УДК 519.624

И. Ф. Соловьева, кандидат физико-математических наук, доцент (БГТУ)

РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

В данной работе для решения двухточечных граничных задач с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом пограничными слоями предлагается модификация метода дифференциальной ортогональной прогонки. При этом используются регулирующие множители, нейтрализующие профили пограничных слоев вблизи граничных точек. Идея метода заключается в переходе от исходной граничной задачи к решению трех задач Коши. Для решения задач Коши в настоящее время существует много методов, дающих хорошие результаты. В данной статье предлагается численное решение трех задач с малым параметром при старшей производной, которое было получено при использовании пакета Mathcad. Решение каждой из предложенных задач представлено в виде графиков.

In the given work for the decision of point-to-point boundary problems with small parametre at the senior derivative and with interfaces arising thus updating of a method of differential orthogonal prorace is offered. Regulating multipliers, neutralised profiles of interfaces near to boundary points are thus used. The idea of a method consists in transition from an initial boundary problem to the decision of three problems of Koshi. For the decision of problems of Koshi now there are many methods yielding good results. In given article the numerical decision of three problems with small parametre is offered at the senior derivative which has been received at use of package Mathcad. The decision of each of the offered problems is presented in the form of schedules.

Введение. В настоящее время миллионы людей занимаются математическими расчетами, одни – из-за влечения к таинствам математики и ее внутренней красоте, другие – в силу профессиональной или иной необходимости. Ни одна серьезная разработка в любой отрасли науки и производства не обходится без трудоемких математических расчетов.

К задачам, требующим таких трудоемких расчетов, можно отнести двухточечные граничные задачи с малым параметром, стоящим при старшей производной. При этом в задачах такого рода возникают пограничные или переходные слои.

Задачи с пограничными слоями очень сложны в вычислительном отношении, а так как область их применения постоянно расширяется, то интерес к их решению неуклонно возрастает. Необходимо не только применить численный метод решения задачи, но и реализовать выбранный алгоритм, используя тот или иной математический пакет. Большие сложности при решении данных задач возникают вблизи граничных точек, т. е. в зонах пограничных слоев, где наблюдается неограниченный рост решения, и особенно градиентов решения.

В настоящее время разработано достаточно много систем компьютерной математики. Выбор системы зависит от поставленной задачи. В предлагаемой работе применялся математический пакет Mathcad.

Данный пакет используется в работе инженеров. Он создавался как мощный микрокалькулятор, позволяющий легко справиться с рутинными задачами инженерной практики, которые ежедневно встречаются в работе: решение алгебраических или дифференциальных уравнений с постоянными и переменными параметрами, анализ функций, поиск их экстремумов, численное и аналитическое дифференцирование и интегрирование, вывод таблиц и графиков при анализе найденных решений.

Главными достоинствами пакета Mathcad и его колоссальным преимуществом перед другими расчетными средствами является легкость и наглядность программирования задачи, простота использования, возможность создания высококачественных технических отчетов с таблицами, графиков и текстов, что весьма важно в работе инженера. Эта система выполняет как численные, так и аналитические (символьные) вычисления, имеет удобный математико-ориентированный интерфейс и прекрасные средства графики [1].

Постановка задачи. Рассмотрим двухточечные граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной вида

$$\begin{cases} \varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) - b(x)y(x) = f(x), \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad 0 < x < 1; \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} -\varepsilon y''(x) + b(x)y(x) = f(x), \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad 0 < x < 1, \quad \varepsilon > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Поскольку задача (1) имеет слагаемое, содержащее первую производную, то она является задачей с одним пограничным слоем, а задача (2) – задачей с двумя пограничными слоями, так как в ней первая производная отсутствует.

Задачи вида (1), (2) являются математическими моделями диффузионно-конвективных процессов. Диффузионным членом является член, включающий производную второго порядка, а конвективный член включает производную первого порядка. Задачи та-кого вида называются сингулярно возмущенными. Их решение может быстро изменяться вблизи граничных точек, т. е. мы имеем пограничный слой. Причина трудностей решения задач с пограничным слоем заключается в неустойчивости данного численного процесса.

Для численного решения граничных задач с пограничным слоем вида (1), (2) предлагается метод дифференциальной ортогональной прогонки [2]. Он позволяет применить единый подход к решению граничных задач с одним и двумя пограничными слоями.

Алгоритм метода дифференциальной ортогональной прогонки.

