

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**О. Г. Бобрович, В. В. Тульев**

# **ФИЗИКА**

**В 5-ти частях**

**Часть 3**

## **МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ**

**Тексты лекций  
по дисциплине «Физика»  
для студентов специальности 1-48 01 02  
«Химическая технология органических веществ,  
материалов и изделий»**

Минск 2013

УДК [537.2+537.3](075.8)  
ББК 22.33я73  
Б72

Рассмотрены и рекомендованы редакционно-издательским советом университета

**Р е ц е н з е н т ы :**

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой экспериментальной физики БГПУ им. Максима Танка  
*И. С. Тапшыков;*

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики БНТУ *А. В. Чигарев*

**Бобрович, О. Г.**

Б72 Физика. В 5 ч. Ч. 3. Магнитное поле. Электромагнитные волны : тексты лекций по дисциплине «Физика» для студентов специальности 1-48 01 02 «Химическая технология органических веществ, материалов и изделий» / О. Г. Бобрович, В. В. Тульев. – Минск : БГТУ, 2013. – 84 с.

В пособии кратко изложен материал лекций по разделам «Магнитное поле», «Электромагнитное поле» и «Электромагнитные волны» для студентов дневной формы обучения специальности 1-48 01 02 «Химическая технология органических веществ, материалов и изделий».

УДК [537.2+537.3](075.8)  
ББК 22.33я73

© УО «Белорусский государственный технологический университет», 2013  
© Бобрович О. Г., Тульев В. В., 2013

# Тема 1. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

## Лекция № 1

1.1. Магнитное поле. Взаимодействие токов. Вектор магнитной индукции.

1.2. Закон Био – Савара – Лапласа.

1.3. Расчет магнитных полей прямого проводника с током бесконечной и конечной длины.

### ***1.1. Магнитное поле. Взаимодействие токов. Вектор магнитной индукции.***

В пространстве, которое окружает электрические токи или постоянные магниты, возникает поле, называемое **магнитным**. На контур с током или магнитную стрелку, помещенные в магнитное поле, последнее оказывает ориентирующее действие. Все постоянные магниты обладают полюсами, которые носят название северный и южный. Одноименные полюсы взаимно отталкиваются, а разноименные – притягиваются.

Силовой характеристикой магнитного поля является **вектор магнитной индукции** (или иначе **вектор индукции магнитного поля**)  $\vec{B}$ . Определение и физический смысл вектора магнитной индукции будут рассмотрены ниже.

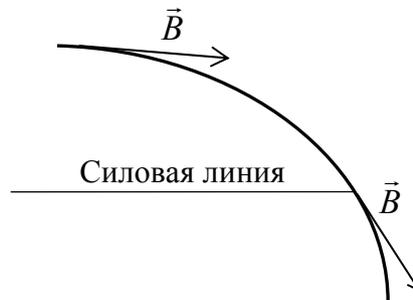


Рис. 1.1.1

Графически (рис. 1.1.1) магнитное поле изображают с помощью **линий магнитной индукции (силовых линий)** – линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора магнитной индукции. Линии магнитной индукции всегда замкнуты, выходят из северного полюса и входят в южный полюс и охватывают проводники с током. Густота линий магнитной индукции пропорциональна величине индукции магнитного поля.

В качестве примера рассмотрим силовые линии прямого и кругового проводников с токами. В случае прямого тока линии индукции (рис. 1.1.2, *а*) представляют собой концентрические окружности (с центрами на оси проводника), которые расположены в плоскостях, перпендикулярных току. При этом направление линий индукции удобно определять по **правилу буравчика** (или **правилу правого винта**) в основной формулировке: *если направление поступательного движения оси буравчика сопоставить с направлением прямого тока, то направление вращения его рукоятки укажет направление линий магнитной индукции*.

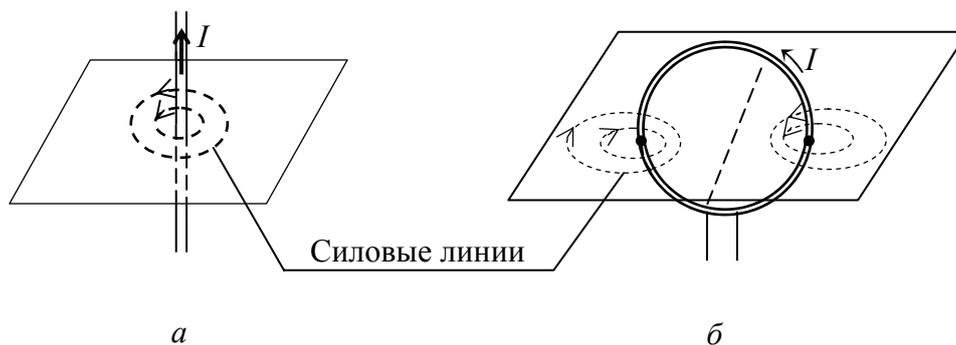


Рис. 1.1.2

Силовые линии индукции кругового тока изображены на рис. 1.1.2, *б*, причем направление силовых линий также определяется по правилу буравчика.

Линии индукции **соленоида**, который представляет собой систему одинаковых круговых токов, схематично изображены на рис. 1.1.3, *а*. Внутри соленоида, длина которого намного больше диаметра его витков, магнитное поле является однородным, а прямые линии магнитной индукции направлены так, чтобы выполнялось **правило буравчика** (неосновная формулировка): *если рукоятку буравчика вращать по направлению тока в витках, то силовые линии будут направлены по движению оси буравчика*. Все линии индукции на рисунке или замкнуты, или имеют тенденцию замкнуться, если их продлить. Линии индукции соленоида очень схожи с линиями прямого (полосового) магнита (рис. 1.1.3, *б*), которые выходят из северного полюса *N* и входят в южный полюс *S*. Кажется, что они разорваны в объеме магнита. Однако опыты и теоретические расчеты показали, что линии индукции и в этом случае замкнуты внутри магнита. В связи с тем, что магнитные поля соленоида и полосового постоянного магнита схожи друг с другом,

торцам соленоида часто приписывают полярность. Французский физик А. Амперу высказал гипотезу о том, что магнитные свойства постоянных магнитов обусловлены существующими в них микротоками. К настоящему времени эта гипотеза полностью обоснована и лежит в основе современных представлений о магнитных свойствах вещества.

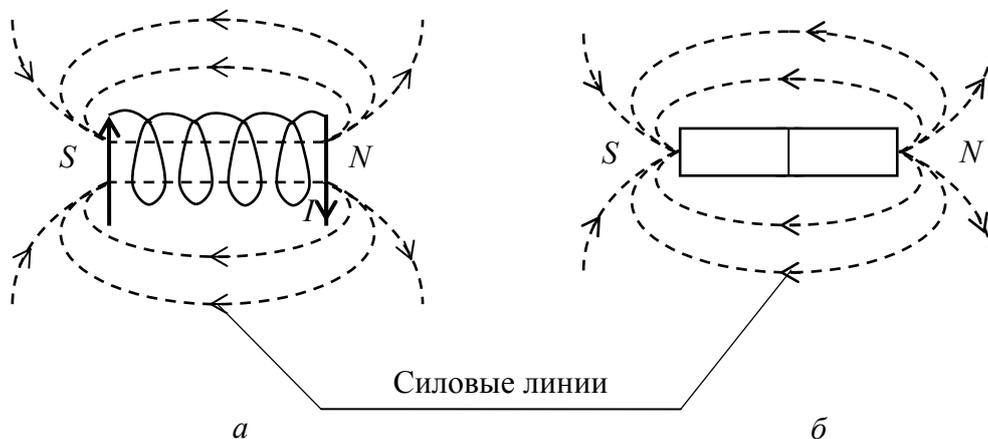


Рис. 1.1.3

На рис. 1.1.4 приведены примеры использования правила правого винта в основной формулировке для определения направления вектора магнитного поля  $\vec{B}$ , создаваемого токами  $I_1$  и  $I_2$ . На рисунке ток силой  $I_1$  ( $\odot$ ) – «ток к нам», а ток силой  $I_2$  ( $\oplus$ ) – «ток от нас».

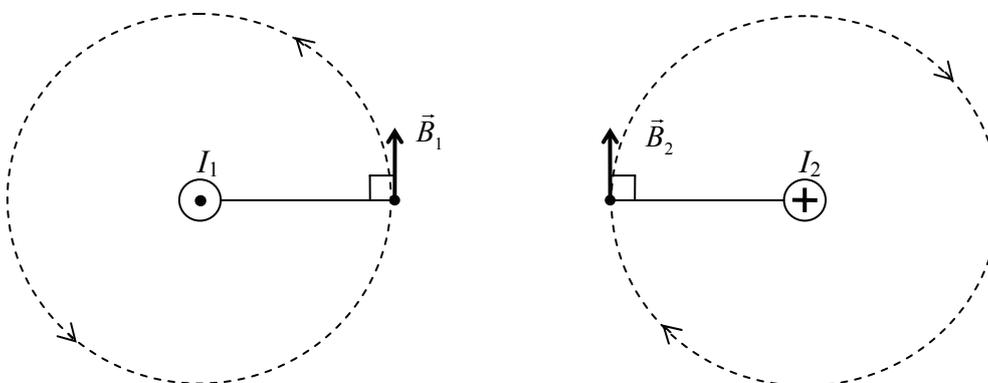


Рис. 1.1.4

Поскольку магнитное поле действует на проводник с током, то, например, два параллельных гибких проводника с токами одинакового направления притягиваются, выгибаясь, как показано на рис. 1.1.5 штриховыми линиями. Противоположно направленные токи отталкиваются.

Вектор магнитной индукции характеризует результирующее магнитное поле, создаваемое всеми макро- и микротоками. **Макроско-**

**микропические токи** – это электрические токи, протекающие по проводникам в электрических цепях, а **микроскопические токи** – токи, обусловленные движением электронов в атомах и молекулах.

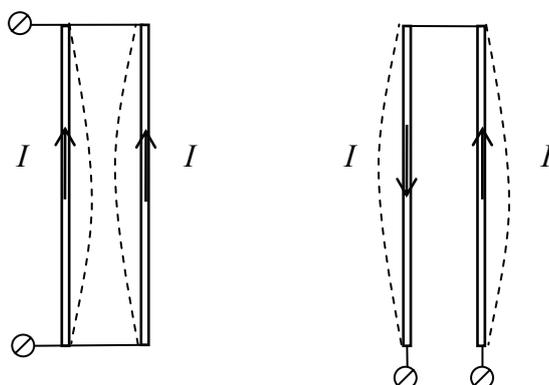


Рис. 1.1.5

Например, если вблизи какого-то тела поместить проводник с током (макроток), то под действием его магнитного поля микротоки во всех атомах определенным образом ориентируются, создавая в теле дополнительное магнитное поле. Магнитное поле макротока описывается **вектором напряженности магнитного поля  $\vec{H}$** . Для однородной изотропной среды вектор магнитной индукции связан с вектором напряженности магнитного поля соотношением

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \tag{1.1.1}$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная,  $\mu$  – магнитная проницаемость среды (безразмерная величина, показывающая, во сколько раз магнитное поле макротоков усиливается за счет поля микротоков среды). Единица магнитной индукции в СИ  $[B] = 1$  Тл, а единица напряженности магнитного поля  $[H] = 1$  А/м.

Для магнитного поля справедлив принцип **суперпозиции** магнитных полей: *магнитная индукция результирующего магнитного поля в некоторой точке, создаваемого несколькими токами или движущимися зарядами, равна векторной сумме магнитных индукций полей, создаваемых каждым током или движущимися зарядами в данной точке.*

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i. \tag{1.1.2}$$

Аналогично можно сформулировать принцип суперпозиции для напряженности магнитного поля.

### 1.2. Закон Био – Савара – Лапласа.

Согласно закону Био – Савара – Лапласа элемент проводника  $dl$  с током  $I$  создает в некоторой точке  $A$  индукцию поля, равную:

$$d\vec{B} = \mu\mu_0 \frac{I}{4\pi r^3} [d\vec{l} \times \vec{r}], \quad (1.2.1)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный из элемента  $dl$  проводника в точку  $A$ . Направление  $d\vec{B}$  перпендикулярно  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$  и совпадает с касательной к линии магнитной индукции (рис.1.2.1).

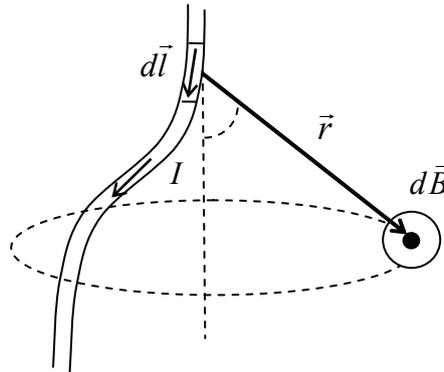


Рис. 1.2.1

Модуль вектора  $d\vec{B}$  определяется выражением

$$dB = \mu\mu_0 \frac{I}{4\pi r^2} dl \sin \alpha, \quad (1.2.2)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ .

Для напряженности магнитного поля закона Био – Савара – Лапласа будет иметь вид:

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^3} [d\vec{l} \times \vec{r}] \text{ и } dH = \frac{I}{4\pi r^2} dl \sin \alpha. \quad (1.2.3)$$

Закон Био – Савара – Лапласа совместно с принципом суперпозиции магнитных полей позволяет найти индукцию магнитного поля, создаваемого проводником любой конфигурации. В этом случае принцип суперпозиции магнитных полей будет иметь вид

$$\vec{B} = \int d\vec{B} \text{ или } \vec{H} = \int d\vec{H}. \quad (1.2.4)$$

### 1.3. Расчет магнитных полей прямого проводника с током бесконечной и конечной длины.

Пусть прямолинейный проводник  $MN$  конечной длины с током  $I$  лежит в плоскости чертежа (рис. 1.3.1). Согласно закону Био – Савара –

ра – Лапласа (1.2.2), вектор магнитной индукции  $d\vec{B}$  перпендикулярен плоскости чертежа и направлен «к нам». Численное значение индукции магнитного поля  $dB$ , создаваемого в точке  $A$  элементом  $dl$  проводника с током  $I$  равно:

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad (1.3.1)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ .

