_1+n_2+n_3)\times(n_1+n_2+n_3)$-матрицу $A(\mu)$, $(n_1+n_2+n_3)\times r$-матрицу $B(\mu)$:

$$A(\mu)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ \dfrac{A_{21}}{\mu^{\alpha}} & \dfrac{A_{22}}{\mu^{\alpha}} & \dfrac{A_{23}}{\mu^{\alpha}}\\ \dfrac{A_{31}}{\mu^{\beta}} & \dfrac{A_{32}}{\mu^{\beta}} & \dfrac{A_{33}}{\mu^{\beta}}\end{pmatrix},\ B(\mu)=\begin{pmatrix} B_1\\ \dfrac{B_2}{\mu^{\alpha}}\\ \dfrac{B_3}{\mu^{\beta}}\end{pmatrix}. \qquad (6)$$

В силу (6) СРСВДС (2) принимает вид

$$\dot{w}=A(\mu)w+B(\mu)u \qquad (7)$$

с начальным условием

$$w(0,\,\mu)=w_0. \qquad (8)$$

Согласно критерию Р. Калмана [4], система (7) полностью управляема в том и только том случае, если

$$\begin{gathered} rank\{A(\mu)^k B(\mu),\, k=\overline{0,n_1+n_2+n_3-1}\}=\\ =n_1+n_2+n_3.\end{gathered} \qquad (9)$$

Непосредственное применение критерия полной управляемости (9) для СРСВДС (2) с матрицами (6) дает в знаменателе большие показатели степеней малого параметра μ, что делает входящие в (9) элементы бесконечно большими и затрудняет проверку данного критерия. Поэтому получим эффективные необходимые и достаточные условия управляемости СРСВДС (2), выраженные в терминах ее параметров A_{ij}, B_j, $i,j=\overline{1,3}$ и не содержащие малый параметр μ.

Для решения поставленной задачи введем оператор $p\equiv\dfrac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования функций по времени t. Тогда для любой дифференцируемой функции $f(t)$ справедливо тождество $pf(t)\equiv\dfrac{df}{dt}$. С помощью оператора p СРСВДС (2) может быть представлена в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{cases} px(t)=A_{11}x(t)+A_{12}y(t)+A_{13}z(t)+B_1u(t),\\ \mu^{\alpha}py(t)=A_{21}x(t)+A_{22}y(t)+A_{23}z(t)+B_2u(t),\\ \mu^{\beta}pz(t)=A_{31}x(t)+A_{32}y(t)+A_{33}z(t)+B_3u(t).\end{cases} \qquad (10)$$

Как и в работе [1], каждой вектор-функции $x(t), y(t), z(t), u(t)$, входящей в СРСВДС (10), поставим в соответствие постоянные матрицы

$$\begin{aligned} x(t) \to X_k^i \in R^{n_1\times r},\ y(t) \to Y_k^i \in R^{n_2\times r}, \\ z(t) \to Z_k^i \in R^{n_3\times r},\ u(t) \to U_k^i \in R^{r\times r} \end{aligned} \qquad (11)$$

с двумя индексами k, i, а оператору дифференцирования p и малому параметру μ – операторы сдвига Δ_+, Δ^+ на единицу вправо соответственно нижнего и верхнего индекса у этих матриц:

$$p \to \Delta_+,\ \mu \to \Delta^+. \qquad (12)$$

Таким образом, согласно (11), (12), для некоторой матрицы Q_k^i применение операторов Δ_+, Δ^+ дает $\Delta_+ Q_k^i = Q_{k+1}^i, \Delta^+ Q_k^i = Q_k^{i+1}$, а, например, выражению $\mu^\beta pz(t)$ соответствует операторная форма $(\Delta^+)^\beta \Delta_+ Z_k^i \equiv Z_{k+1}^{i+\beta}$.

В силу соответствий (11), (12) с учетом свойств операторов Δ_+, Δ^+ СРСВДС (10) может быть представлена как алгебраическая система рекуррентных по k, i матричных уравнений:

$$\begin{cases} X_{k+1}^i = A_{11}X_k^i + A_{12}Y_k^i + A_{13}Z_k^i + B_1U_k^i, \\ Y_{k+1}^{i+\alpha} = A_{21}X_k^i + A_{22}Y_k^i + A_{23}Z_k^i + B_2U_k^i, \\ Z_{k+1}^{i+\beta} = A_{31}X_k^i + A_{32}Y_k^i + A_{33}Z_k^i + B_3U_k^i, \end{cases} \qquad (13)$$

