

УДК 517.982.43, 515.127

Студ. И. В. Кебец, З. В. Рекунов
 Науч. рук. зав. кафедрой, доц. О. Н. Пыжкова
 (кафедра высшей математики, БГТУ)

МНОГООБРАЗИЕ ФРАКТАЛОВ: ИХ ПРИМЕНЕНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ

В каждом человеке заложена природная любознательность, стремление познавать окружающий его мир. И в этом стремлении человек старается придерживаться логики в суждениях. Анализируя процессы, происходящие вокруг него, он пытается найти логичность происходящего и вывести некоторую закономерность. Даже в хаосе ученые находят связь между событиями. И эта связь — фракталы.

Целью работы является знакомство с понятием фрактала, историей его возникновения, изучение практического применения фракталов в различных науках и их построение.

Фрактал (лат. fractus — дроблённый, сломанный, разбитый) — множество, обладающее свойством самоподобия (то есть целое имеет ту же форму, что и одна или более частей).

Первые примеры самоподобных множеств с необычными свойствами появились в XIX веке в результате изучения непрерывных недифференцируемых функций. Термин «фрактал» введён Бенуа Мандельбротом в 1975 году. Особую популярность фракталы обрели с развитием компьютерных технологий, позволивших эффектно визуализировать эти структуры. Самоподобные объекты с необычными с точки зрения классического анализа свойствами классифицируют по трём основным группам: 1) геометрические фракталы; 2) алгебраические фракталы; 3) стохастические фракталы.

Основными представителями первой группы фракталов являются такие объекты, как: пыль Кантора, снежинка Коха, треугольник Серпинского, губка Менгера (рисунок 1). Именно с них и начиналась история фракталов. Этот тип фракталов получается путем простых геометрических построений. Фракталы этого класса самые наглядные, потому что в них сразу видна самоподобность при любых масштабах наблюдения.

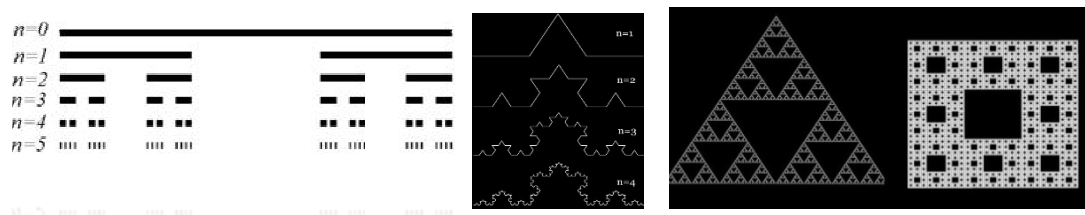


Рисунок 1 – Множество Кантора, кривая Коха, треугольник и ковер Серпинского

Кантор с помощью простой рекурсивной процедуры «превратил» линию в набор несвязных точек: брал линию и выносил её центральную треть на определенное расстояние, затем повторял эту процедуру с остальными отрезками. Множество Кантора — нигде не плотное несчётное множество.

Кривая Коха — не самопересекающаяся непрерывная кривая бесконечной длины, не имеющая касательной ни в одной точке. Она может быть использована для описания движения броуновских частиц.

Треугольник Серпинского («скатерть») и ковёр Серпинского — аналоги множества Кантора на плоскости. Этот фрактал описал в 1915 году польский математик Вацлав Серпинский. Чтобы его получить, нужно взять (равносторонний) треугольник с внутренностью, провести в нём средние линии и выкинуть центральный из четырех образовавшихся маленьких треугольников. Дальше эти же действия нужно повторить с каждым из оставшихся трех треугольников, и т. д.

Губка Менгера — аналог множества Кантора в трёхмерном пространстве

Примеры Вейерштрасса и Ван дер Вардена нигде не дифференцируемой непрерывной функции (рисунок 2).

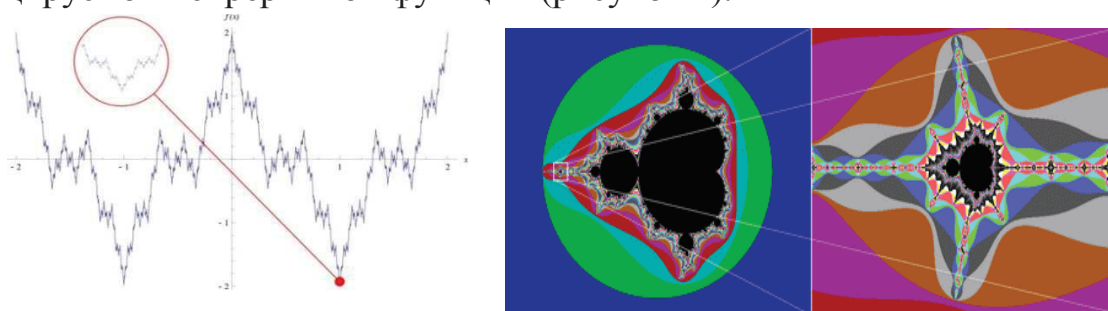


Рисунок 2 – Пример Вейерштрасса и Ван дер Вардена, множество Мандельброта визуальное построенное с применением ЭВМ

Алгебраические фракталы получили свое название за то, что их строят, используя простые алгебраические формулы с помощью нелинейных процессов в n -мерных пространствах. Примеры алгебраических фракталов: множество Мандельброта; множество Жюлиа; бассейны Ньютона; биоморфы (рисунок 2).