1. Рассмотрим граничную задачу вида (2). Представим ее в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (о. д. у.) первого порядка

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\dfrac{f(x)}{\varepsilon} + \dfrac{b(x)}{\varepsilon} y_1, \quad 0 < x < 1, \quad \varepsilon > 0 \end{cases} \tag{3}$$

и граничными условиями вида

$$y_1(0) = A, \quad y_2(0) = B. \tag{4}$$

2. Введем в полученную систему о. д. у. (3) множители $m_2(x,\varepsilon) > 0$, $m_1(x,\varepsilon) > 0$, регулирующие поведение функций $y(x)$ и $y'(x)$, т. е. самого решения и градиента решения вблизи пограничных слоев, где, как правило, решение и его градиент быстро растут. При выборе этих множителей нужно учитывать, чтобы произведения $m_1(x,\varepsilon)y_1(x)$, $m_2(x,\varepsilon)y_2(x)$ были в необходимой мере стабилизированы.

3. Рассмотрим вспомогательную функцию $Q(x)$ и новые неизвестные функции $u(x)$ и $v(x)$. Получим выражение для $y(x)$ и $y'(x)$:

$$\begin{aligned} m_1(x,\varepsilon)y_1(x) &= \sin Q(x)u(x) + \cos Q(x)v(x), \\ m_2(x,\varepsilon)y_2(x) &= \cos Q(x)u(x) - \sin Q(x)v(x). \end{aligned} \tag{5}$$

4. Исходную граничную задачу представим в виде совокупности трех соответствующих задач Коши для функций $Q(x)$, $u(x)$, $v(x)$, причем для функций $Q(x)$ и $u(x)$ применим прямой ход прогонки, а для $v(x)$ – обратный:

$$\begin{aligned} Q' &= \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2'}{2m_2}\sin 2Q - \left(\frac{m_2}{m_1}\frac{b}{\varepsilon} + \frac{m_1}{m_2}\right)\cos^2 Q; \\ Q(0) &= \frac{\pi}{2}; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1}\frac{b}{\varepsilon}\right)\sin 2Q + \frac{m_2'}{m_2}\cos^2 Q\right]u - \\ &- m_2\frac{f}{\varepsilon}\cos Q; \\ u(0) &= Am_1(0,\varepsilon); \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} v' &= \left[-\frac{m_2'}{m_2}\sin 2Q + \frac{m_2}{m_1}\frac{b}{\varepsilon}\cos 2Q + 2\frac{m_1}{m_2}\cos^2 Q - \right. \\ &\left. -\frac{m_1}{m_2}\right]u + \left[\frac{m_2'}{m_2}\sin^2 Q - \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1}\frac{b}{\varepsilon}\right)\sin 2Q\right]v + \\ &+ m_2\frac{f}{\varepsilon}\sin Q; \end{aligned} \tag{8}$$

$$v(1) = \frac{1}{\cos Q(1)}\left[B - \sin Q(1)\right]u(1), \quad \cos Q(1) = 0.$$

Полученные задачи Коши являются благоприятными в вычислительном отношении. При этом каждая задача Коши вида (6)–(8) решается по формулам известных численных методов, например Рунге – Кутта, а также В-устойчивых и Д-устойчивых методов [3].

Для метода дифференциальной ортогональной прогонки имеет место тождество:

$$\begin{aligned} & u^2(x) + v^2(x) \equiv \\ & \equiv (m_1(x,\varepsilon)y_1(x))^2 + (m_2(x,\varepsilon)y_2(x))^2, \end{aligned} \tag{9}$$

показывающее, что порядок роста функций $u(x)$ и $v(x)$ одинаков с порядком роста $m_1(x,\varepsilon)y_1(x)$, $m_2(x,\varepsilon)y_2(x)$.

Рассмотрим примеры решения граничных задач с пограничным слоем. Для каждой задачи решение представлено в виде графика. На графиках решение задачи, полученное по методу дифференциальной ортогональной прогонки, отмечено квадратиками. Оно сравнивается с уже существующими решениями данных примеров, отмеченных сплошными линиями.