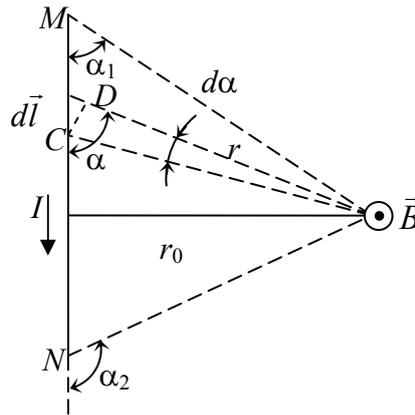


Рис. 1.3.1

Вектора  $d\vec{B}$  от каждого элемента  $d\vec{l}$  имеют одинаковое направление, так как проводник прямолинейный, и поэтому суммарная магнитная индукция равна

$$B = \int dB = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \sin \alpha}{r^2}. \quad (1.3.2)$$

Преобразуем выражение (1.3.2) таким образом, чтобы магнитная индукция стала функцией одной переменной  $\alpha$ . Из рис. 1.3.1 следует, что

$$r = \frac{r_0}{\sin \alpha}, \text{ а } dl = \frac{CD}{\sin \alpha} = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha}.$$

Тогда

$$dl = \frac{r_0 d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Подставив полученные значения  $r$  и  $dl$  в соотношение (1.3.2), получим:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha, \quad (1.3.3)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – значения угла  $\alpha$  для крайних точек проводника  $MN$ .

Проинтегрировав равенство (1.3.3), получим формулу для расчета магнитной индукции прямого проводника с током конечной длины

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (1.3.4)$$

Если проводник  $MN$  бесконечно длинный, то  $\alpha_1 = 0$ , а  $\alpha_2 = \pi$ . Тогда из (1.3.4) магнитная индукция прямого проводника с током бесконечной длины в любой точке поля вне проводника равна:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0}. \quad (1.3.5)$$

Напряженность магнитного поля вычисляется по формуле  $H = \frac{B}{\mu\mu_0}$

и для прямолинейного проводника с током конечной длины равна:

$$H = \frac{I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \quad (1.3.6)$$

а для бесконечно длинного проводника:

$$H = \frac{I}{4\pi r_0}. \quad (1.3.7)$$

## Лекция № 2

- 1.4. Магнитное поле движущейся заряженной частицы.
- 1.5. Циркуляция вектора магнитной индукции.
- 1.6. Магнитное поле тороида и соленоида.
- 1.7. Магнитный поток. Теорема Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах.

### 1.4. Магнитное поле движущегося заряда.

Вокруг проводника с током силой  $I$  существует магнитное поле. Так как ток представляет собой направленное движение частиц, то вокруг отдельно движущейся заряженной частицы существует магнитное поле. Закон Био – Савара – Лапласа позволяет найти выражение для индукции магнитного поля, создаваемого отдельным движущимся со скоростью  $v$  точечным электрическим зарядом  $q$ .

Выразим произведение  $I d\vec{l}$ , входящее в выражение (1.2.1), через плотность тока  $j$  и размеры проводника (сечение  $S$  и длину  $dl$ ).

$$I d\vec{l} = j S d\vec{l} = q n v d\vec{l} S, \quad (1.4.1)$$

где  $n$  – концентрация носителей заряда.

Вектор плотности тока  $j$  параллелен  $d\vec{l}$ . Поэтому

$$I d\vec{l} = q n v d\vec{l} S = \vec{v} dq, \quad (1.4.2)$$

где  $dq = q n d\vec{l} S$  – заряд элементарного объема проводника с током  $I$ .

Подставив это выражение в закон Био – Савара – Лапласа, получим:

$$d\vec{B} = \mu\mu_0 \frac{I}{4\pi r^3} [d\vec{l} \times \vec{r}] = \mu\mu_0 \frac{dq}{4\pi r^3} [\vec{v} \times \vec{r}]. \quad (1.4.3)$$

Индукция  $B$  пропорциональна заряду  $dq$  в объеме  $dV$ , поэтому индукцию поля  $B$ , создаваемую одним точечным зарядом  $q$ , который движется со скоростью  $v$ , можно определить по формуле:

$$\vec{B}_q = \mu\mu_0 \frac{q}{4\pi r^3} [\vec{v} \times \vec{r}]. \quad (1.4.4)$$

Напряженность магнитного поля заряда  $q$ , движущегося со скоростью  $\vec{v}$ , равна:

$$\vec{H}_q = \frac{\vec{B}_q}{\mu\mu_0} = \frac{q}{4\pi r^3} [\vec{v} \times \vec{r}]. \quad (1.4.5)$$

Из соотношений (1.4.4) и (1.4.5) следует, что индукция  $\vec{B}_q$  и напряженность  $\vec{H}_q$  магнитного поля движущегося заряда в некоторой произвольной точке этого поля направлены перпендикулярно к плоскости, в которой лежат  $\vec{v}$  и  $\vec{r}$ , и их направления определяются правилом векторного произведения указанных векторов.

### 1.5. Циркуляция вектора магнитной индукции.

Циркуляцией вектора магнитной индукции по заданному замкнутому контуру называется интеграл по этому контуру:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl, \quad (1.5.1)$$

где  $dl$  – вектор элементарной длины контура, направленной вдоль обхода контура;  $B_l = B \cos \alpha$  – составляющая вектора  $\vec{B}$  в направлении касательной к контуру, с учетом выбранного направления обхода;  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$ .

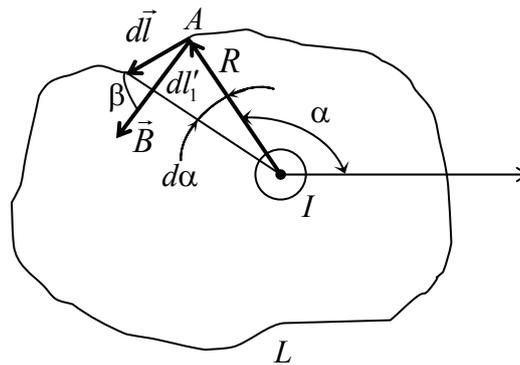


Рис. 1.5.1

Для магнитного поля бесконечного прямолинейного проводника с током силой  $I$ , находящегося в вакууме, рассчитаем циркуляцию вектора магнитной индукции вдоль некоторого замкнутого контура  $L$ , охватывающего проводник с током, т. е. вычислим интеграл  $\oint_L B_l dl$ . Для этого мысленно разобьем контур  $L$  на элементы длиной  $dl$  (рис. 1.5.1). При вычислении циркуляции нужно учитывать направление (знак) силы тока по отношению к выбранному направлению обхода контура. *Правило знаков для токов:* сила тока считается положительной, если направление тока и направление обхода контура удовлетворяют правилу правого винта (буравчика), ток противоположного направления считается отрицательным.

С учетом выражения (1.3.5) для магнитной индукции прямолинейного тока в вакууме определим циркуляцию вектора  $\vec{B}$  по контуру  $L$ :

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B dl \cos\beta = \oint_L \mu_0 \frac{I}{2\pi R} dl \cos\beta. \quad (1.5.2)$$

Из рисунка видно, что:

$$dl = \frac{dl^*}{\cos\beta} = \frac{R d\alpha}{\cos\beta}. \quad (1.5.3)$$

Подставим выражение (1.5.3) в (1.5.2):

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L \mu_0 \frac{I}{2\pi R} dl \cos\beta = \oint_L \mu_0 \frac{I}{2\pi R} \frac{R d\alpha}{\cos\beta} \cos\beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha = \mu_0 I. \quad (1.5.4)$$

Далее рассмотрим случай, когда замкнутый контур  $L$  не охватывает проводник с током, т. е. такой ток не пронизывает поверхность этого контура (рис. 1.5.2). При вычислении циркуляции интеграл по  $L$  разделим на два интеграла:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_{1a2} \vec{B} d\vec{l} + \int_{1b2} \vec{B} d\vec{l}. \quad (1.5.5)$$

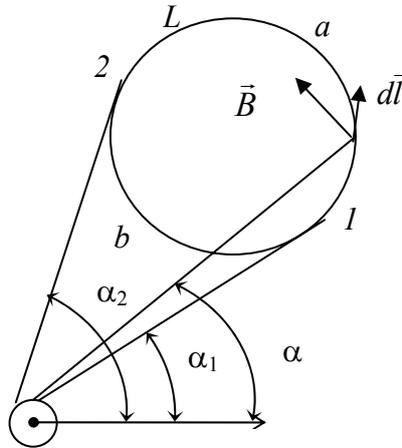


Рис. 1.5.2

При интегрировании на участке  $1a2$  угол  $\alpha$  изменяется от  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$ , на участке  $1b2$  угол  $\alpha$  изменяется от  $\alpha_2$  до  $\alpha_1$ . В результате с учетом предыдущего получаем:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} d\alpha = 0. \quad (1.5.6)$$

Таким образом, рассмотрев два случая, можно сделать следующий вывод:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \begin{cases} \mu_0 I & \text{— контур охватывает проводник с током} \\ 0 & \text{— контур не охватывает проводник с током} \end{cases} \quad (1.5.7)$$

Это утверждение справедливо для магнитных полей, созданных проводниками с током любой формы и размеров, т. е. формула универсальна. Поэтому, если поле создается системой произвольных по форме проводников с токами силой  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то с помощью формулы (1.5.7) и принципа суперпозиции магнитных полей (1.1.2) можно рассчитать циркуляцию напряженности  $B$  результирующего поля

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L \sum_{i=1}^n \vec{B}_i d\vec{l} = \sum_{i=1}^n \oint_L \vec{B}_i d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^k I_i, \quad (1.5.8)$$

где  $k \leq n$ .

В результате преобразований мы получили **теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$  в вакууме** в интегральной форме (или иначе **закон полного тока для магнитного поля в вакууме**): *циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной  $\mu_0$  на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром*

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^k I_i, \quad (1.5.9)$$

где  $k$  — число проводников с токами, охватываемое контуром  $L$  произвольной формы.

Эта теорема справедлива только для поля в вакууме. Из полученного результата следует, что магнитное поле непотенциально, оно вихревое.

Так как магнитная индукция в вакууме связана с напряженностью магнитного поля соотношением  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , то можно получить теорему о циркуляции напряженности в интегральной форме

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{i=1}^k I_i. \quad (1.5.10)$$

Между циркуляцией вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  и циркуляцией вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  существует следующее различие:

1) циркуляция вектора  $\vec{E}$  электростатического поля всегда равна нулю, то есть поле является потенциальным;

2) циркуляция вектора  $\vec{B}$  магнитного поля не равна нулю, то есть такое поле является вихревым.

Получим теорему о циркуляции магнитной индукции в вакууме в дифференциальной форме. Если контур  $L$  находится в сплошной проводящей среде, то значение полного тока, пронизывающего поверхность контура, можно определить, как поток вектора плотности тока через поверхность  $S$ , ограниченную этим контуром

$$\sum_{i=1}^k I_i = \int_S j_n dS. \quad (1.5.11)$$

Подставим выражение (1.5.11) в формулу (1.5.9) и применим теорему Стокса ( $\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S (\text{rot} \vec{A})_n dS$ ).

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S j_n dS \Rightarrow \int_S (\text{rot} \vec{B})_n dS = \mu_0 \int_S j_n dS \Rightarrow \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (1.5.12)$$

Результат подстановки – теорема о циркуляции вектора магнитной индукции в вакууме в дифференциальной форме

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (1.5.13)$$

Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля в дифференциальной форме будет иметь вид:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}. \quad (1.5.14)$$

Уравнение (1.5.14) математически выражает тот факт, что магнитное поле имеет *вихревой* характер и его источниками являются электрические токи.

### **1.6. Магнитное поле тороида и соленоида.**

Закон полного тока (1.5.10) часто используют для расчета индукции магнитного поля постоянного электрического тока. Для примера рассмотрим применение закона полного тока для расчета индукции магнитного поля соленоида и тороида.

**Соленоид** – это катушка индуктивности в виде намотанного на цилиндрическую поверхность изолированного проводника, по которому течет электрический ток. Рассмотрим соленоид длиной  $l$ , имеющей  $N$  витков. Длину соленоида считаем во много раз больше, чем диаметр его витков, то есть рассматриваемый соленоид бесконечно длинный. Внутри соленоида поле является однородным, вне соленоида – неоднородным и очень слабым, и чем длиннее соленоид, тем меньше магнитная индукция вне его. Поэтому будем считать, что поле бесконечно длинного соленоида сосредоточено целиком внутри него.

Для нахождения магнитной индукции выберем замкнутый прямоугольный контур  $ABCD$  (рис. 1.6.1) Согласно теореме о циркуляции вектора  $\vec{H}$ :

$$\oint_{ABCD} H_l dl = NI. \quad (1.6.1)$$

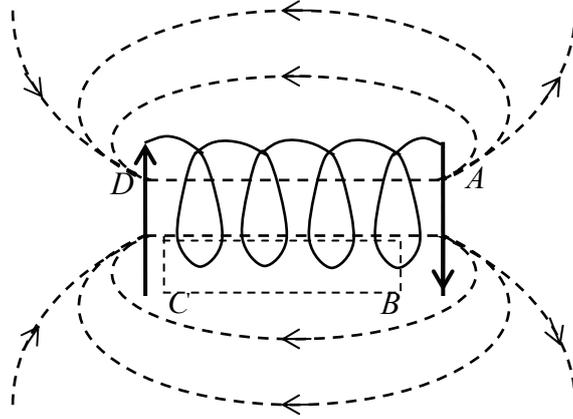


Рис. 1.6.1

Интеграл по  $ABCD$  можно представить в виде интегралов по  $AB$ ;  $BC$ ;  $CD$ ;  $DA$ . На участках  $AB$  и  $CD$  контур перпендикулярен линиям магнитной индукции и  $H_l = 0$ . На участке  $CB$  вне соленоида  $H = 0$ , а на участке  $DA$  контур совпадает с линией магнитной индукции и циркуляция вектора  $\vec{H}$  равна

$$\oint_{DA} H_l dl = Hl = NI. \quad (1.6.2)$$

Из последнего уравнения получаем, что напряженность магнитного поля соленоида:

$$H = \frac{NI}{l} = nI, \quad (1.6.3)$$

где  $n$  – число витков соленоида, приходящихся на единицу длины.

Используя формулу (1.1.1), выражаем индукцию магнитного поля соленоида:

$$B = \mu\mu_0 \frac{N}{l} I = \mu\mu_0 nI. \quad (1.6.4)$$

**Тороид** – это кольцевая катушка с витками, намотанными на сердечник, имеющий форму тора, по которому течет электрический ток.

Пусть  $R_1$  и  $R_2$  соответственно внешний и внутренний радиусы сечения тороида. Общее число витков тороида с током  $I$  равно  $N$ .

