УДК 519.71

**Т. А. Любецкая**, ассистент (БГТУ)

# ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

Для линейных дискретно-непрерывных систем вводятся двойственные системы и доказывается двойственное соотношение, что позволяет получить аналитическое представление решений таких систем, аналогичное формуле Коши для решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Найденные представления имеют важные приложения в качественной теории управления в гибридных дифференциально-разностных системах, в частности при исследовании вопросов управляемости в таких системах.

In the paper we study linear hybrid discrete-continuous systems. Dual discrete-continuous systems are introduced and a dual correlation is proved. As a result, for the system solutions, we obtain an analytical representation similar to the well-known for ordinary differential systems Cauchy's formula. The results obtained can be used in the qualitative control theory for discrete-continuous systems.

**Введение.** Во многих приложениях предполагается, что рассматриваемая система подчиняется закону причинности, т. е. будущее состояние системы не зависит от прошлых состояний и определяется только настоящим. Если к тому же предполагается, что система подчиняется уравнению, содержащему переменные состояния и скорости их изменения, то, как правило, мы приходим либо к обыкновенным дифференциальным уравнениям, либо к уравнениям в частных производных.

Однако при более тщательном изучении часто становится очевидным, что закон причинности – это лишь первое приближение к реальной ситуации, и более адекватная модель должна включать некоторые из предшествующих состояний системы. Кроме того, многие задачи теряют смысл, если не рассматривается зависимость от прошлого. Поэтому, в частности, при изучении реальных физических процессов приходим к так называемым гибридным системам.

В зарубежной литературе термином «гибридные системы» (hybrid systems) определяют дискретно-дифференциальные системы управления, содержащие непрерывную и дискретную фазовые переменные и/или логическую переменную [1, 2]. Такие системы стали востребованными ввиду того, что огромное число реальных процессов в химической промышленности, робототехнике и электронной инженерии, в системах управления полетом и других отраслях человеческой деятельности моделируются сложными системами, обладающими иерархической структурой, описываемыми непрерывно изменяющейся динамикой на низшем уровне и созданием логического выбора – на высшем [3].

Исследование существования и единственности представления решений, а также некоторых задач управляемости для различных классов сложных динамических систем проведено в работах [4–10].

В настоящей статье рассматривается вопрос о представлении решений гибридной дифференциально-непрерывной системы с запаздывающим аргументом на основе решений соответствующих двойственных (сопряженных) систем, что по аналогии с известными представлениями [4–10] решений для других классов систем можно считать формулами типа Коши для дискретно-непрерывных систем.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим гибридную дискретно-непрерывную систему вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}(t)x_1(t) + A_{12}(t)x_2(t_0+kh) + \\ + B_1(t)u(t), t \in [t_0+kh,\ t_0+(k+1)h), \\ x_2(t_0+kh+h) = A_{21}(k)x_1(t_0+kh) + \\ + A_{22}(k)x_2(t_0+kh) + B_2(k)u(t_0+kh), \end{cases} \tag{1}$$

где

$$A_{11}(t) \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1},\ A_{12}(t) \in \mathbb{R}^{n_1\times n_2},\ B_1(t) \in \mathbb{R}^{r\times n_1},$$

$$A_{21}(k) \in \mathbb{R}^{n_2\times n_1},\ A_{22}(k) \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2},\ B_2(k) \in \mathbb{R}^{r\times n_2},$$

$$t \in [t_0,\ t_*],\ k = 0, 1, \ldots, T_{t_*}, T_{t_*} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{t_* - t_0 - \varepsilon}{h}\right],$$

элементы матриц $A_{11}(\cdot), A_{12}(\cdot), B_1(\cdot)$ являются кусочно-непрерывными функциями; вектор-функция $x_1(t) = x_1(t, x_{10}, x_{20})$ предполагается непрерывной и кусочно-дифференцируемой на $[t_0, t_*]$.