Множество Мандельброта впервые было построено (визуально с применением ЭВМ) Бенуа Мандельбротом весной 1980 г. в исследовательском центре фирмы IBM им. Томаса Дж. Уотсона. И хотя исследования подобных объектов начались ещё в прошлом веке, именно открытие этого множества и совершенствование аппаратных средств

машинной графики в решающей степени повлияли на развитие фрактальной геометрии и теории хаоса.

Черный цвет в середине показывает, что в этих точках функция стремится к нулю – это и есть множество Мандельброта. За пределами этого множества функция стремится к бесконечности. А самое интересное это границы множества. Они-то и являются фрактальными.

Многие объекты в природе обладают свойствами фрактала. Например, побережья, облака, кроны деревьев, снежинки, система кровообращения, альвеолы, суккуленты. Лучше всего фракталы можно разглядеть в сорте капусты под названием Романеско — гибриде цветной капусты и брокколи.

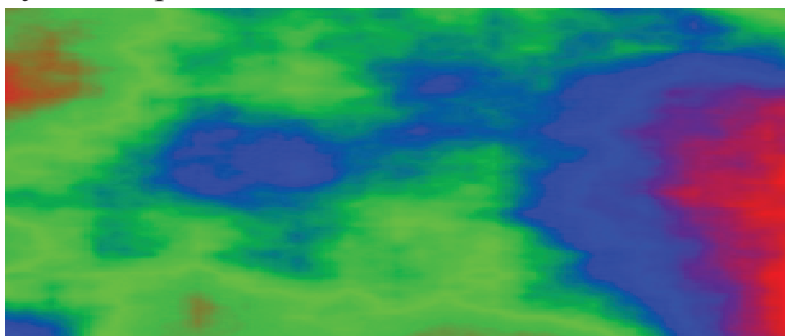


Рисунок 3 - Плазма

Типичный представитель третьего класса фракталов «Плазма» (рисунок 3). Для ее построения возьмем прямоугольник и для каждого его угла определим цвет. Далее находим центральную точку прямоугольника и раскрашиваем ее в цвет равный среднему арифметическому цветов по углам прямоугольника плюс некоторое случайное число. Чем больше случайное число, тем более «рваным» будет рисунок.

Для генерации фракталов существуют программы, например: FractalExplorer, UltraFRACTAL, ChaosPro и др., а также онлайн генераторы NadinDesign, Newart.ru и др. Фрактальное изображение строится на основе выбранной заготовки, определяемой системой параметрических уравнений, в которых параметры несложно изменить по своему желанию. Меняя функцию, условия выхода из цикла, можно получать разные фракталы. Один из способов получить фрактальный узор — воспользоваться онлайн-векторным редактором Тоби Ша мана. В основе инструментария этого графического редактора лежит все тот же принцип самоподобия.

Мы взяли четырехугольник и круг. Их можно добавлять на холст, масштабировать и вращать. Перекрываясь по принципу сложения, эти элементы образуют новые, менее тривиальные формы. Далее эти новые формы можно добавлять в проект, а программа будет по-

вторять генерирование этих изображений до бесконечности. Нам удалось получить следующие фракталы – рисунок 4.

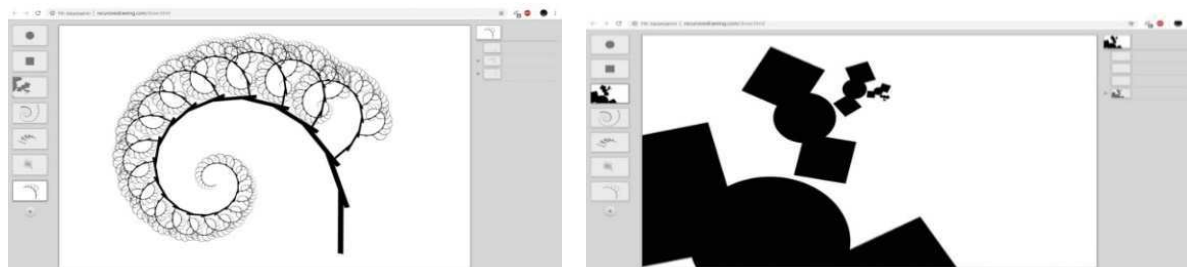


Рисунок 4 – Полученные фракталы

Существуют программы, которые озвучивают фрактальные множества, превращая их в электронную музыку.

Фракталы находят всё большее применение в науке. Наиболее полезным использованием фракталов в компьютерной науке является фрактальное сжатие данных, например, можно смоделировать языки пламени; пористые материалы хорошо представляются во фрактальной форме в связи с тем, что они имеют очень сложную геометрию. Земля – классический пример фрактального объекта.

В настоящее время фракталы стремительно вторгаются во многие области физики, биологии, медицины, социологии, экономики. Методы обработки изображений и распознавания образов, использующие новые понятия, дают возможность исследователям применить этот математический аппарат для количественного описания огромного количества природных объектов и структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Онлайнный векторный редактор Тоби Ша'мана. (<http://recursivedrawing.com/>)
2. А. А. Кириллов. Повесть о двух фракталах. — Летняя школа «Современная математика». — Дубна, 2007. (<https://www.litres.ru/aleksandr-aleksandrovich-kirillov/povest-o-dvuh-fraktalah-uchebnoe-posobie-11647920/>)
3. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. — М.: «Институт компьютерных исследований», 2002. (http://sernam.ru/book_fract.php)
4. Пайтген Х.- О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. — М.: «Мир», 1993. (<https://www.twirpx.com/file/222381/>)
5. Федер Е. Фракталы. — М.: «Мир», 1991. (<https://www.twirpx.com/file/18004/>)