Если  $r < R_2$ , то контур не охватывает проводники с током,  $\sum_{i=1}^N I_k = 0$ , и по закону полного тока

$$\oint_L H dl \cos \alpha = 2\pi r H = 0 \Rightarrow H = 0. \quad (1.6.5)$$

Если  $r > R_1$ , то контур охватывает  $2N$  проводников с током  $I$ . Половина из них идет в одном направлении, а половина – в обратном направлении (рис. 1.6.2). Поэтому алгебраическая сумма токов во всех проводниках равна нулю, и поэтому

$$2\pi r H = 0 \Rightarrow H = 0. \quad (1.6.6)$$

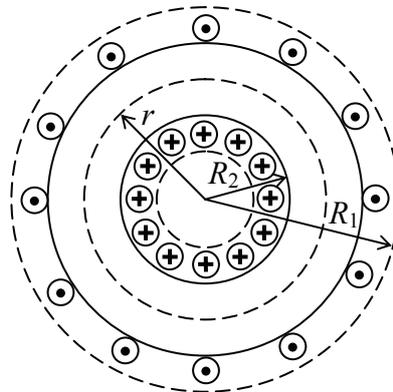


Рис. 1.6.2

Из полученного результата следует, что вне тороида магнитное поле отсутствует. Магнитное поле сосредоточено внутри объема ( $R_2 \leq r \leq R_1$ ) тороида. Линии магнитной индукции в данном случае есть окружности, центры которых расположены на оси тороида. В этом случае контур радиуса  $r$  охватывает  $N$  проводников, токи в которых равны  $I$  и одинаково направлены. Поэтому по теореме о циркуляции

$$\oint_L H_l dl = Hl = 2\pi r H = NI. \quad (1.6.7)$$

Отсюда напряженность магнитного поля внутри тороида:

$$H = \frac{NI}{2\pi r} = nI, \quad (1.6.8)$$

где  $n$  – число витков тороида, приходящихся на единицу длины.

Напряженность магнитного поля на осевой линии тороида равна:

$$H_{\text{cp}} = \frac{NI}{2\pi r_{\text{cp}}}. \quad (1.6.9)$$

Используя формулу (1.1.1), находим индукцию магнитного поля внутри тороида:

$$B = \mu\mu_0 \frac{NI}{2\pi r} = \mu\mu_0 nI. \quad (1.6.10)$$

Индукция магнитного поля на осевой линии тороида равна:

$$B_{\text{ср}} = \mu\mu_0 \frac{NI}{2\pi r_{\text{ср}}} = \mu\mu_0 nI. \quad (1.6.11)$$

### 1.7. Магнитный поток. Теорема Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах.

Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком) через площадку  $dS$  называется величина, равная:

$$d\Phi_m = \vec{B}d\vec{S} = B_n dS, \quad (1.7.1)$$

где  $B_n = B\cos\alpha$  – проекция вектора  $\vec{B}$  на направление нормали  $\vec{n}$  к площадке  $dS$ ,  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{n}$  и  $\vec{B}$  (рис. 1.7.1). Магнитный поток равен числу линий магнитной индукции, пронизывающих замкнутую поверхность в направлении внешней нормали.

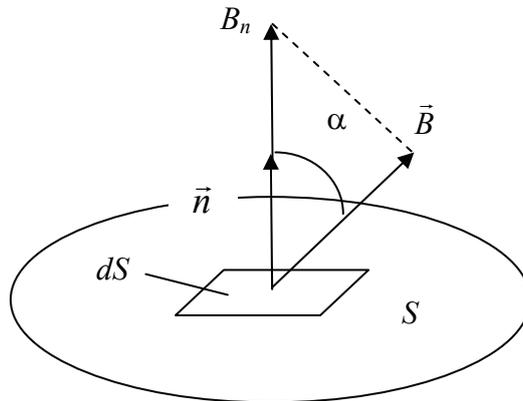


Рис. 1.7.1

Поток вектора магнитной индукции через произвольную поверхность  $S$  равен

$$\Phi_m = \int_S \vec{B}d\vec{S} = \int_S B_n dS. \quad (1.7.2)$$

Если магнитное поле однородно ( $\vec{B} = \text{const}$ ), а поверхность  $S$  плоская, то магнитный поток равен

$$\Phi_m = BS\cos\alpha. \quad (1.7.3)$$

За единицу магнитного потока принимается магнитный поток сквозь плоскую поверхность единичной площади, расположенную перпендикулярно к однородному магнитному полю, индукция которого равна единице. В системе СИ единица магнитного потока называется вебером [Вб].

Магнитный поток через поверхность, ограниченную замкнутым контуром, называется **потокосцеплением**  $\Psi$  этого контура (потокосцепленным с контуром). Если контур имеет  $N$  витков, то потокосцепление этого контура:

$$\Psi = N\Phi_m, \quad (1.7.4)$$

где  $\Phi_m$  – поток, пронизывающий один виток контура.

В природе отсутствуют элементарные «магнитные заряды», аналогичные электрическим зарядам, поэтому линии индукции  $B$  магнитного поля не имеют ни начала, ни конца, т. е. магнитные силовые линии замкнуты. Следовательно, поток  $\Phi_m$  через любую замкнутую поверхность будет всегда равен нулю, так как число входящих линий равно числу выходящих силовых линий:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad \text{или} \quad \oint_S B_n dS = 0. \quad (1.7.5)$$

**Теорема Гаусса для магнитного поля в интегральной форме:** *поток вектора магнитной индукции сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю.*

Так как  $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ , то поток вектора  $\vec{H}$  через любую замкнутую поверхность также равен нулю:

$$\oint_S \vec{H} d\vec{S} = 0 \quad \text{или} \quad \oint_S H_n dS = 0. \quad (1.7.6)$$

Для записи теоремы Гаусса для магнитного поля в дифференциальной форме воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса  $\oint_S A_n dS = \int_V \text{div} \vec{A} dV$ .

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \Rightarrow \int_V \text{div} \vec{B} dV = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{B} = 0. \quad (1.7.7)$$

Для напряженности магнитного поля получится аналогичное выражение:

$$\text{div} \vec{H} = 0. \quad (1.7.8)$$

Выражения (1.7.7) и (1.7.8) являются дифференциальной формой теоремы Гаусса.

## Тема 2. ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПРОВОДНИК С ТОКОМ И ДВИЖУЩУЮСЯ ЗАРЯЖЕННУЮ ЧАСТИЦУ

### Лекция № 3

2.1. Сила Ампера.

2.2. Контур с током в магнитном поле. Магнитный момент контура с током. Механический момент, действующий на контур с током в однородном магнитном поле.

2.3. Работа перемещения проводника с током в магнитном поле.

2.4. Сила Лоренца. Масс-спектрометрия.

2.5. Эффект Холла.

#### 2.1. Сила Ампера.

Действие магнитного поля на проводник с током опытным путем было установлено Г. Эрстером и А. Ампером и детально исследовано А. Ампером. На основании опытных данных А. Ампер установил, что сила, с которой магнитное поле действует на элемент проводника с током, находящегося в магнитном поле, равна:

$$d\vec{F}_A = I [d\vec{l} \times \vec{B}], \quad (2.1.1)$$

где  $d\vec{l}$  – вектор, совпадающий по направлению с током.

Модуль силы Ампера определяется как

$$dF_A = IBdl \sin \alpha, \quad (2.1.2)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}$ .

Направление силы Ампера принято определять по **правилу левой руки**: если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее вошел вектор магнитной индукции, а четыре вытянутых пальца расположить по направлению тока в проводнике, то отогнутый на  $90^\circ$  большой палец покажет направление силы Ампера, действующей со стороны поля.

Рассмотрим два бесконечных прямолинейных параллельных проводника с токами  $I_1$  и  $I_2$ , находящиеся на расстоянии  $R$  друг от друга (рис. 2.1.1). Проводник с током  $I_1$  создает вокруг себя магнитное поле, которое действует на элемент проводника  $dl$  с током  $I_2$ . Направление вектора магнитной индукции данного поля определяется правилом правого винта, и его модуль равен:

$$B_1 = \mu\mu_0 \frac{I_1}{2\pi R}, \quad (2.1.3)$$

а модуль силы с учетом, что  $\sin \alpha = 1$ , имеет вид  $dF = I_2 B_1 dl$ .

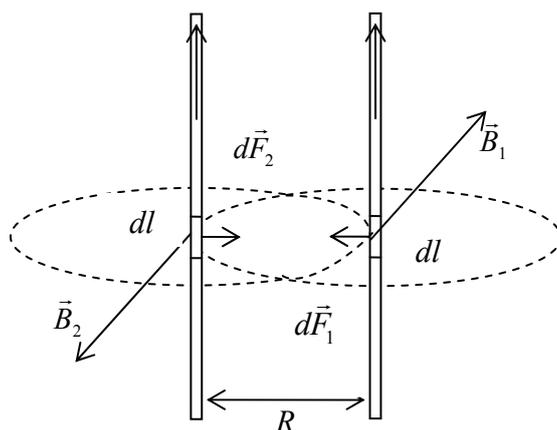


Рис. 2.1.1

Тогда сила взаимодействия двух проводников с током равна:

$$dF_1 = \mu\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi R} dl \text{ и } dF_2 = \mu\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi R} dl \Rightarrow \quad (2.1.4)$$

$$dF = dF_1 = dF_2 = \mu\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi R} dl .$$

Сила взаимодействия на единицу длины проводника в вакууме будет равна:

$$\frac{dF}{dl} = \mu_0 \frac{2I_1 I_2}{4\pi R} . \quad (2.1.5)$$

При условии, что  $I_1 = I_2 = 1$  А и  $R = 1$  м получим, что  $\frac{dF}{dl} = 2 \cdot 10^{-7}$  Н/м.

Соотношение (2.1.5) лежит в основе определения единицы силы тока. За единицу силы тока – 1 ампер (А) – принимается сила такого постоянного тока, при прохождении которого по двум параллельным бесконечно длинным проводникам очень малого сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м друг от друга, сила их магнитного взаимодействия равна  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины.

## **2.2. Контур с током в магнитном поле. Магнитный момент контура с током. Механический момент, действующий на контур с током в однородном магнитном поле.**

На практике для измерения индукции магнитного поля используется контур (замкнутый проводник) с током. Магнитное поле оказывает на него ориентирующее действие. Рамке с током приписывают магнитный момент. Под магнитным моментом контура с током понимают векторную физическую величину, численно равную произведению силы тока, текущего в контуре, на его площадь.

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \quad (2.2.1)$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор положительной нормали к поверхности рамки.

Направление магнитного момента совпадает с направлением положительной нормали, направление которой определяется правилом правого винта.

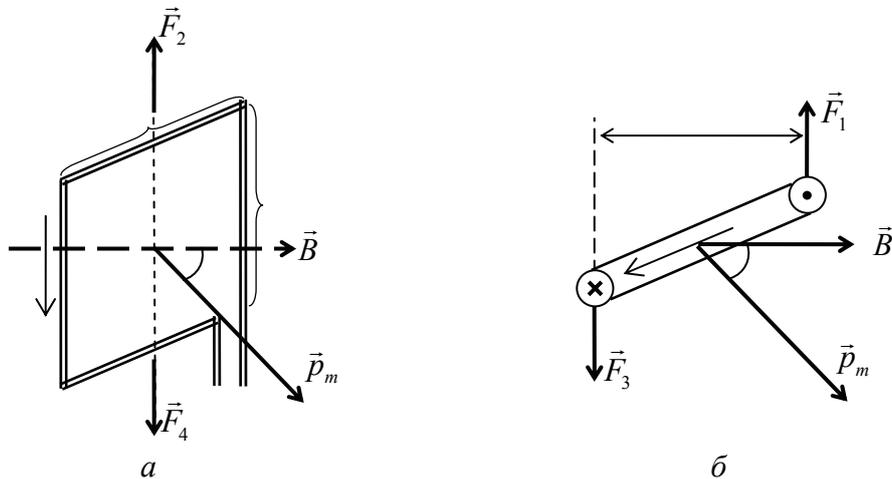


Рис. 2.2.1

Рассмотрим прямоугольный контур  $1-2-3-4$  с током  $I$ , помещенный в магнитное поле индукцией  $\vec{B}$  (рис. 2.2.1). Силы  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_4$  (рис. 2.2.1, а), приложенные к проводникам  $2-3$  и  $4-1$ , численно равны:

$$F_2 = F_4 = IBc \sin(90 - \alpha) = IBc \cos \alpha. \quad (2.2.2)$$

Эти силы направлены вдоль вертикальной оси рамки в противоположные стороны и уравновешивают друг друга. На рис. 2.2.1, б, показан вид контура сверху. Силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_3$ , действующие на прямолинейные проводники  $1-2$  и  $3-4$ , по закону Ампера численно равны:

$$F_1 = F_3 = IBd. \quad (2.2.3)$$

Эти силы образуют пару сил, вращающий момент которых равен произведению модуля одной силы на плечо пары  $l$ .

Результирующий вращающий момент  $M$ , действующий на контур, равен моменту пары сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_3$ :

$$M = F_1 l = F_3 l, \quad (2.2.4)$$

где  $l = c \sin \alpha$  – плечо пары сил.

Подставляя (2.2.3) в (2.2.4), получим:

$$M = IdcB \sin \alpha. \quad (2.2.5)$$

Так как  $dc = S$  – площадь контура и  $IS = p_m$  – магнитный момент контура с током, а  $\alpha$  – угол между  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ , то соотношение (2.2.5) можно переписать в виде:

$$M = p_m B \sin \alpha. \quad (2.2.6)$$

В векторном виде соотношение (2.2.6) имеет вид:

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}. \quad (2.2.7)$$

Формула (2.2.7) справедлива для плоского контура произвольной конфигурации. Согласно ей магнитную индукцию можно определить как отношение максимального вращающего момента, действующего на рамку с током, к ее магнитному моменту:

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m} = \frac{M_{\max}}{IS}. \quad (2.2.8)$$

Силы магнитного поля стремятся расположить контур так, чтобы его магнитный момент  $p_m$  был параллелен вектору  $\vec{B}$  (т. е. когда  $M = p_m B \sin 0^\circ = 0$ ).