которые при $i, k \ge 0$ будем решать с начальными условиями

$$\begin{aligned} &U_0^0 = E_r,\ U_k^i = 0_r, \quad k \ne 0 \vee i \ne 0; \\ &X_0^i = 0_{n_1\times r},\ \forall i; \\ &Y_k^i = 0_{n_2\times r}, \quad k = 0 \vee i = 0, 1, ..., \alpha-1; \\ &Z_k^i = 0_{n_3\times r}, \quad k = 0 \vee i = 0, 1, ..., \beta-1, \end{aligned} \qquad (14)$$

где E_r – единичная $(r\times r)$-матрица; $0_{n_i\times r}$ – прямоугольная $(n_i\times r)$-матрица с нулевыми элементами.

Уравнения (13) назовем *системой определяющих уравнений* для СРСВДС (2). Решением системы (13) с начальными условиями (14) для любого $i, k \ge 0$ является тройка постоянных матриц $\{X_k^i, Y_k^i, Z_k^i\}, i, k \ge 1,$ каждую из которых назовем *компонентой* решения. Из (13) в силу (14) получаем дополнительные свойства компонент X_k^i, Y_k^i, Z_k^i решения $\{X_k^i, Y_k^i, Z_k^i\}$, $i, k \ge 1$:

$$X_k^i = 0_{n_1\times r},\ i \ge \beta(k-1)+1,$$

$$Y_k^i = 0_{n_2\times r},\ i \ge \beta(k-1)+1+\alpha,$$

$$Z_k^i = 0_{n_3\times r},\ i \ge \beta k+1,$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned} X_k^i = 0_{n_1\times r},\ Y_k^{i+\alpha} = 0_{n_2\times r},\ Z_k^{i+\beta} = 0_{n_3\times r}, \\ i \ge \beta(k-1)+1. \end{aligned} \qquad (15)$$

Доказательство этих соотношений можно провести методом математической индукции и в данной работе опускается.

Лемма. Для любого целого $l \ge 0$ произведения матриц $A(\mu)$, $B(\mu)$ из (6) удовлетворяет равенству

$$A^l(\mu)B(\mu) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{\beta l} \dfrac{X_{l+1}^i}{\mu^i} \\ \sum\limits_{i=0}^{\beta l} \dfrac{Y_{l+1}^{i+\alpha}}{\mu^{i+1}} \\ \sum\limits_{i=0}^{\beta l} \dfrac{Z_{l+1}^{i+\beta}}{\mu^{i+2}} \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Доказательство этой леммы проводится по схеме доказательства леммы из работы [1, с. 8–10] методом математической индукции по l, но с соответствующими изменениями в силу более общего, чем (1), вида СРСВДС (2). Поэтому здесь это доказательство опускается.

Основные результаты. Используя равенство (16) леммы при $l = 0, 1, ..., n_1+n_2+n_3-1$, необходимое и достаточное условие (9) полной управляемости СРСВДС (2) может быть представлено в виде

$$rank \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{s\beta} \dfrac{X_{s+1}^i}{\mu^i} & \\ \sum\limits_{i=0}^{s\beta} \dfrac{Y_{s+1}^{i+\alpha}}{\mu^{i+\alpha}} & s = \overline{0, n_1+n_2+n_3-1} \\ \sum\limits_{i=0}^{s\beta} \dfrac{Z_{s+1}^{i+\beta}}{\mu^{i+\beta}} & \end{bmatrix} = \\ = n_1+n_2+n_3. \qquad (17)$$

Условие (17) представляет компактную форму записи критерия (9), однако оно не является эффективным, так как содержит в знаменателях большие степени малого параметра μ и потому достаточно большие по абсолютной величине слагаемые, что затрудняет проверку критерия полной управляемости. Получим другое представление условия (17), не содержащее малый параметр μ. Для этого введем в рассмотрение три матрицы:

$$P = \begin{pmatrix} E_{n_1} & 0_{n_1\times n_2} & 0_{n_1\times n_3} \\ 0_{n_2\times n_1} & E_{n_2} & 0_{n_2\times n_3} \\ 0_{n_3\times n_1} & 0_{n_3\times n_2} & E_{n_3} \end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix} X_k^i \\ Y_k^{i+\alpha}, \quad k=\overline{1,\ n_1+n_2+n_3},\ i=\overline{0,\beta(k-1)} \\ Z_k^{i+\beta}\end{pmatrix},$$

$$R=diag\begin{pmatrix}\dfrac{E_r}{\mu^k}, \quad l=\overline{0,\ n_1+n_2+n_3-1} \\ k=\overline{0,\beta l}\end{pmatrix},$$