Начальные условия для системы (1) зададим в виде

$$x_1(t_0) = x_{10},\ x_2(t_0) = x_{20}. \tag{2}$$

Наряду с системой (1), (2) рассмотрим двойственную систему следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1^*(t) = -A_{11}^{'}(t)x_1^*(t), \\ x_1^*(t_0+kh-0) - x_1^*(t_0+kh+0) = \\ = A_{21}^{'}(k)x_2^*(t_0+kh+h), \\ x_2^*(t_0+kh) = A_{22}^{'}(k)x_2^*(t_0+kh+h) + \\ + \int\limits_{t_0+kh}^{t_0+kh+h} A_{12}^{'}(t)x_1^*(t)dt, \\ x_1^*(t) \equiv 0, t \geq t_*, \end{cases} \quad (3)$$

где $x_1^*(t)$, $x_2^*(t_0+kh)$ – матричные функции со значениями в пространствах $\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}$ соответственно, $k = 0, 1, ..., T_{t*}$, $t \in [t_0, t_*]$, с начальными условиями вида

$$x_1^*(t_* - 0) = x_{10}^*, \; x_2^*(t_* + T_{t*}h + h) = x_{20}^*. \quad (4)$$

**2. Вспомогательные результаты.**

***Утверждение.*** (Двойственное соотношение). Справедливо следующее двойственное соотношение:

$$x_1^{*'}(t_*-0)x_1(t_*) + x_2^{*'}(t_0+T_{t*}h+h)x_2(t_0+T_{t*}h+h) =$$
$$= x_1^{*'}(t_0-0)x_{10} + x_2^{*'}(t_0)x_{20} + \int\limits_{t_0}^{t_*} x_1^{*'}(t)B_1(t)u(t)dt +$$
$$+ \sum_{k=0}^{T_{t*}} x_2^{*'}(t_0+kh+h)B_2(k)u(t_0+kh). \quad (5)$$

*Доказательство.* Умножим первое уравнение системы (1) слева на кусочно-непрерывную матричную функцию $x_1^{*T}(t)$ с точками разрыва первого рода лишь в моменты $\tau = t_0 + kh$, $k = 0, 1, ..., T_{t_*}$, и проинтегрируем по $\tau$ от 0 до $t_*$:

$$0 = \int\limits_{t_0}^{t_*} x_1^{*'}(\tau)\cdot\dot{x}_1(\tau)d\tau - \int\limits_{t_0}^{t_*} x_1^{*'}(\tau)\cdot A_{11}(\tau)x_1(\tau)d\tau -$$
$$- \sum_{k=0}^{T_{t*}-1}\int\limits_{t_0+kh}^{t_0+kh+h} x_1^{*'}(\tau)\cdot A_{12}(\tau)d\tau\cdot x_2(t_0+kh) -$$
$$- \int\limits_{t_0+T_{t*}h}^{t_*} x_1^{*'}(\tau)\cdot A_{12}(\tau)d\tau\cdot x_2(t_0+kh) -$$
$$- \int\limits_{t_0}^{t_*} x_1^{*'}(\tau)\cdot B_1(\tau)u(\tau)d\tau. \quad (6)$$

Поскольку матрица-функция $x_1^{*T}(t)$ имеет разве лишь разрывы первого рода в точках $\tau = t_0 + kh, k = 0, 1, ..., T_{t_*}$, то интегрируя по частям первый интеграл равенства на каждом интервале $(t_0+kh, t_0+kh+h)$ и используя свойство аддитивности интеграла, получаем:

$$\int\limits_{t_0}^{t_*} x_1^{*'}(\tau)\cdot\dot{x}_1(\tau)d\tau = \sum_{k=0}^{T_{t*}-1}\int\limits_{t_0+kh}^{t_0+kh+h} x_1^{*'}(\tau)\cdot\dot{x}_1(\tau)d\tau +$$
$$+ \int\limits_{t_0+T_{t*}}^{t_*} x_1^{*'}(\tau)\cdot\dot{x}_1(\tau)d\tau =$$
$$= \sum_{k=0}^{T_{t*}-1}\Big(x_1^{*'}(t_0+kh+h-0)x_1(t_0+kh+h) -$$
$$- x_1^{*'}(t_0+kh+0)x_1(t_0+kh)\Big) + x_1^{*'}(t_*-0)x_1(t_*) -$$
$$- x_1^{*'}(t_0+T_{t*}h+0)x_1(t_0+T_{t*}h) - \int\limits_{t_0}^{t_*}\dot{x}_1^{*'}(\tau)\cdot x_1(\tau)d\tau =$$
$$= \sum_{k=0}^{T_{t*}}\Big(x_1^{*'}(t_0+kh-0) - x_1^{*'}(t_0+kh+0)\Big)x_1(t_0+kh) +$$
$$+ x_1^{*'}(t_*-0)x_1(t_*) - x_1^{*'}(t_0-0)x_{10} - \int\limits_{t_0}^{t_*}\dot{x}_1^{*'}(\tau)\cdot x_1(\tau)d\tau.$$