Для того чтобы увеличить угол между векторами  $p_m$  и  $B$  на  $d\alpha$ , нужно совершить работу против сил поля

$$\delta A = M d\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha. \quad (2.2.9)$$

Поворачиваясь на угол  $d\alpha$  при возвращении в исходное положение, контур с током может совершить такую же работу. Следовательно, работа равна уменьшению потенциальной энергии  $\Pi$ , которой обладает контур с током в магнитном поле  $B$ :

$$\delta A = -d\Pi. \quad (2.2.10)$$

Выбирая нулевой уровень энергии  $\Pi$  при  $\alpha = \pi/2$ , проинтегрируем это выражение по  $\alpha$  в пределах от  $\alpha$  до  $\pi/2$ . В результате получим:

$$\Pi = - \int_{\alpha}^{\pi/2} \delta A = - \int_{\alpha}^{\pi/2} M d\alpha = - \int_{\alpha}^{\pi/2} p_m B \sin \alpha d\alpha = - p_m B \cos \alpha \quad (2.2.11)$$

или  $\Pi = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$ .

Формулы (2.2.11) определяют энергию контура с током в поле с индукцией  $B$ .

### **2.3. Работа перемещения проводника с током в магнитном поле.**

Рассмотрим проводник длиной  $l$  с током  $I$ , находящийся в однородном внешнем магнитном поле. Поле направлено перпендикулярно

плоскости рисунка «от нас» (рис. 2.3.1). Проводник не закреплен и под действием силы Ампера будет свободно перемещаться из положения 1 в положение 2 параллельно самому себе на отрезок  $dx$ . Элементарная работа, совершаемая магнитным полем равна:

$$dA = Fdx = IBldx = IBdS = Id\Phi_m, \quad (2.3.1)$$

где  $ldx = dS$  – площадь, пересекаемая проводником при его перемещении в магнитном поле;  $Bds = d\Phi_m$  – поток вектора магнитной индукции, пронизывающий эту площадь.

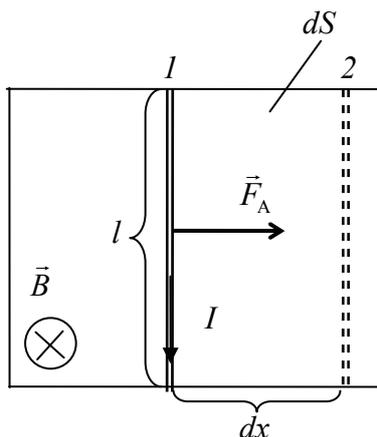


Рис. 2.3.1

Если сила тока  $I$  в проводнике постоянна, то после интегрирования (2.3.1) имеем:

$$A = I\Phi_m. \quad (2.3.2)$$

*Работа, совершаемая силами Ампера при перемещении в магнитном поле проводника с постоянным током, равна произведению силы тока на величину магнитного потока сквозь поверхность, которую пересекает проводник при своем движении.*

Определим величину работы сил Ампера при перемещении замкнутого контура  $ABCD$  в магнитном поле с постоянным током  $I$  (рис. 2.3.2). Поле направлено перпендикулярно плоскости рисунка – за чертеж. Предположим, что контур  $ABCD$  перемещается в плоскости чертежа и в результате бесконечно малого перемещения займет положение  $A'B'C'D'$ . Контур  $ABCD$  разобьем на два соединенных своими концами проводника  $ABC$  и  $CDA$ . Работа, совершаемая силами Ампера при рассматриваемом перемещении контура в магнитном поле равна алгебраической сумме работ по перемещению проводников  $ABC$  и  $CDA$

$$dA = dA_1 + dA_2. \quad (2.3.3)$$

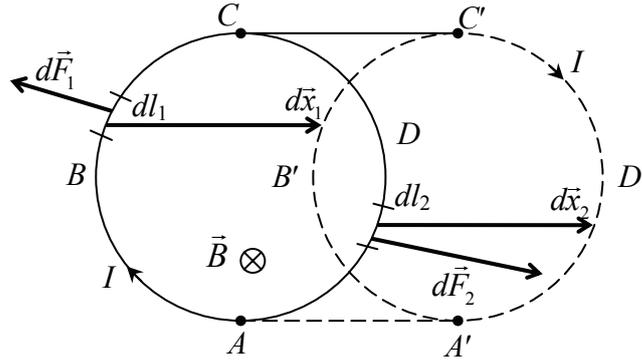


Рис. 2.3.2

При перемещении проводника  $CDA$  силы Ампера направлены в сторону перемещения и образуют с направлением перемещения острые углы, поэтому совершаемая ими работа  $dA_2 > 0$ . Эта работа равна произведению силы тока в контуре на пересеченный проводником  $CDA$  при своем движении поток  $d\Phi_{m2}$ , следовательно

$$dA_2 = Id\Phi_{m2}. \quad (2.3.4)$$

Силы, действующие на проводник  $ABC$  контура, направлены против перемещения и образуют с направлением перемещения тупые углы, поэтому  $dA_1 < 0$ . Проводник  $ABC$  пересекает при своем движении поток  $d\Phi_{m1}$ , следовательно

$$dA_1 = -Id\Phi_{m1}. \quad (2.3.5)$$

Подставив (2.3.4) и (2.3.5) в (2.3.3), получим:

$$dA = dA_1 + dA_2 = -Id\Phi_{m1} + Id\Phi_{m2} = I(d\Phi_{m2} - d\Phi_{m1}). \quad (2.3.6)$$

Так как  $d\Phi_{m2} - d\Phi_{m1} = d\Phi_m$  – изменение магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром, при его перемещении из положения  $ABCD$  в положение  $A'B'C'D'$ , то выражение для элементарной работы  $dA$  равно:

$$dA = Id\Phi_m, \quad (2.3.6)$$

или после интегрирования

$$A = I\Delta\Phi_m. \quad (2.3.7)$$

Таким образом, *работа, совершаемая силами Ампера при перемещении в магнитном поле замкнутого контура с постоянным током, равна произведению силы тока на изменение магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром.*

Пусть вектор  $\vec{B}$  магнитной индукции направлен перпендикулярно плоскости чертежа «от нас». В этом случае сила Ампера  $d\vec{F}_2$ , дей-

ствующая на элемент  $dl_2$  проводника  $DNA$ , образует острый угол с направлением его перемещения  $d\vec{x}_2$  и совершает положительную работу. В то же время сила  $d\vec{F}_1$ , действующая на элемент  $dl_1$  проводника  $AMD$ , образует с направлением его перемещения  $d\vec{x}_1$  тупой угол и совершает отрицательную работу, т. е.  $dA_1 < 0$ ,  $dA_2 > 0$ . Поэтому полная работа равна (см. формулу (2.3.3)):

$$dA = dA_1 + dA_2 = -Id\Phi_{m1} + Id\Phi_{m2} = I(d\Phi_{m2} - d\Phi_{m1}), \quad (2.3.8)$$

где  $d\Phi_{m1}$  – магнитный поток сквозь поверхность  $AMDD'M'A'$ ;  $d\Phi_{m2}$  – магнитный поток сквозь поверхность  $ANDD'N'A'$ .

Из рис. 2.3.2 видно, что

$$d\Phi_{m2} - d\Phi_{m1} = d\Phi_m, \quad (2.3.9)$$

где  $d\Phi_m$  – изменение магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром, при перемещении его из положения  $C$  в положение  $C'$ . Окончательное выражение для элементарной работы  $dA$  равно:

$$dA = Id\Phi_m. \quad (2.3.10)$$

Интегрируя последнее равенство, получим:

$$A = I\Delta\Phi_m. \quad (2.3.11)$$

Таким образом, *работа, совершаемая силами Ампера при перемещении в магнитном поле замкнутого контура с постоянным током, равна произведению силы тока на изменение магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром.*

#### **2.4. Сила Лоренца. Масс-спектрометрия.**

Сила, действующая на движущуюся со скоростью  $\vec{v}$  заряженную частицу  $q$  со стороны магнитного поля индукцией  $B$ , называется **силой Лоренца**.

$$\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (2.4.1)$$

Модуль силы Лоренца равен

$$F_L = qvB \sin \alpha, \quad (2.4.2)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

Из соотношения (2.4.1) следует, что сила Лоренца всегда направлена *перпендикулярно* к направлению вектора скорости заряженной частицы и поэтому играет роль *центробежной силы*, которая *не совершает работы*. Эта сила только изменяет направление скорости

движения частицы в магнитном поле. Абсолютная величина скорости частицы и его кинетическая энергия при движении в магнитном поле не изменяются.

Направление силы Лоренца определяется по правилу левой руки: *если сложенные вместе пальцы направить по движению положительно заряженной частицы, а ладонь расположить так, чтобы линии магнитной индукции входили в ладонь, то отогнутый на  $90^\circ$  большой палец покажет направление силы Лоренца, действующей со стороны магнитного поля.* При движении отрицательно заряженной частицы эта сила направлена в противоположную сторону.

В общем случае на движущуюся заряженную частицу действуют электрическое поле напряженностью  $\vec{E}$  и магнитное поле индукцией  $\vec{B}$ . Результирующая сила  $\vec{F}$ , действующая на частицу, равна сумме силы  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  и силы Лоренца  $\vec{F}_L$ :

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (2.4.3)$$

Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости движения заряженной частицы. Поэтому она изменяет только направление скорости, не изменяя ее модуля, и, следовательно, она не совершает работы. Так как магнитное поле не совершает работы над движущейся в нем заряженной частицей, то кинетическая энергия этой частицы при движении в магнитном поле не изменяется.

Если магнитное поле однородно ( $\vec{B} = \text{const}$ ) и на частицы не действует электрическое поле (или его действием можно пренебречь), то возможны три случая движения заряженных частиц в этом поле.

1. Заряженная частица движется в магнитном поле вдоль линий магнитной индукции ( $\alpha = 0$  или  $\alpha = \pi$ ). Сила Лоренца  $F_L$  равна нулю. Магнитное поле на частицу не действует, и она движется равномерно и прямолинейно.

2. Заряженная частица движется в магнитном поле перпендикулярно линиям магнитной индукции (угол  $\alpha = \pi/2$ ). Сила Лоренца  $F = qBv$  постоянна по модулю и нормальна к траектории частицы. Частица будет двигаться по окружности с нормальным ускорением  $a_n = v^2/R$  (рис. 2.4.1). Из второго закона Ньютона выразим радиус такой окружности:

$$qBv = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB}. \quad (2.4.4)$$

Период вращения частицы будет равен:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (2.4.5)$$

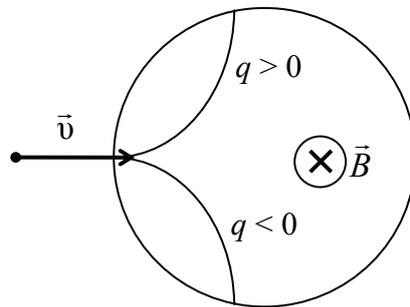


Рис. 2.4.1

3. Заряженная частица движется под углом к линиям магнитной индукции. Движение частицы можно представить в виде суммы двух движений: а) равномерного прямолинейного движения вдоль поля со скоростью  $\vec{v}_{\parallel}$ ; б) равномерного движения по окружности в плоскости, перпендикулярной полю  $\vec{v}_{\perp}$ .

Суммарное движение будет движением по винтовой траектории, ось которой параллельна магнитному полю (рис. 2.4.2).

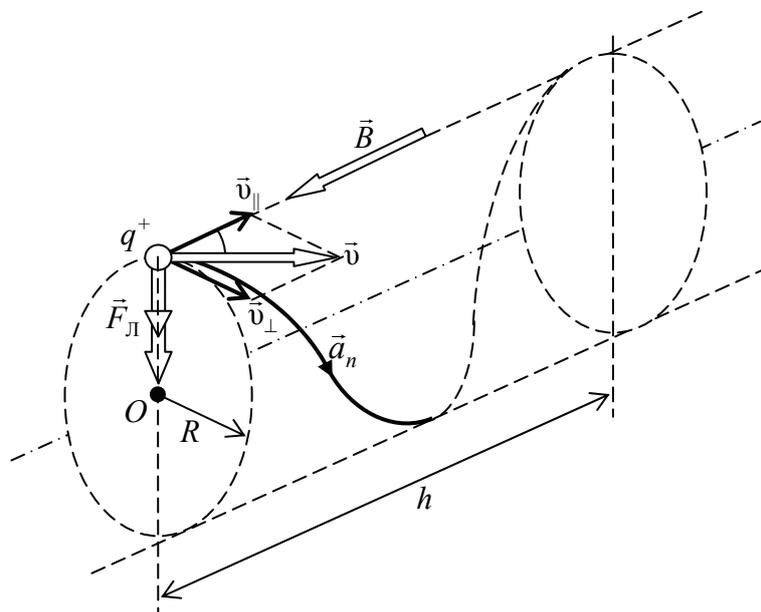


Рис. 2.4.2

Из рисунка видно, что

$$v_{\parallel} = v \cos \alpha, \quad v_{\perp} = v \sin \alpha. \quad (2.4.6)$$

Радиус винтовой линии равен:

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \alpha}{qB}. \quad (2.4.7)$$

Период вращения частицы

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (2.4.8)$$

Шаг винтовой линии (расстояние, которое проходит частица вдоль оси винтовой линии за время равное периоду вращения)

$$h = v_{\parallel} T = v T \cos \alpha = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB}. \quad (2.4.9)$$

Если магнитное поле неоднородно и заряженная частица движется под углом к линиям магнитного поля в направлении возрастания поля, то радиус и шаг спирали уменьшаются с ростом индукции магнитного поля. На этом основана фокусировка пучка заряженных частиц магнитным полем.

Закономерности движения заряженных частиц в магнитных и электрических полях легли в основу масс-спектрометрии, метода определения массы ионов. На рис. 2.4.3 представлен масс-спектрограф Бейнбриджа.

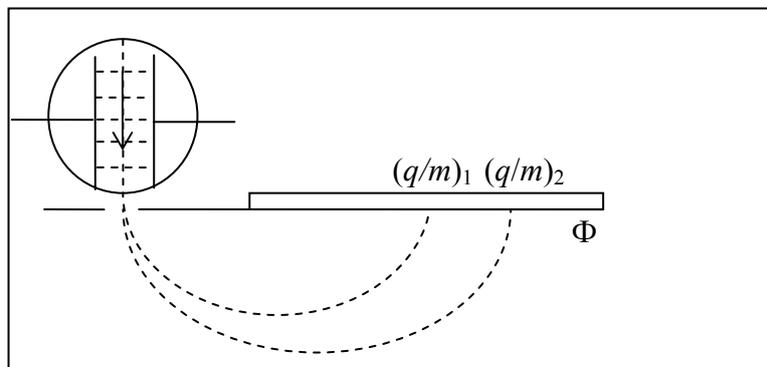


Рис. 2.4.3

В нем пучок ионов проходит сначала через так называемый селектор (или фильтр) скоростей, который выделяет из пучка ионы с определенным значением скорости. В селекторе ионы подвергаются одновременному воздействию взаимно перпендикулярных электрического и магнитного полей, отклоняющих ионы в противоположные стороны. Через выходную щель селектора проходят только те ионы, для которых действия электрического и магнитного полей компенсируют друг друга.

