УДК 519.254

Студ. А. Т. Черенков
Науч. рук. доц. Е. И. Ловенецкая
(кафедра высшей математики, БГТУ)

МЕТОД ШТРАССЕНА

Фолькен Штрассен — немецкий математик, почетный профессор кафедры математики и статистики Констанцского университета. Родился 29 апреля 1936 г. в Дюссельдорфе (Германия). Занимался анализом и разработкой быстрых алгоритмов, один из создателей теории алгебраической сложности, в которой ему принадлежат многие классические теоремы.

мощностей не было, существовала проблема скорости и возможности выполнения подсчётов больших объёмов чисел. Чтобы решить эту проблему, учёные старались оптимизировать счёт при помощи упрощения, ускорения, замены алгоритмов. Алгоритм Штрассена стал альтернативой для обыкновенного умножения квадратных матриц, давая преимущество в скорости для матриц большого размера. Если обычное умножение двух матриц размера $N \times N$производится за время $O\left(N^3\right)$, то метод Штрассена требует $O\left(N^{2,81}\right)$. Поэтому метод применяется в случаях, когда вычислительные мощности могут быть ограничены, существуют большие матрицы, требуется высокая скорость вычислений.

Чтобы произвести обыкновенное умножение матриц A и B размера 2×2, необходимо выполнить 8 умножений. Метод Штрассена позволяет выполнить данную операцию за 7 умножений.

Переходя к особенностям метода, стоит отметить размер матриц. Метод Штрассена работает с квадратными матрицами, порядок которых можно представить в виде числа, равного степени двойки. В случае, когда это не так, матрица дополняется нулевыми элементами до квадратной матрицы ближайшей корректного размера:

$$\begin{pmatrix} 1 & -9 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \\ 8 & -2 & 5 \end{pmatrix},\ N = 3; \qquad \begin{pmatrix} 1 & -9 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 \\ 8 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N = 4;$$

Теперь можно приступить к самому алгоритму. Как было указано ранее, метод имеет 7 умножений. Ценой упразднения одного умножения является подсчёт дополнительных сумм и разностей.

Алгоритм действий [1]:

1. Разделить входные матрицы A и B и выходную матрицу C на подматрицы размера $N/2{\times}N/2$.

2. Создать 10 матриц S, каждая из которых имеет размер $N/2{\times}N/2$ и представляет собой сумму или разность двух матриц, созданных на шаге 1.

3. Используя подматрицы, созданные на шаге 1, и 10 матриц S, рекурсивно вычислить 7 матричных произведений P.

4. Вычислить подматрицы $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ результирующей матрицы C.

Рассмотрим работу алгоритма на примере квадратных матриц размера 4×4. Исходные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

и их произведение $C = A{\cdot}B$ разделим на четыре блока — подматрицы размера $N/2{\times}N/2$, т. е. в данном случае размера 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}.$$

В нашем примере:

$$A_{11}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}; A_{12}=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}; \ A_{21}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \ A_{22}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}; B_{12}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}; \quad B_{21}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \ B_{22}=\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

На втором шаге алгоритма создадим 10 матриц Sразмера $N/2{\times}N/2$. Каждая матрица Sнаходится путём сложения или вычитания матриц, полученных ранее. МатрицыSвычислимпо формулам:

$$S_1=B_{12}-B_{22}; S_2= A_{11}+A_{12};$$
$$S_3=A_{21}+A_{22}; S_4=B_{21}-B_{11}; S_5=A_{11}+A_{22}; S_6=B_{11}+B_{22}; S_7=A_{12}-A_{22}; S_8=B_{21}+B_{22}; S_9=A_{11}-A_{21}; S_{10}=B_{11}+B_{12}.$$

Подставляя необходимые подматрицы в формулы, получим:

$$S_1 = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}; S_2 = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}; S_3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \ S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$S_5 = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}; \ S_6 = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}; S_7 = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}; S_8 = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 4 & 10 \end{pmatrix};$$

$$S_9 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}; \ S_{10} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Далее, используя подматрицы, созданные на шаге 1, и 10 матриц S, рекурсивно вычислим 7 матричных произведений P с помощью следующих формул:

$$P_1 = A_{11} \cdot S_1 = A_{11} \cdot B_{12} - A_{11} \cdot B_{22};$$
$$P_2 = S_2 \cdot B_{22} = A_{11} \cdot B_{22} + A_{12} \cdot B_{22};$$
$$P_3 = S_3 \cdot B_{11} = A_{21} \cdot B_{11} - A_{22} \cdot B_{11};$$
$$P_4 = A_{22} \cdot S_4 = A_{22} \cdot B_{21} - A_{22} \cdot B_{11};$$
$$P_5 = S_5 \cdot S_6 = A_{11} \cdot B_{11} - A_{11} \cdot B_{22} + A_{22} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{22};$$
$$P_6 = S_7 \cdot S_8 = A_{12} \cdot B_{21} - A_{12} \cdot B_{22} - A_{22} \cdot B_{21} - A_{22} \cdot B_{22};$$
$$P_7 = S_9 \cdot S_{10} = A_{11} \cdot B_{11} - A_{11} \cdot B_{12} - A_{21} \cdot B_{11} - A_{21} \cdot B_{12}.$$

В результате получаем:

$$P_1 = \begin{pmatrix} -17 & -2 \\ -22 & -6 \end{pmatrix}; \; P_2 = \begin{pmatrix} 112 & 36 \\ 74 & 73 \end{pmatrix}; \; P_3 = \begin{pmatrix} 24 & 30 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \; P_4 = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$
$$P_5 = \begin{pmatrix} 70 & 53 \\ 80 & 31 \end{pmatrix}; \; P_6 = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 48 & 24 \end{pmatrix}; \; P_7 = \begin{pmatrix} 77 & 7 \\ 36 & 90 \end{pmatrix}.$$

Вычислим подматрицы $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ результирующей матрицы C, используя формулы:

$$C_{11} = P_5 + P_4 - P_2 + P_6;$$
$$C_{12} = P_1 + P_2;$$
$$C_{21} = P_3 + P_4;$$
$$C_{22} = P_5 + P_1 - P_3 - P_7.$$

В итоге получим искомую матрицу $C = A \cdot B$, составив ее из блоков $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 12 & 95 & 34 \\ 43 & 48 & 52 & 67 \\ 22 & 24 & 37 & 25 \\ 2 & 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

В программной реализации [1] данного метода используется рекурсия. Метод позволяет рекурсивно делить матрицу до того момента, пока её порядок не станет равным 2. Далее происходит обыкновенное умножение. Все подматрицы, в отличие от исходных матриц, хранятся в одномерном массиве, где определённый диапазон массива соответствует значениям подматриц, а позиция начала этого диапазона представима в виде номера подматрицы, умноженного на порядок входных матриц.

Публикация метода Штрассена инициировала активные поиски быстрых алгоритмов, и уже через несколько лет учёные заметно ускорили подсчёты. В 1990 г. американские учёные Дон Копперсмит и Шмуэль Виноград, развившие идеи Штрассена, добились оценки $O\left(N^{2,376}\right)$, после чего ускорение прекратилось. На протяжении двадцати лет алгоритм Копперсмита – Винограда оставался теоретически самым быстрым, однако в реальных вычислительных задачах не использовался, так как он эффективен только на чрезвычайно больших матрицах[2].

В 2011 г. Вирджиния Уильямс продолжила рассмотрение метода Копперсмита – Винограда и нашла более быстрый способ расчёта. Ей удалось добиться оценки $O\left(N^{2,3728642}\right)$ [3]. В 2014 г. Франсуа Ле Галль упростил метод Уильямс и получил новую улучшенную оценку $O\left(N^{2,3728639}\right)$. Но все перечисленные методы имеют чрезвычайно трудную реализацию в программировании, поэтому чаще всего вместо доработанных методов применятся алгоритм Штрассена.

Не смотря на рост мощностей вычислительной техники, метод Штрассена остаётся актуальным и сегодня, поскольку параллельно с усовершенствованием средств вычисления значительно возрастают размеры обрабатываемых данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кормен Т. Алгоритмы: построение и анализ, 3-е изд. : Пер. с англ. / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. — М.: ООО «И. Д. Вильямс», 2013. — 1328 с.

2. Найден максимально быстрый способ умножения матриц [Электронный ресурс]. Режимдоступа: http://www.nanonewsnet.ru/news/2012/naiden-maksimalno-bystryi-sposob-umnozheniya-matrits. Дата доступа: 23.04.2019.

3. Алгоритм Копперсмита – Винограда [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Алгоритм_Копперсмита – Винограда. Дата доступа: 22.04.2019.