Аналогично поступаем со вторым уравнением системы (1): умножаем его слева на дискретную матричную функцию $k = -1, 0, 1, ..., T_{t*}$, $x_2^{*T}(t_0+kh+h)$, и суммируем по $k$ от 0 до $T_{t*}$:

$$0 = \sum_{k=0}^{T_{t*}} x_2^{*'}(t_0+kh+h)\Big(x_2(t_0+kh+h) -$$
$$- A_{21}(k)x_1(t_0+kh) - A_{22}(k)x_2(t_0+kh) -$$
$$- B_2(k)u(t_0+kh)\Big). \quad (7)$$

Преобразуем первое слагаемое этой суммы:

$$\sum_{k=0}^{T_{t*}} x_2^{*'}(t_0+kh+h)x_2(t_0+kh+h) =$$
$$= \sum_{k=0}^{T_{t*}} x_2^{*'}(t_0+kh)x_2(t_0+kh) +$$
$$+ x_2^{*'}(t_0+T_{t*}h+h)x_2(t_0+T_{t*}h+h) - x_2^{*'}(t_0)x_{20}.$$

Суммируя (6) и (7) и учитывая вид сопряженной системы (3), (4), имеем:

$$0 = -\left(\int\limits_{t_0}^{t_*}\dot{x}_1^{*'}(\tau) + x_1^{*'}(\tau)A_{11}(\tau)\right)\cdot x_1(\tau)d\tau +$$
$$+ \sum_{k=0}^{T_{t*}}\Big(x_1^{*'}(t_0+kh-0) - x_1^{*'}(t_0+kh+0) -$$
$$- x_2^{*'}(t_0+kh+h)A_{21}(k)\Big)x_1(t_0+kh) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{T_{t*}}\Bigg(x_2^{*'}(t_0+kh) - x_2^{*'}(t_0+kh+h)A_{22}(k) -$$
$$- \int\limits_{t_0+kh}^{t_0+kh+h} x_1^{*'}(\tau)A_{12}(\tau)d\tau\Bigg)x_2(t_0+kh) +$$

$$+\int_{t_*}^{t_0+T_{t_*}h+h} x_1^{*'}(\tau)A_{12}(\tau)d\tau\cdot x_2(t_0+T_{t_*}h)-$$

$$-\int_{t_0}^{t_*} x_1^{*'}(\tau)\cdot B_1(\tau)u(\tau)d\tau-$$

$$-\sum_{k=0}^{T_{t_*}} x_2^{*'}(t_0+kh+h)\cdot B_2(k)u(t_0+kh)+$$

$$+x_2^{*'}(t_0+T_{t_*}h+h)x_2(t_0+T_{t_*}h+h)-$$

$$-x_2^{*'}(t_0)x_{20}+x_1^{*'}(t_*-0)x_1(t_*)-x_1^{*'}(t_0-0)x_{10}=$$

$$=-\int_{t_0}^{t_*} x_1^{*'}(\tau)\cdot B_1(\tau)u(\tau)d\tau-$$

$$-\sum_{k=0}^{T_{t_*}} x_2^{*'}(t_0+kh+h)\cdot B_2(k)u(t_0+kh)+$$

$$+x_2^{*'}(t_0+T_{t_*}h+h)x_2(t_0+T_{t_*}h+h)-$$

$$-x_2^{*'}(t_0)x_{20}+x_1^{*'}(t_*-0)x_1(t_*)-x_1^{*'}(t_0-0)x_{10},$$

что завершает доказательство утверждения.

**3. Представление решений.** Пусть матрицы функции $x_1^*(t)$, $x_2^*(t_0+kh)$ – решения сопряженной системы (3), (4).

Обозначим символом $I_k$ единичную $k\times k$-матрицу.

Имеет место следующий аналог формулы Коши для представления решений динамической дискретно-непрерывной системы (1), (2).