Это происходит при условии, что  $qE = qvB$ . Следовательно, скорости вышедших из селектора ионов, независимо от их массы и заряда, имеют одинаковое значение, равное  $v = E/B$ . Выйдя из селектора, ионы попадают в область перпендикулярного к их скорости однородного магнитного поля с индукцией  $B_1$ . В этом поле они движутся по окружностям, радиусы которых зависят от  $q/m$ , согласно формуле (2.4.10)

$$R = \frac{mv}{qB_1}. \quad (2.4.10)$$

Описав половину окружности, ионы попадают на фотопластинку на расстояниях от щели, равных  $2R$ . Следовательно, ионы каждого сорта (определяемого значением  $q/m$ ) оставляют на пластинке след в виде узкой полоски. Зная параметры прибора, можно вычислить удельные заряды ионов. Поскольку заряды ионов являются целыми кратными элементарного заряда  $e$ , то по найденным значениям  $q/m$  можно определить массы ионов. В настоящее время имеется много типов усовершенствованных масс-спектрографов. Созданы также приборы, в которых ионы регистрируются с помощью электрического устройства, а не фотопластинки. Они получили название масс-спектрометров.

### 2.5. Эффект Холла.

Американский физик Э. Холл обнаружил, что в пластинке металла (или в полупроводника) с током  $I$ , помещенной в магнитное поле  $\vec{B}$ , возникает электрическое поле в направлении, перпендикулярном направлению тока и вектору  $\vec{B}$ , т. е. на противоположных гранях пластинки между точками  $A$  и  $C$  (рис. 2.5.1) возникает разность потенциалов. Возникновение разности потенциалов  $\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_C$  в этом случае носит название **эффекта Холла**.

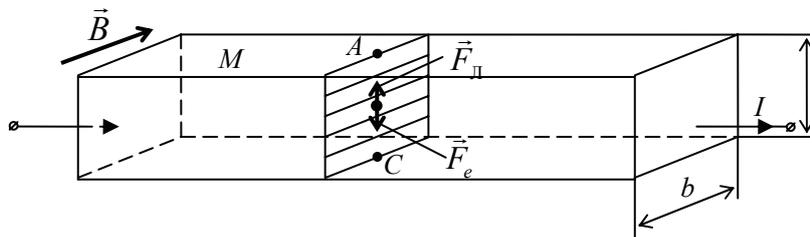


Рис. 2.5.1

Рассмотрим металлическую пластину толщиной  $b$ , по которой проходит ток  $I$ , помещенную в магнитное поле так, чтобы ее горизонтальные грани были параллельны плоскости, образованной векторами плотности тока  $j$  и вектором магнитной индукции  $\vec{B}$ . В отсутствие

магнитного поля разность потенциалов между точками  $A$  и  $C$  равна нулю ( $\varphi_A = \varphi_C$ ), поскольку точки  $A$  и  $C$  лежат на эквипотенциальной поверхности, перпендикулярной вектору  $\vec{E}$ . При наличии магнитного поля возникает разность потенциалов  $\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_C$ .

$$\Delta\varphi_H = RbjB, \quad (2.5.1)$$

где  $R$  – **постоянная Холла**.

Классическая электронная теория позволяет достаточно просто объяснить возникновение холловской разности потенциалов  $\Delta\varphi_H$ . Пусть сила тока  $I$  обусловлена упорядоченным движением свободных носителей заряда  $q$ , концентрация которых  $n$ , средняя скорость дрейфа  $u$ . Тогда плотность тока

$$j = qnu. \quad (2.5.2)$$

При включении магнитного поля на каждый заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $u$ , будет действовать сила Лоренца

$$F_{\text{Л}} = quB, \quad (2.5.3)$$

которая вызовет отклонение положительных зарядов ( $q > 0$ ) к одной грани пластинки, а отрицательных зарядов ( $q < 0$ ) – к другой. В результате у верхней грани образуется избыточный положительный заряд, а у нижней грани – отрицательный. Появятся поперечное электрическое поле  $E^*$  и соответствующая ему электрическая сила:

$$F_{\text{эл}} = qE^* = q \frac{\Delta\varphi}{b}. \quad (2.5.4)$$

Когда напряженность этого поперечного поля достигнет такой величины, что его действие на заряды будет уравнивать силу Лоренца, установится стационарное распределение зарядов в поперечном направлении. Тогда

$$F_{\text{эл}} = F_{\text{Л}} \Rightarrow q \frac{\Delta\varphi_H}{b} = qBu \Rightarrow \Delta\varphi_H = Bub \Rightarrow \Delta\varphi_H = \frac{1}{qn} Bbj \quad (2.5.5)$$

Сравнивая (2.5.1) и (2.5.2) получаем, что постоянная Холла равна:

$$R = \frac{1}{qn}. \quad (2.5.6)$$

Поскольку концентрация  $n$  – положительная величина, знак постоянной  $R$  определяется знаком заряда  $q$  свободных носителей заряда в материале пластинки. Если постоянную Холла измерить на опыте, то по формуле (2.5.6) можно рассчитать концентрацию носителей за-

ряда. Когда электропроводность материала определяется зарядами обоих знаков, то по знаку постоянной Холла можно судить о том, какие заряды вносят преобладающий вклад в удельную электрическую проводимость у исследуемого проводника. Для полупроводников знак постоянной Холла определяет тип проводимости ( $R < 0$  – электронная,  $R > 0$  – дырочная).

Определение значения постоянной Холла для электронных проводников позволяет определить среднюю длину свободного пробега электронов  $\bar{\lambda}$ . Эффект Холла также широко используется для измерения индукции  $B$  магнитных полей.

## Тема 3. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

### Лекция № 4

3.1. опыты Фарадея. Закон электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле.

3.2. Токи Фуко.

3.3. Явление самоиндукции. Индуктивность.

3.4. Энергия и объемная плотность энергии магнитного поля.

3.5. Токи при включении и при выключении источника тока в электрической цепи (для самостоятельной работы).

#### **3.1. опыты Фарадея. Закон электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле.**

Явление электромагнитной индукции было открыто Фарадеем в 1831 г. и заключается в следующем: *во всяком замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции через площадь, ограниченную этим контуром, возникает электрический ток. Этот ток называется индукционным.* Рассмотрим некоторые опыты на основании которых и было открыто это явление.

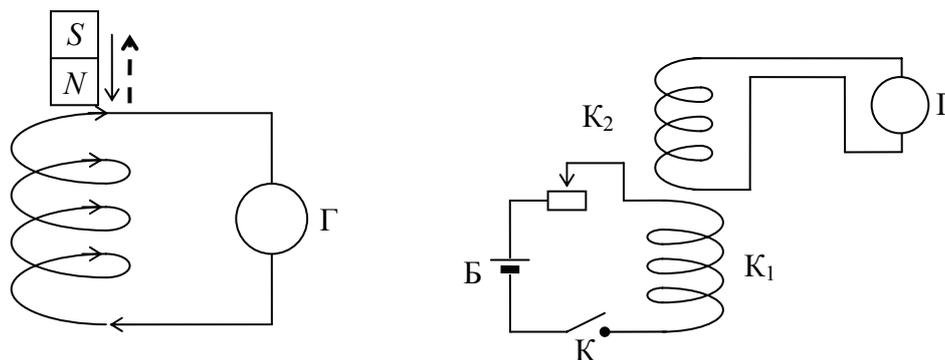


Рис. 3.1.1

В первом опыте на рис. 3.1.1, если в катушку, замкнутую на гальванометр, вдвигать или выдвигать из нее постоянный магнит, наблюдается отклонение влево или вправо стрелки гальванометра, т. е. возникает индукционный ток. Причем следует отметить, что отклонения стрелки гальванометра тем больше, чем больше скорость движения магнита относительно катушки. При изменении полюсов магнита направление отклонения стрелки изменится. Индукционный ток возникает в катушке также и в том случае, если постоянный магнит неподвижен, а катушка движется. Во втором опыте (рис. 3.1.1) используют

две катушки ( $K_1$  и  $K_2$ ), которые могут быть вставлены одна в другую. Катушка  $K_1$  подключена через реостат и ключ к источнику электроэнергии, а катушка  $K_2$  подсоединена к гальванометру. Стрелка гальванометра будет отклоняться при замыкании или размыкании цепи с катушкой  $K_1$ , в моменты увеличения или уменьшения электрического тока в цепи, а также при перемещении катушек относительно друг друга. Направление отклонения стрелки гальванометра влево или вправо определяется увеличением и уменьшением электрического тока, его включением и выключением, а также сближением или удалением катушек друг от друга.

На основании опытов М. Фарадей пришел к выводу, что индукционный ток в замкнутом контуре возникает всегда, когда происходит изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции, а величина индукционного тока определяется *скоростью* изменения потока магнитной индукции и не зависит от способа его изменения. При этом э. д. с. индукции равна:

$$\varepsilon_i = \frac{d\Phi_m}{dt} - \text{закон Фарадея.} \quad (3.1.1)$$

Это уравнение справедливо независимо от того, чем вызвано изменение потока индукции через контур: изменением его формы, его поворотом, перемещением в неоднородном поле или изменением со временем магнитной индукции самого поля.

Русский физик Э. Х. Ленц, который исследовал взаимосвязь направления индукционного тока и причины, вызывающей ток, в 1833 г. установил закономерность, называемую **правилом Ленца**: *при всяком изменении магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную замкнутым контуром, в последнем возникает индукционный ток, который имеет такое направление, что его собственное магнитное поле препятствует изменению внешнего магнитного потока, вызывающего этот индукционный ток.*

В 1845–1847 гг. Ф. Нейман создал теорию электромагнитной индукции и получил математическое выражение для закона, который объединил закон Фарадея и правило Ленца и который был назван законом Фарадея – Ленца:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (3.1.2)$$

*Э. д. с. индукции в проводящем контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром.*

Рассмотрим контур, состоящий из  $N$  витков, в котором индуцируется э. д. с. Поскольку витки соединяются последовательно, то э. д. с., возбуждаемые в каждом витке, будут складываться. Поэтому

$$\varepsilon_i = -\sum_{k=1}^N \frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \Phi_m. \quad (3.1.3)$$

Величину  $\Psi = \sum_{k=1}^N \Phi_{mi} = N \cdot \Phi_m$  называют *потокосцеплением*.

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -N \frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (3.1.4)$$

Уравнение (3.1.4) выражает закон электромагнитной индукции для контура из  $N$  витков.

Э. д. с. электромагнитной индукции в контуре условно считают положительной, если магнитный момент  $\vec{p}_m$  соответствующего ей индукционного тока образует острый угол с линиями магнитной индукции того поля, которое возбуждает этот ток. На рис. 3.1.2, *а*,  $\varepsilon_i < 0$ , а на рис. 3.1.2, *б*,  $\varepsilon_i > 0$ .

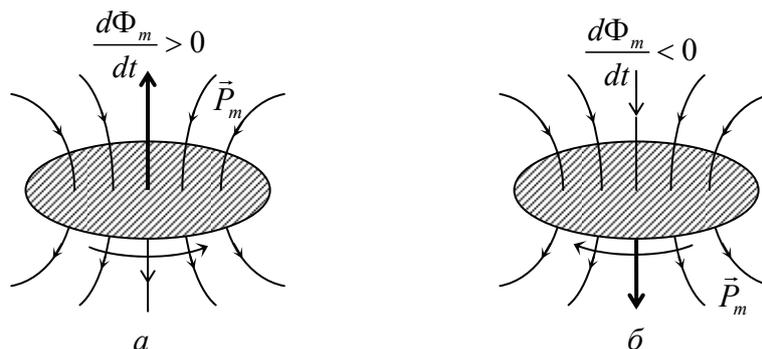


Рис. 3.1.2

Хотя величина э. д. с. индукции и не зависит от способа изменения магнитного потока, однако механизм ее возникновения при этом оказывается разным. Обратимся сначала к случаю, когда поток изменяется вследствие движения проводящего контура (или изменения его геометрии) в постоянном магнитном поле ( $\partial B/\partial t = 0$ ). Здесь роль сторонних сил, разделявших разноименные заряды в проводнике, играет составляющая силы Лоренца, направленная параллельно участкам (или одному участку) контура. Если неподвижный проводник находится в изменяющемся со временем поле ( $\partial B/\partial t \neq 0$ ), то механизм возникновения э. д. с. оказывается другим. Изменяющееся магнитное поле возбуждает вихревое электрическое поле, под действием которого и происходит разделение разноименных носителей заряда в проводнике.

### 3.2. Токи Фуко.

Если объемный проводник поместить в изменяющееся во времени магнитное поле  $B(t)$ , то в его объеме возникнут индукционные токи, которые будут течь по некоторым замкнутым траекториям, охватывающим линии  $B$ . Такие токи называются *вихревыми токами* или *токами Фуко*. Французский физик Л. Фуко впервые заметил, что сердечники электрических машин нагреваются, если их пронизывает изменяющееся во времени магнитное поле.

Силу тока и распределение линий вихревых токов в объеме массивного проводника рассчитать достаточно трудно. Плотность вихревых токов зависит от удельного сопротивления материала проводника и от скорости изменения внешнего магнитного поля.

Вихревые токи вызывают нагревание сердечников трансформаторов и металлических частей электрических машин. Для снижения потерь электрической энергии из-за возникновения вихревых токов сердечники трансформаторов изготавливают не из сплошного куска ферромагнетика, а из металлических пластин, отделенных друг от друга диэлектрической прослойкой. Причем плоскости пластин располагаются так, чтобы они были перпендикулярны направлению токов Фуко. Этот технический прием значительно повышает сопротивление сердечника по отношению к вихревым токам и, что очень важно, практически не влияет на его магнитные свойства. Электрическое сопротивление сердечников повышается, если они изготовлены не из металлов, а из магнитодиэлектриков спрессованных под большим давлением смесей порошков ферромагнетиков и диэлектриков. Сердечники из *ферритов* (полупроводниковых ферромагнитных материалов) имеют удельное сопротивление, которое в миллиарды раз превышает удельное сопротивление обычных ферромагнитных веществ.