Пример 1. Рассмотрим граничную задачу с одним пограничным слоем. Решение этой задачи реализовано с помощью пакета Mathcad и представлено в виде графика функции (рис. 1):

$$\begin{aligned} & \varepsilon y''(x) + xy'(x) - y(x) = \\ & = -(1+\varepsilon\pi^2)\cos\pi x - \pi x\sin\pi x \end{aligned} \tag{10}$$

с граничными условиями

$$y(-1) = -1, \quad y(1) = 1. \qquad (11)$$

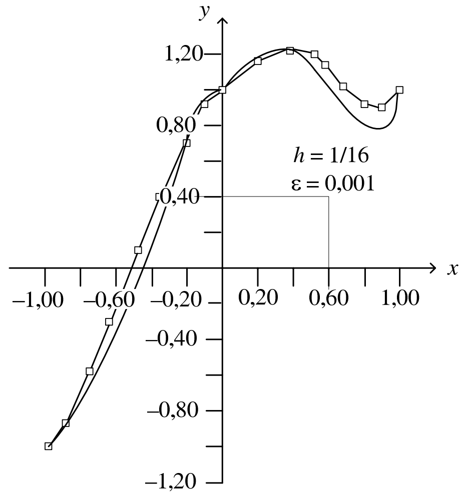

Рис. 1

Пример 2. Рассмотрим граничную задачу с двумя пограничными слоями. Ее решение представлено в виде графика функции (рис. 2):

$$-\varepsilon y''(x) + (1+x)^2 y(x) =$$
$$= 4\,(3x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 1);\ x \in (0,\ 1) \qquad (12)$$

с граничными условиями вида

$$y(0) = -1, \quad y(1) = 0. \qquad (13)$$

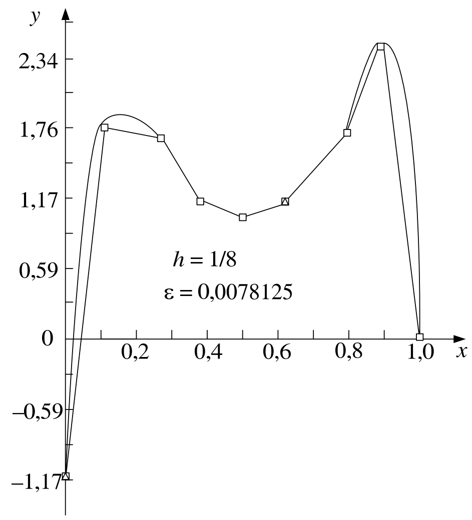

Рис. 2

Пример 3. Рассмотрим задачу с одним пограничным слоем. Решение этой задачи представлено в виде графика функции (рис. 3):

$$\varepsilon y''(x) + (1+x^2)y'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 y(x) =$$
$$= -\,(e^x + x^2);\ x \in (0,\ 1) \qquad (14)$$

с граничными условиями вида

$$y(0) = -1, \quad y(1) = 0. \qquad (15)$$

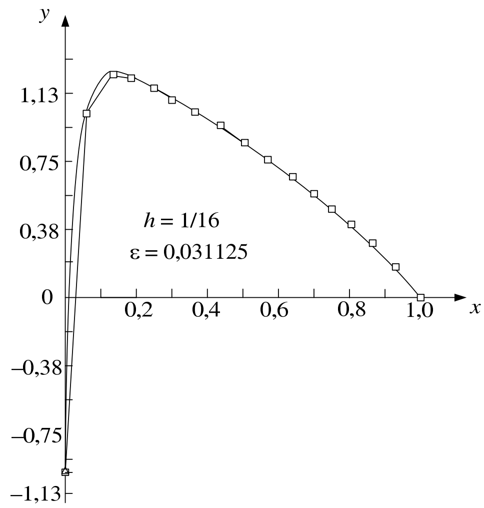

Рис. 3

Заключение. Предложенная модификация метода дифференциальной ортогональной прогонки удобна в реализации и достаточно перспективна для решения граничных задач с одним и двумя пограничными слоями. Данный метод позволяет избежать решения громоздких систем уравнений. Благоприятен также переход от исходной граничной задачи к совокупности задач Коши. Полученные при этом задачи Коши решаются с помощью известного в математике метода Рунге – Кутта четвертого порядка точности. Метод дифференциальной ортогональной прогонки реализован при помощи математического пакета Mathcad.

Литература

1. Макаров, Е. Г. Mathcad. Учебный курс / Е. Г. Макаров. – СПб.: Питер, 2009. – 384 с.

2. Соловьева, И. Ф. Решение систем линейных о. д. у. второго порядка с различными расположениями пограничных слоев / И. Ф. Соловьева // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. – 1999. – Вып. VII. – С. 24–29.

3. Деккер, К. Устойчивость методов Рунге – Кутта для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер; пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 200 с.

Поступила 28.02.2012