*Теорема.* Решение системы (1) с начальными условиями (2) существует единственно и может быть представлено по формуле:

1)

$$x_1(t_*-0)=x_1^{*'}(t_0-0)x_{10}+x_2^{*'}(t_0)x_{20}+$$

$$+\int_{t_0}^{t_*} x_1^{*'}(\tau)\cdot B_1(\tau)u(\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{k=0}^{T_{t_*}} x_2^{*'}(t_0+kh+h)\cdot B_2(k)u(t_0+kh), \qquad (8)$$

если

$$x_1^*(t_*-0)=I_{n_1};$$

$$x_2^*(t_0+T_{t_*}h+h)\equiv 0\in\mathbb{R}^{n_2};$$

2)

$$x_2(t_0+T_{t_*}h+h)=x_1^{*'}(t_0-0)x_{10}+$$

$$+x_2^{*'}(t_0)x_{20}+\int_{t_0}^{t_*} x_1^{*'}(\tau)\cdot B_1(\tau)u(\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{k=0}^{T_{t_*}} x_2^{*'}(t_0+kh+h)\cdot B_2(k)u(t_0+kh), \qquad (9)$$

если

$$x_2^*(t_0+T_{t_*}h+h)=I_{n_2};$$

$$x_1^*(t_*-0)\equiv 0\in\mathbb{R}^{n_1}.$$

*Доказательство.* Из системы (3) с начальными условиями

$$x_1^*(t_*-0)=I_{n_1};$$

$$x_2^*(t_0+T_{t_*}h+h)\equiv 0\in\mathbb{R}^{n_2},$$

с учетом двойственного соотношения (5), получаем представление решения (8) для кусочно-непрерывной функции $x_1^*(t_*)$.

Если же для системы (3) выбрать начальные условия

$$x_2^*(t_0+T_{t_*}h+h)=I_{n_2};$$

$$x_1^*(t_*-0)\equiv 0\in\mathbb{R}^{n_1},$$

с учетом двойственного соотношения (5), получаем представление решения (9) для дискретной функции $x_2^*(t_0+T_{t_*}h+h)$.

В единственности решения можно убедиться, интегрируя исходную систему (1), (2) по «шагам».

**Заключение.** Таким образом, в работе доказано двойственное соотношение для гибридных дифференциально-непрерывных динамических систем с запаздыванием, установлен аналог формулы Коши для представления решений таких систем. Полученные результаты можно использовать для получения неявных критериев управляемости и наблюдаемости дискретно-непрерывных систем.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В. М. Марченко за научное руководство данной работы.

**Литература**

1. Van der Schaft, A. An introduction to hybrid dynamical systems / A. Van der Schaft, H. Schumacher. – Berlin: Springer, 2000. – P. 324.

2. Antsaklis, P. Hybrid Systems Modeling and Autonomous Control Systems / P. Antsaklis, J. Stiver, M. Lemmon // Lecture Notes in Computer Science, London: Springer-Verlag. – 1993. – Vol. 736. – P. 366–392.

3. Марченко, В. М. Гибридные дифференциально-разностные системы и их приложения в теории динамических систем / В. М. Марченко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. – 2009. – Вып. XVII. – С. 3–7.

4. Марченко, В. М. Представление решений управляемых гибридных систем /

В. М. Марченко, О. Н. Поддубная // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 6. – С. 17–25.

5. Марченко, В. М. Представление решений и относительная управляемость линейных дифференциально-алгебраических систем со многими запаздываниями / В. М. Марченко, О. Н. Поддубная // Доклады РАН. – 2005. – Т. 404, № 4. – С. 465–469.

6. Марченко, В. М. Линейные стационарные дифференциально-алгебраические системы. Представление решений / В. М. Марченко, О. Н. Поддубная // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2006. – № 5. – С. 24–38.

7. Беллман, Р Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Л. Кук. – М.: Мир, 1967. – 548 с.

8. Гайшун, И. В. Многопараметрические системы управления / И. В. Гайшун. – Минск: Навука і тэхніка, 1996. – 200 с.

9. Bartosievicz, Z. Linear control systems on time scal: unification of continuous and descrete / Z. Bartosievicz, E. Pawiuszewicz // 10th IEEE Intern. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics. – Poland, 2004. – P. 263–266.

10. Хейл, Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

*Поступила 12.03.2012*