Если в проводнике, поперечное сечение которого не изменяется, протекает постоянный ток, то плотность тока одинакова в разных точках сечения этого проводника. В случае переменного тока магнитное поле внутри проводника изменяется, и в нем возникают вихревые токи. Эти токи направлены так, что внутри проводника они противодействуют, а вблизи поверхности проводника – способствуют изменению основного тока. Таким образом, в случае переменного тока сопротивление внутренней части проводника будет больше, чем внешней части. Плотность переменного тока максимальна у поверхности проводника и минимальна на его оси. Такое явление получило название **скин-эффекта** (или **поверхностного эффекта**). Для токов высокой частоты применяют проводники трубчатой формы, так как внутренняя часть проводников не играет никакой роли.

Скин-эффект используется для поверхностной закалки различных деталей машин, т. к. при нагревании сплошных проводников токами высокой частоты практически вся теплота выделяется в поверхностном слое. При этом обеспечивается износостойкость детали.

Вихревые токи широко используются для плавки металлов в индукционных печах. В этом случае они должны быть как можно больше, так как согласно закону Джоуля – Ленца количество теплоты, выделившейся в проводнике  $R$ , пропорционально квадрату силы тока. Для увеличения вихревых токов в индукционных печах используются токи высокой частоты, которые создают быстро изменяющееся электромагнитное поле, что в свою очередь приводит к увеличению индуцированной ими ЭДС.

### **3.3. Явление самоиндукции. Индуктивность.**

Если в некотором замкнутом контуре течет непостоянный ток, то магнитное поле, создаваемое этим током, также непостоянно. Следовательно, меняется поток магнитной индукции через площадь, ограниченную контуром самого этого тока. Изменение потока магнитной индукции поведет к возникновению в контуре э. д. с. Таким образом, всякое изменение тока в контуре влечет возникновение э. д. с. индукции в этом же самом контуре. Это явление носит название **явления самоиндукции**.

Из закона Био – Савара – Лапласа следует, что магнитная индукция  $B$  пропорциональна силе тока, которая возбуждает поле. Тогда сила тока  $I$  в контуре и полный магнитный поток  $\Psi_c$  через поверхность, ограниченную контуром, пропорциональны друг другу.

Магнитный поток собственного поля  $\Psi_c$ , пронизывающий площадь, ограниченную контуром тока, равен:

$$\Psi_c = LI, \quad (3.3.1)$$

где коэффициент пропорциональности  $L$  называется **индуктивностью контура**.

Единицей индуктивности служит генри (Гн); 1 Гн – индуктивность такого контура, в котором при силе тока 1 А возникает магнитный поток в 1 Вб.

Как показывает опыт, индуктивность контура зависит от геометрической формы контура и его размеров, его ориентации в пространстве, а также от магнитной проницаемости среды  $\mu$ .

Например, найдем индуктивность соленоида. Возьмем соленоид, общее число витков которого равно  $N$ , сечение витка  $S$ , длина соле-

ноида  $l$ . Пусть полость соленоида заполнена средой с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Будем считать соленоид настолько длинным, что напряженность поля  $B$  внутри его равна  $B = \mu\mu_0 \frac{N}{l} I$ .

Магнитный поток через каждый виток равен  $\Phi_m = BS$ , а поток через все  $N$  витков соленоида (потокосцепление)

$$\Psi_c = N\Phi_m = NBS = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} SI. \quad (3.3.2)$$

Сравнивая (3.3.2) с формулой (3.3.1), получим:

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} S = \mu\mu_0 n^2 V, \quad (3.3.3)$$

где  $n = \frac{N}{l}$  – число витков на единицу длины;  $V = Sl$  – объем соленоида.

Найдем э.д.с. самоиндукции, воспользовавшись законом Фарадея – Ленца:

$$\varepsilon_c = -\frac{d\Psi_c}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left( L \frac{dI}{dt} + I \frac{dL}{dt} \right). \quad (3.3.4)$$

Если контур не деформируется и среда не ферромагнитная, то  $L = \text{const}$ , и из выражения (3.3.4) получим:

$$\varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3.3.5)$$

Знак «минус» в этой формуле соответствует закону Ленца. Под действием э. д. с. самоиндукции возникает индукционный ток, который противодействует изменению тока в цепи: замедляет его возрастание или убывание.

В электрических цепях постоянного тока э. д. с. самоиндукции проявляет себя в моменты включения и отключения источников энергии или изменения потребляемой ими мощности.

#### **3.4. Энергия и объемная плотность энергии магнитного поля.**

Рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рис. 3.4.1.

Пусть при включенной э. д. с. (ключ  $K$  в положении  $1$ ) в цепи течет ток  $I$ , который создает в соленоиде магнитное поле  $B$  и сцепленный с витками соленоида полный поток  $\Psi_c = LI$ .

Если ключ  $K$  перевести в положение  $2$ , то магнитное поле начнет уменьшаться, поскольку в цепи некоторое время будет течь постепенно убывающий ток, который поддерживается возникающей в соле-

ноиде ЭДС самоиндукции. Если считать индуктивность  $L = \text{const}$ , то э. д. с. равна:

$$\varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3.4.1)$$

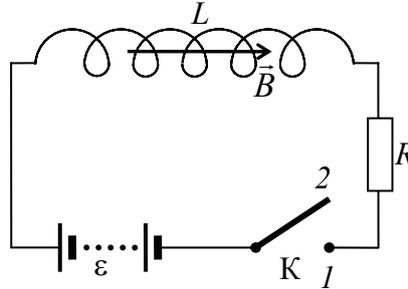


Рис. 3.4.1

Работа, совершаемая этим током за время  $dt$ , равна:

$$\delta A = \varepsilon_c I dt = -LI dI. \quad (3.4.2)$$

Полную работу, которая совершается в цепи за время изменения силы тока от  $I$  до нуля, определим путем интегрирования элементарной работы  $\delta A$ :

$$A = -\int_I^0 LI dI = \frac{1}{2} LI^2. \quad (3.4.3)$$

Эта работа расходуется на изменение внутренней энергии сопротивления  $R$ , т. е. на его нагревание в соответствии с законом Джоуля – Ленца.

Совершение работы сопровождается исчезновением магнитного поля в соленоиде, поэтому естественно предположить, что она выполняется за счет энергии магнитного поля, сосредоточенного внутри соленоида. Следовательно, в общем случае проводник с индуктивностью  $L$ , по которому проходит ток  $I$ , обладает энергией, равной энергии магнитного поля этого тока:

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2. \quad (3.4.4)$$

Энергию магнитного поля можно выразить через величины, характеризующие поле: индукцию  $B$  поля и объем  $V$ , занимаемый этим полем.

Для соленоида  $L = \mu\mu_0 n^2 V$  и  $B = \mu_0 nI$ , поэтому энергия магнитного поля соленоида равна

$$W_m = \frac{1}{2} \mu\mu_0 n^2 VI^2 = \frac{1}{2\mu\mu_0} B^2 V = \frac{1}{2} HBV = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2 V. \quad (3.4.5)$$

Магнитное поле длинного соленоида практически однородно в его объеме. В связи с этим естественно предположить, что энергия магнитного поля  $B$  распределена равномерно с объемной плотностью

$$w_m = \frac{dW_m}{dV} = \frac{1}{2\mu\mu_0} B^2 = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2. \quad (3.4.6)$$

Рассмотрим теперь неоднородное магнитное поле, когда  $B = B(x, y, z)$ . В пределах бесконечно малого объема  $dV$  поле можно считать однородным, поэтому энергия  $dW_m$ , заключенная в этом объеме  $dV$ , равна:

$$dW_m = w_m dV. \quad (3.4.7)$$

Интегрируя это выражение по объему  $V$  поля, мы можем определить полную энергию магнитного поля:

$$W_m = \int_V w_m dV. \quad (3.4.8)$$

### 3.5. Токи при включении и выключении источника тока в электрической цепи (для самостоятельной работы).

Характерным примером явления самоиндукции служат так называемые токи замыкания и размыкания в электрических цепях постоянного тока. При включении (выключении) источника энергии возрастание силы тока при замыкании электрической цепи и убывание силы тока при ее размыкании происходит не мгновенно, а постепенно.

Представим себе, что мы замыкаем контур, в результате чего в нем возникает электрический ток. При этом магнитное поле тока возрастает, а следовательно, возрастает и поток магнитной индукции через площадь, ограниченную контуром. Согласно правилу Ленца, возникающий индукционный ток будет создавать поток индукции, компенсирующий увеличение первоначального магнитного потока. Следовательно, индуцируется ток, создающий магнитное поле, направленное противоположно магнитному полю первоначального тока. Отсюда заключаем, что индукционный ток направлен противоположно замыкаемому току. Этот индуцируемый ток обратного направления называется **током замыкания**. Ток замыкания уменьшает ток, идущий в контуре. Наличие тока замыкания приводит к тому, что нарастание тока в цепи при его включении происходит медленнее, чем при отсутствии тока.

Аналогичное явление мы наблюдаем при размыкании цепи. Если в контуре сила тока падает, то при этом уменьшается поток магнитной индукции через площадь, ограниченную контуром. В контуре индуцируется ток, создающий по правилу Ленца поток индукции, увели-

чивающий уменьшающийся поток, т. е. индуцируется ток в том же направлении, в котором шел основной ток. Этот индуцируемый ток называется **током размыкания**. Ток размыкания направлен в ту же сторону, что и основной ток.

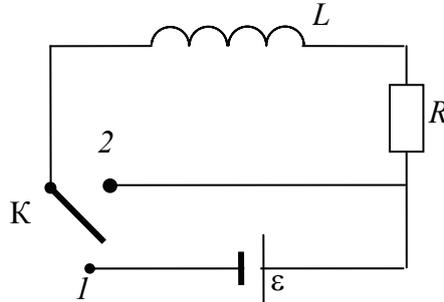


Рис. 3.5.1

Ток замыкания и размыкания можно наблюдать с помощью схемы, представленной на рис. 3.5.1, содержащей индуктивность  $L$ , не зависящую от силы тока  $I$ , сопротивление  $R$  и источник электроэнергии с э. д. с.  $\varepsilon$ .

Определим характер изменения силы тока при замыкании электрической цепи. Переведем переключатель  $K$  в положение  $1$ . В этом случае в цепи будет действовать ЭДС  $\varepsilon$  источника и ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_c = -L \frac{di}{dt}$ . Тогда, благодаря явлению самоиндукции, полная э. д. с. в контуре будет равна  $IR = \varepsilon + \varepsilon_c = \varepsilon - L \frac{di}{dt}$ , откуда сила тока в контуре окажется равной:

$$I = \frac{\varepsilon - L \frac{di}{dt}}{R}. \quad (3.5.1)$$

Замечая, что величина  $\frac{\varepsilon}{R} = I_0$  — установившееся в цепи значение силы тока, который протекал бы по контуру при отсутствии самоиндукции, перепишем выражение (3.5.1) в виде:

$$I_0 - I = \frac{L}{R} \frac{dI}{dt}. \quad (3.5.2)$$

Так как значение  $I_0$  постоянно, то  $dI$  можно заменить на  $-d(I_0 - I)$ , тогда  $\frac{d(I_0 - I)}{I_0 - I} = -\frac{R}{L} dt$ . Интегрируя обе части этого выражения, получим:

$$\ln(I_0 - I) = -\frac{R}{L}t + \ln C. \quad (3.5.3)$$

Произвольную постоянную  $\ln C$  определим из условия, что  $I = 0$  при  $t = 0$ , откуда  $\ln C = \ln I_0$  и выражение (3.5.3) принимает вид:

$$\ln \frac{I_0 - I}{I_0} = -\frac{R}{L}t \Rightarrow I_0 - I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}, \quad (3.5.4)$$

или окончательно получим:

$$I = I_0(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}). \quad (3.5.5)$$

Это выражение показывает, что *при включении э. д. с. ток в цепи не сразу достигает значения  $I_0$ , но достигает его постепенно* и тем медленнее, чем больше коэффициент самоиндукции контура  $L$  и чем меньше сопротивление контура  $R$ . Графически зависимость силы тока от времени при включении изображена на рис. 3.5.2, кривая 1. Теоретически ток должен достигнуть своего конечного значения  $I_0$  лишь через бесконечно большой промежуток времени. Практически для обычных значений коэффициента самоиндукции  $L$ , ток достигает своего предельного значения весьма быстро.

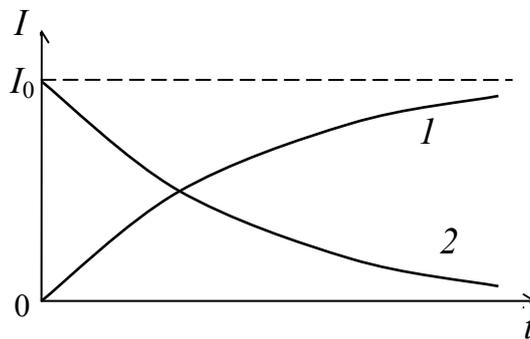


Рис. 3.5.2

Величина  $\frac{L}{R} = \tau$ , имеющая размерность времени, называется **постоянной цепи**.

Теперь рассмотрим случай размыкания цепи. Для этого переключатель К (рис. 3.5.1) переведем из положения 1 в положение 2.

Чтобы выяснить характер тока размыкания, предположим, что в некотором контуре первоначально существовала э. д. с., которая поддерживала в нем силу тока  $I_0$ . Затем в момент времени, для которого мы примем  $t = 0$ , эта э. д. с. выключается, но контур остается замкну-

тым, причем полное сопротивление его равно  $R$ . Тогда в контуре ток прекратится не сразу, но будет продолжать идти еще некоторое время за счет э. д. с. самоиндукции  $\varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt}$ .

Сила тока самоиндукции определится законом Ома:  $I_c = \frac{\varepsilon_c}{R} = -\frac{L}{R} \frac{dI}{dt}$ .

Это равенство можно переписать в виде:  $\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt$ , что представляет собой дифференциальное уравнение, определяющее зависимость силы тока самоиндукции от времени.

Интегрируя правую и левую части уравнения, получим:

$$\ln I = -\frac{R}{L}t + \ln C, \quad (3.5.6)$$

где  $C$  – произвольная постоянная. Значение этой произвольной постоянной получим из условия, что  $I = I_0$  при  $t = 0$ , откуда:  $\ln I_0 = \ln C$ . Таким образом, получим:

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L}t, \text{ или } I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (3.5.7)$$

Это соотношение показывает, что сила тока при выключении э. д. с. спадает по экспоненциальному закону, при этом спадает тем медленнее, чем больше коэффициент самоиндукции  $L$  и чем меньше сопротивление  $R$ . Зависимость силы тока размыкания от времени графически представлена на рис. 3.5.2, кривая 2.