где $P\in R^{(n_1+n_2+n_3)\times(n_1+n_2+n_3)}$,

$$Q\in R^{(n_1+n_2+n_3)\times\frac{r(n_1+n_2+n_3)(\beta(n_1+n_2+n_3-1)+2)}{2}},$$

$$R\in R^{\frac{r(n_1+n_2+n_3)(\beta(n_1+n_2+n_3-1)+2)}{2}\times r(n_1+n_2+n_3)}.$$

Тогда нетрудно заметить, что матрица S в левой части условия (17) может быть представлена в виде

$$S=\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=0}^{\beta s}\dfrac{X_{s+1}^j}{\mu^j} \\ \sum\limits_{i=0}^{\beta s}\dfrac{Y_{s+1}^{j+\alpha}}{\mu^{j+\alpha}}, \quad s=\overline{0,\ n_1+n_2+n_3-1} \\ \sum\limits_{i=0}^{\beta s}\dfrac{Z_{s+1}^{j+\beta}}{\mu^{j+\beta}}\end{pmatrix}=PQR.$$

Очевидно, что для любого $\mu>0$, $\det P=$ $=\dfrac{1}{\mu^{\alpha n_1+\beta n_2}}\neq 0.$ В силу представления матрицы R в блочно-диагональной форме нетрудно заметить, что $rank\,R=r(n_1+n_2+n_3).$ Таким образом, получаем следующую цепочку соотношений:

$$n_1+n_2+n_3=rank\ S=rank\{PQR\}=$$
$$=rank\{QR\}\le rank\{Q, r(n_1+n_2+n_3)\}. \quad (18)$$

Поскольку $r(n_1+n_2+n_3)\ge n_1+n_2+n_3$ для любого $r\ge 1$, то из (18) следует $rank\,Q\ge$ $\ge n_1+n_2+n_3$, что для матрицы Q возможно лишь при условии $rank\,Q=n_1+n_2+n_3$. Таким образом, доказан основной результат данной работы – критерий полной управляемости СРСВДС (2).

Теорема 1. Для полной управляемости СРСВДС (2) при любом $\mu\in(0,\mu^0]$, $\mu^0\ll 1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$rank\begin{bmatrix} X_k^i \\ Y_k^{i+\alpha},\ k=\overline{1,\ n_1+n_2+n_3},\ i=\overline{0,\beta(k-1)} \\ Z_k^{i+\beta}\end{bmatrix}=$$
$$=n_1+n_2+n_3.$$

Из теоремы 1 по аналогии с [1] следует доказательство критериев x-управляемости, y- и z-управляемости СРСВДС (2).

Теорема 2. Для x-управляемости (y-управляемости; z-управляемости) СРСВДС (2) при любом $\mu\in(0,\ \mu^0]$, $\mu^0\ll 1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$rank\left\{X_k^i,\ k=\overline{1,\ n_1+n_2+n_3},\ i=\overline{0,\beta(k-1)}\right\}=n_1,$$
$$\left(rank\left(Y_k^{i+\alpha},\ k=\overline{1,n_1+n_2+n_3},\ i=\overline{0,\ \beta(k-1)}\right)=n_2,\right.$$
$$\left.rank\left(Z_k^{i+\beta},\ k=\overline{1,\ n_1+n_2+n_3},\ i=\overline{0,\ \beta(k-1)}\right)=n_3\right).$$

Заключение. Приведенная схема доказательства критерия полной управляемости СРСВДС (2) с целыми показателями малого параметра μ при производных позволяет получить условия управляемости этой системы с рациональными степенями малого параметра.

Литература

1. Копейкина, Т. Б. Управляемость разнотемповых сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений / Т. Б. Копейкина // Труды БГТУ. – 2011. – № 6: Физ.-мат. науки и информатика. − С. 7−11.

2. Копейкина, Т. Б. О критериях управляемости линейных стационарных сингулярно возмущенных систем / Т. Б. Копейкина // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2006. – Т. 14, № 2. – С. 71–82.

3. Курина, Г. А. О полной управляемости разнотемповых сингулярно возмущенных систем / Г. А. Курина // Математические заметки. – 1992. – Т. 52, вып. 4. – С. 56–61.

4. Калман, Р. Е. Об общей теории систем управления / Р. Е. Калман // Труды I международного конгресса ИФАК по автоматическому управлению. – М.: Наука: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 521–547.

Поступила 01.03.2012