Время  $t_0$ , в течение которого сила тока размыкания спадает до половины своей первоначальной величины, определится из соотношения  $I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ , если в нем положить  $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{2}$ , откуда  $t_0 = \ln 2 \frac{L}{R}$ . Скорость убывания определяется постоянной времени цепи:  $\tau = \frac{L}{R}$ . Величина  $\tau$  есть время, в течение которого сила тока уменьшается в  $e$  раз ( $e = 2,72$  – основание натурального логарифма).

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.5.8)$$

Существование токов размыкания позволило обнаружить явление *сверхпроводимости*. При сверхпроводимости  $R \rightarrow 0$  и ток после выключения э. д. с. будет продолжаться в контуре сколь угодно долго, не ослабевая. Опыты Каммерлинг – Оннеса, приведшие к от-

крытию сверхпроводимости, производились следующим образом: соленоид, концы которого были соединены друг с другом, помещался между полюсами электромагнита, после чего охлаждался жидким гелием до температуры, при которой материал его провода становился сверхпроводящим. Затем магнитное поле электромагнита выключалось. При этом в соленоиде возникал индукционный ток. При обычных условиях этот ток прекратился бы через весьма малый промежуток времени. При наличии же сверхпроводимости он продолжал идти по соленоиду в течение многих часов, не обнаруживая заметного ослабления.

## Тема 4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

### Лекция № 5

4.1. Атом в магнитном поле. Магнитные моменты электронов и атомов. Орбитальный и спиновой магнитные моменты.

4.2. Намагниченность. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость среды.

#### ***4.1. Атом в магнитном поле. Магнитные моменты электронов и атомов. Орбитальный и спиновой магнитные моменты.***

Все вещества, помещенные в магнитное поле, намагничиваются. Для объяснения намагничивания тел французский физик Андре-Мари Ампер предположил, что в молекулах вещества циркулируют круговые токи, которые называются молекулярными токами (микротоки). Каждый такой ток обладает магнитным моментом и создает в окружающем пространстве магнитное поле. В отсутствие внешнего магнитного поля молекулярные токи ориентированы беспорядочным образом, вследствие чего обусловленное ими результирующее поле равно нулю. Под действием внешнего магнитного поля магнитные моменты молекул приобретают преимущественную ориентацию в одном направлении, вследствие чего вещество (магнетик) намагничивается – его суммарный магнитный момент становится отличным от нуля. Магнитные поля отдельных молекулярных токов в этом случае уже не компенсируют друг друга, и возникает внутреннее магнитное поле индукцией  $\vec{B}^i$ , которое накладывается на внешнее магнитное поле индукцией  $\vec{B}_0$ . Индукция результирующего магнитного поля равна:

$$\vec{B} = \vec{B}^i + \vec{B}_0. \quad (4.1.1)$$

Природа молекулярных токов стала понятней после того, как опытами английского физика Эрнеста Резерфорда было установлено, что атомы всех веществ состоят из положительно заряженного ядра и движущихся вокруг него отрицательно заряженных электронов.

Пусть электрон движется со скоростью  $\vec{v}$  по орбите радиуса  $R$  (рис. 4.1.1). Через площадку, расположенную в любом месте на пути электрона, за один оборот переносится заряд

$$q = e, \quad (4.1.2)$$

где  $e$  – элементарный заряд. Следовательно, движущийся по орбите электрон образует круговой ток силы

$$I = \frac{e}{T} = en, \quad (4.1.3)$$

где  $T$  и  $n$  – период и частота вращения электрона соответственно.

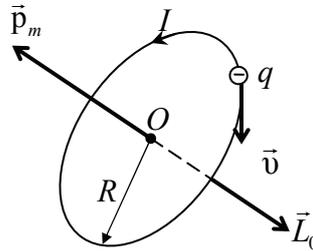


Рис. 4.1.1

Поскольку заряд электрона отрицательный, направление движения электрона и направление тока противоположны. Магнитный момент тока, создаваемого электроном, равен:

$$p_m = IS = en\pi R^2. \quad (4.1.4)$$

Скорость движения электрона равна:

$$v = 2\pi nR. \quad (4.1.5)$$

С учетом формулы (4.1.5) получается:

$$p_m = \frac{evR}{2}. \quad (4.1.6)$$

Момент  $\vec{p}_m$ , обусловленный движением электрона по орбите, называется *орбитальным магнитным моментом электрона*.

С другой стороны, движущийся по орбите электрон обладает моментом импульса, равным:

$$L_0 = m_e v R, \quad (4.1.7)$$

где  $m_e$  – масса электрона.

Вектор момента импульса  $\vec{L}_0$  называют *орбитальным моментом импульса электрона*. Направления векторов  $\vec{p}_m$  и  $\vec{L}_0$  противоположны (рис. 4.1.1).

Отношение магнитного момента элементарной частицы к ее моменту импульса называется *гиромагнитным отношением*. Для электрона *орбитальное гиромагнитное отношение* равно:

$$\frac{p_m}{L_0} = -\frac{e}{2m_e}, \quad (4.1.8)$$

С учетом взаимного расположения (направления моментов  $\vec{p}_m$  и  $\vec{L}_0$  противоположны) получаем

$$\vec{p}_m = -g_{\text{орб}} \vec{L}_0, \quad (4.1.9)$$

где  $g_{\text{орб}} = \frac{e}{2m_e}$  – орбитальное гиромагнитное соотношение.

Взаимосвязь магнитного момента и орбитального момента импульса лежит в основе *магнитомеханических явлений*, заключающихся в том, что вращение магнетика вызывает его намагничиванию и, наоборот, намагничивание магнетика приводит к его вращению. Существование первого явления было экспериментально доказано американским физиком Сэмюэлем Барнеттом в 1909 году, второго – немецким физиком Альбертом Эйнштейном и голландским физиком Вандером Йоханнесом де Хаасом в 1915 году.

В основе опыта Эйнштейна и де Хааса лежат следующие соображения. Если намагнитить стержень из магнетика, то магнитные моменты электронов установятся по направлению поля, механические моменты – против поля. В результате суммарный момент импульса электронов  $\sum \vec{L}_i$  станет отличным от нуля (первоначально вследствие хаотической ориентации моментов отдельных электронов он был равен нулю). Момент импульса системы «кристаллическая решетка и электроны» должен остаться без изменений (согласно закону сохранения момента импульса). Поэтому стержень приобретает момент импульса, равный  $\sum \vec{L}_i$  и направленный противоположно суммарному моменту импульса электронов, и, следовательно, приходит во вращение.

Опыт Эйнштейна и де Хааса осуществлялся следующим образом (рис. 4.1.2). Тонкая железная проволока подвешивалась на упругой нити и помещалась внутрь соленоида. Закручивание нити при намагничивании образца постоянным магнитным полем получалось весьма малым. Для усиления эффекта был применен метод резонанса: по цепи соленоида пропускали переменный ток, частота которого подбиралась равной собственной частоте механических колебаний системы. При этих условиях амплитуда колебаний достигала наибольших значений, которые можно было измерить, наблюдая смещения светового зайчика, отраженного от зеркальца, укрепленного на нити. Из данных опыта было вычислено гиромагнитное отношение, которое оказалось равным  $-\frac{e}{m_e}$ . Таким образом, знак заряда носителей,

создающих молекулярные токи, совпал со знаком заряда электрона. Однако полученный результат превысил ожидаемое значение гиромагнитного отношения в два раза.

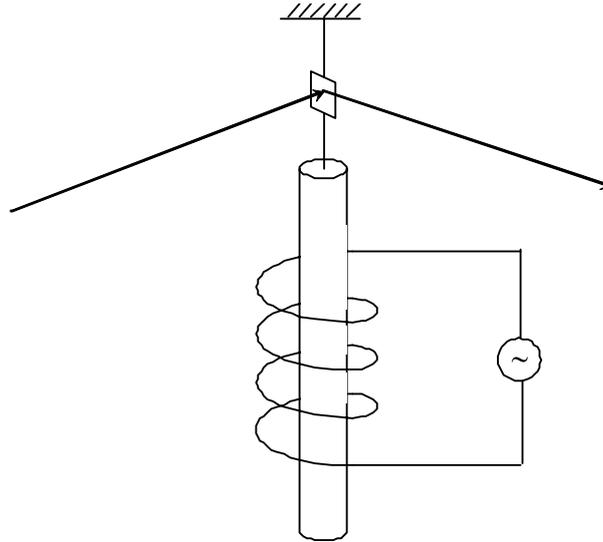


Рис. 4.1.2

С. Барнетт приводил железный стержень в очень быстрое вращение вокруг его оси и измерял возникающее при этом намагничивание. Из результатов этого опыта С. Барнетт также получил для гиромагнитного отношения величину, в два раза большую.

В дальнейшем выяснилось, что, кроме орбитального момента импульса, электрон обладает *собственным моментом импульса*  $L_S$  или *спином*. Первоначально предполагалось, что он образуется вследствие вращения электрона вокруг собственной оси. В соответствии с этим собственный механический момент электрона получил название спин (от английского to spin – вращаться). Однако в дальнейшем выяснилось, что спин является первичной характеристикой электрона, которую нельзя свести к более простым понятиям (как, например, масса и заряд).

Собственный магнитный момент электрона  $p_S$  связан со спином *спиновым гиромагнитным соотношением*:

$$\vec{p}_S = -g_S \vec{L}_S, \quad (4.1.10)$$

где  $g_S = e/m_e$  – спиновое гиромагнитное соотношение.

Спиновое гиромагнитное соотношение совпадает со значением, полученным в опытах Эйнштейна и де Хааса, а также Барнетта. Отсюда следует, что магнитные свойства железа обусловлены не орбитальным, а собственным магнитным моментом электронов.

Спином обладают не только электроны, но и другие элементарные частицы. Собственным магнитным моментом обладают также ядра атомов (что обусловлено магнитными моментами входящих в состав ядра элементарных частиц – протонов и нейтронов).

Таким образом, магнитный момент атома складывается из орбитальных и собственных моментов входящих в его состав электронов, а также из магнитного момента ядра.

#### 4.2. Намагниченность. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость среды.

Для количественного описания намагничивания магнетиков вводят векторную величину – *намагниченность*, которая определяется магнитным моментом единицы объема магнетика:

$$\vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_m, \quad (4.2.1)$$

где  $\Delta V$  – физически бесконечно малый объем, взятый в окрестности рассматриваемой точки.

Намагниченность принято связывать не с магнитной индукцией, а с напряженностью магнитного поля. В несильных полях намагниченность прямо пропорциональна напряженности поля, вызывающего намагничивание:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (4.2.2)$$

где  $\chi$  – характерная для каждого магнетика безразмерная величина, называемая *магнитной восприимчивостью вещества*.

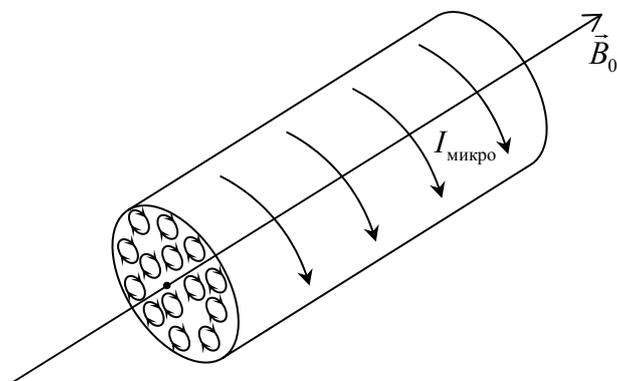


Рис. 4.2.1

Для описания поля, создаваемого молекулярными токами, рассмотрим магнетик в виде кругового цилиндра сечения  $S$  и длины  $l$ , внесенного в однородное внешнее магнитное поле с индукцией  $B_0$ . Плоскости всех молекулярных токов располагаются перпендикулярно вектору  $\vec{B}_0$  (рис. 4.2.1). Если рассмотреть любое сечение цилиндра, перпендикулярное его оси, то во внутренних участках сечения магне-

тика молекулярные токи соседних атомов направлены навстречу друг другу и взаимно компенсируются. Нескомпенсированными будут лишь молекулярные токи, выходящие на боковую поверхность цилиндра (рис. 4.2.1). Ток, текущий по боковой поверхности цилиндра, подобен току в соленоиде и создает внутри него поле, магнитную индукцию  $B^i$  которого можно вычислить по формуле (1.6.4) (если представить что рассматриваемый магнетик является соленоидом, состоящим из одного витка):

$$B^i = \mu_0 \frac{I_{\text{микро}}}{l}, \quad (4.2.3)$$

где  $I_{\text{микро}}$  – сумма сил молекулярных токов, текущих по поверхности цилиндра;  $l$  – длина рассматриваемого цилиндра.

Магнитный момент этого тока

$$p_m = I_{\text{микро}} S = \frac{I_{\text{микро}} S l}{l} = \frac{I_{\text{микро}}}{l} V, \quad (4.2.4)$$

где  $V$  – объем магнетика.

Намагниченность  $J$  магнетика будет равна:

$$J = \frac{p_m}{V} = \frac{I_{\text{микро}}}{l}. \quad (4.2.5)$$

Сопоставляя формулу (4.2.3) и (4.2.5), получим:

$$B^i = \mu_0 J \text{ или } \vec{B}^i = \mu_0 \vec{J}. \quad (4.2.6)$$

Подставим (4.2.6) в (4.2.1) и получим:

$$\vec{B} = \vec{B}^i + \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J} + \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{H}, \quad (4.2.7)$$

с учетом (4.2.6)

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{H} = \mu_0 \chi \vec{H} + \mu_0 \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (4.2.8)$$

где  $1 + \chi = \mu$  – безразмерная величина, называемая *магнитной проницаемостью среды*. Магнитная проницаемость среды показывает, во сколько раз индукция магнитного поля в веществе больше индукции поля в вакууме при одной и той же его напряженности:

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{B}{B_0}. \quad (4.2.9)$$

Так как магнитная восприимчивость  $\chi$  бывает как положительной, так и отрицательной, то магнитная проницаемость среды  $\mu$  может быть как больше, так и меньше единицы.

## Лекция № 6

- 4.3. Типы магнетиков. Элементарная теория диа- и парамагнетизма.
- 4.4. Ферромагнетики. Магнитный гистерезис. Точка Кюри.
- 4.5. Эффекты, наблюдаемые в ферромагнетиках и их применение.
- 4.6. Условия для магнитного поля на границе раздела двух изотропных сред (для самостоятельной работы).

### 4.3. Типы магнетиков. Элементарная теория диа- и парамагнетизма.

Выделяют такие типы магнетиков, как диа- и парамагнетики.

#### Диамагнетики

У диамагнитных веществ суммарный магнитный момент атома равен нулю, так как имеющиеся в атоме орбитальные, спиновые и ядерные моменты взаимно компенсируются (рис. 4.3.1, *а*). Однако электронные орбиты атома под действием внешнего магнитного поля совершают прецессионное движение, которое эквивалентно круговому току. Так как этот микроток индуцирован внешним магнитным полем, то, согласно правилу Ленца, его собственное магнитное поле, а следовательно и магнитный момент направлены противоположно внешнему полю (рис. 4.3.1, *б*). Индуцированные магнитные моменты атомов (молекул) складываются и образуют собственное магнитное поле вещества, ослабляющее внешнее магнитное поле. Этот эффект получил название диамагнитного эффекта, а вещества, намагничивающиеся во внешнем магнитном поле против направления поля, назвали диамагнетиками. Так как диамагнитный эффект обусловлен действием внешнего магнитного поля на электроны атомов вещества, то диамагнетизм свойствен всем веществам.

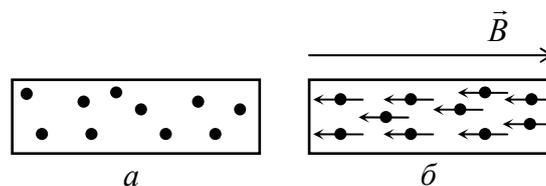


Рис. 4.3.1

Рассмотрим намагничивание диамагнетика (рис. 4.3.2). В отсутствие магнитного поля ( $B = 0$ ) электрон движется в электрическом поле ядра атома по вполне определенной стационарной орбите. Электрон на круговой орбите удерживается силой кулоновского притяжения к ядру. При этом электрон обладает орбитальным механическим моментом и

магнитным моментом, которые связаны между собой гиромангнитным отношением  $g_{\text{орб}}$ . Поскольку  $B = 0$ , оба эти вектора  $\vec{L}_0$  и  $\vec{p}_m$  сохраняют свое направление в пространстве (если не принимать во внимание тепловое движение атомов). Во внешнем магнитном поле индукцией  $B$  на электрон в атоме будет действовать вращающий момент

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}]. \quad (4.3.1)$$

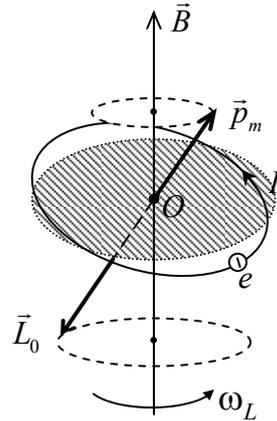


Рис. 4.3.2

С учетом выражения (4.1.9) он будет равен:

$$\vec{M}_0 = -g_{\text{орб}} [\vec{L}_0 \times \vec{B}]. \quad (4.3.2)$$

Согласно закону об изменении момента импульса получаем:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}_0}{dt} = -g_{\text{орб}} [\vec{L}_0 \times \vec{B}] \Rightarrow \frac{d\vec{L}_0}{dt} = [g_{\text{орб}} \vec{B} \times \vec{L}_0]. \quad (4.3.3)$$

Уравнения (4.3.3) по виду совпадают с кинематическим выражением для скорости  $\vec{v}$  движения точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]. \quad (4.3.4)$$

Сопоставляя уравнение (4.3.4) с соотношением (4.3.3), можно прийти к выводу, что вектор  $\vec{L}_0$  орбитального момента импульса и связанный с ним вектор  $\vec{p}_m$  магнитного момента совершают в магнитном поле прецессионное движение вокруг оси (рис. 4.3.2), параллельной вектору  $\vec{B}$  с угловой скоростью

$$\omega_L = g_{\text{орб}} B = \frac{eB}{2m_e}. \quad (4.3.5)$$

Угловая скорость прецессии  $\omega_L$  совпадает по направлению с вектором индукции  $B$  (рис. 4.3.2). Прецессионное движение электронных орбит открыл в 1895 г. ирландский физик Джозеф Лармор. Он сформулировал теорему (*теорема Лармора*): единственным результатом действия магнитного поля на движение электрона в атоме является прецессия электронных орбит вокруг оси, параллельной магнитному полю и проходящей через ядро атома, причем модуль угловой скорости  $\omega_L = \frac{eB}{2m_e}$ . А прецессионное движение электронных орбит носит название *прецессия Лармора*.

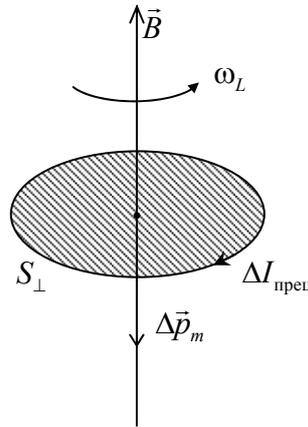


Рис. 4.3.3

Прецессия электронных орбит приводит к появлению дополнительного орбитального тока (рис. 4.3.3):

$$\Delta I_{\text{прец}} = \frac{e}{T_L} = \frac{e\omega_L}{2\pi} = \frac{e^2 B}{4\pi m_e}. \quad (4.3.6)$$

Этот ток создает индуцированный (наведенный) орбитальный магнитный момент:

$$\Delta p_m = \Delta I_{\text{прец}} S_{\perp} = \frac{e^2 B}{4\pi m_e} S_{\perp}, \quad (4.3.7)$$

где  $S_{\perp}$  – площадь проекции орбиты на плоскость перпендикулярную вектору  $B$ .

Так как вектор  $\Delta \vec{p}_m$  направлен против внешнего поля, то можно записать

$$\Delta \vec{p}_m = -\frac{e^2 S_{\perp}}{4\pi m_e} \vec{B}. \quad (4.3.8)$$

Для атома, имеющего  $Z$  электронов, общий наведенный орбитальный магнитный момент равен:

$$\Delta \vec{p}_m = -\frac{Ze^2 B}{4\pi m_e} S_{\perp} \vec{B}. \quad (4.3.9)$$

Этот дополнительный магнитный момент приводит к возникновению индуцированной намагниченности, направленной против внешнего поля  $B$ . Он играет определяющую роль при объяснении явления намагничивания диамагнетиков.

Найдем намагниченность диамагнетика. Вектор намагниченности диамагнетика будет равен:

$$\vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \Delta \vec{p}_{mi} = -\frac{1}{\Delta V} N \vec{B} = -n \frac{Ze^2 S_{\perp}}{4\pi m_e} \vec{B} = -n \frac{Ze^2 S_{\perp}}{4\pi m_e} \mu_0 \vec{H}. \quad (4.3.10)$$

Сравнивая формулу (4.3.10) с (4.2.2) получим:

$$\chi = -n \frac{Ze^2 S_{\perp}}{4\pi m_e}. \quad (4.3.11)$$

Оценка по формуле (4.3.11) и экспериментальные данные показывают, что значение магнитной восприимчивости для диамагнетиков практически составляет порядка  $\chi = -10^{-6}$ .

Восприимчивость диамагнетиков почти не зависит от температуры  $T$  и напряженности  $H$  магнитного поля. Поэтому процесс намагничивания диамагнетиков характеризуется линейной зависимостью  $J$  от  $H$  (рис. 4.3.4).

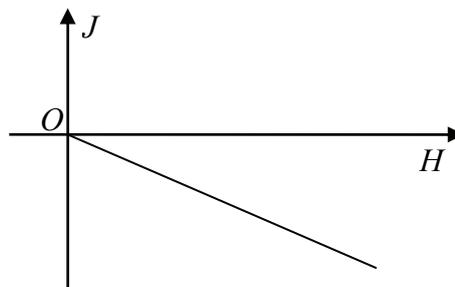


Рис. 4.3.4

### *Парамагнетики*

Наряду с диамагнитными веществами существуют и парамагнитные — вещества, намагничивающиеся во внешнем магнитном поле по направлению поля.

У парамагнитных веществ при отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты электронов не компенсируют друг друга, и

атомы (молекулы) парамагнетиков всегда обладают магнитным моментом. Однако вследствие теплового движения молекул их магнитные моменты ориентированы беспорядочно (рис. 4.3.5, *a*), поэтому парамагнитные вещества магнитными свойствами не обладают. При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле устанавливается преимущественная ориентация магнитных моментов атомов по полю (полной ориентации препятствует тепловое движение атомов) (рис. 4.3.5, *б*). Таким образом, парамагнетик намагничивается, создавая собственное магнитное поле, совпадающее по направлению с внешним полем и усиливающее его. Этот эффект называется *парамагнитным*. При ослаблении внешнего магнитного поля до нуля ориентация магнитных моментов вследствие теплового движения нарушается и парамагнетик размагничивается.

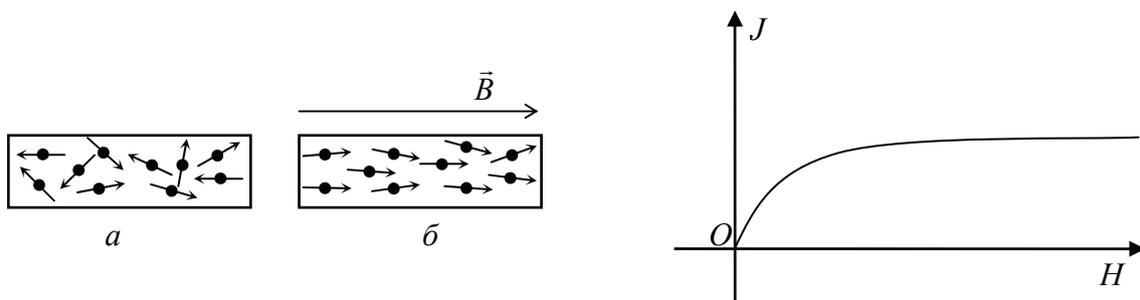


Рис. 4.3.5

Рис. 4.3.6

Процесс намагничивания парамагнетиков во многом аналогичен тому, как поляризуется диэлектрик, состоящий из полярных молекул. Кривая намагничивания парамагнетиков (рис. 4.3.6) указывает на явление насыщения, которое связано с ориентационным упорядочением магнитных моментов молекул вещества. Классическая статистическая теория парамагнетизма была построена французским физиком Полем Ланжевенем в 1905 г. Согласно этой теории в не очень сильных однородных постоянных магнитных полях, когда потенциальная энергия «элементарного тока» намного меньше характерной тепловой энергии, восприимчивость  $\chi$  парамагнетика оказывается обратно пропорциональна температуре:

$$\chi = \frac{\mu_0 n p_m^2}{3kT}. \quad (4.3.12)$$

Значения проницаемости  $\chi$  парамагнетика лежит в пределах  $10^{-5}$ – $10^{-3}$ .

Подводя итог, отметим, что атомы всех веществ являются носителями диамагнитных свойств. Если магнитный момент атомов велик,

то парамагнитные свойства преобладают над диамагнитными и вещество является парамагнетиком. Если магнитный момент атомов мал, то преобладают диамагнитные свойства и вещество является диамагнетиком.

#### 4.4. Ферромагнетики. Магнитный гистерезис. Точка Кюри.

Некоторые из веществ обладают свойством давать весьма большое добавочное поле. Такие вещества характеризуются большой магнитной проницаемостью  $\mu$  ( $\sim 10^4-10^5$ ) и называются *ферромагнитными*. К числу ферромагнитных веществ относятся железо, никель, кобальт, их сплавы и некоторые сплавы неферромагнитных веществ.

Ферромагнитные вещества обладают рядом особенностей:

– они сохраняют намагниченность и после того, как намагничивающее поле прекратило свое действие;

– магнитная проницаемость  $\mu$  (а также магнитная восприимчивость  $\chi$ ) для них не являются величиной постоянной, а зависят от напряженности намагничивающего поля (рис. 4.4.1). Зависимость магнитной проницаемости  $\mu$  (или восприимчивость  $\chi$ ) от  $H$  характеризуется тем, что  $\mu$  (или  $\chi$ ) сначала сильно возрастает с увеличением напряженности намагничивающего поля, а затем, достигнув максимума, начинает уменьшаться. При больших значениях намагничивающего поля значение  $\mu$  стремится к единице, а  $\chi$  – к нулю.

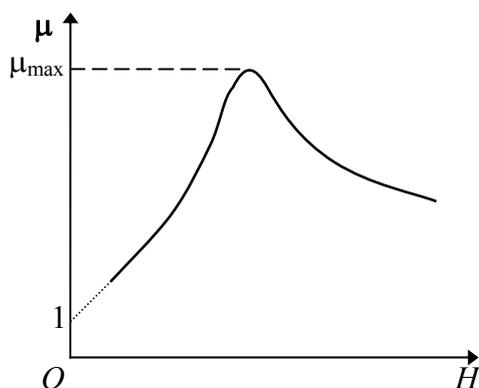


Рис. 4.4.1

Рассмотрим графическую зависимость намагничивания  $J$  от напряженности поля  $H$  (рис. 4.4.2). Как видно из графика, намагничивание быстро возрастает с увеличением напряженности, а затем возрастание уменьшается, и, наконец, начиная с некоторого значения  $H$ , дальнейшее увеличение напряженности не дает увеличения намагничивания  $J$ , что соответствует горизонтальному участку графика. Это

явление, открытое русским физиком Александром Григорьевичем Столетовым (1872 г.), носит название *магнитного насыщения*.

Зависимость магнитной индукции  $B$  от напряженности намагничивающего поля  $H$  выражается сходным графиком, не имеющим, однако, горизонтальной части (рис. 4.4.3). При насыщении магнитная индукция растет по линейному закону в зависимости от напряженности внешнего поля.

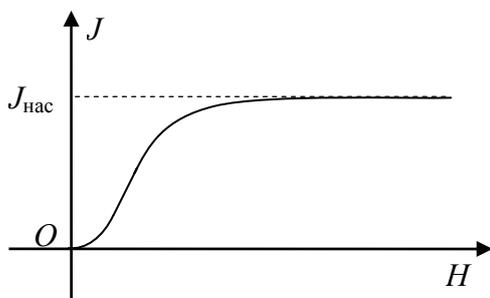


Рис. 4.4.2

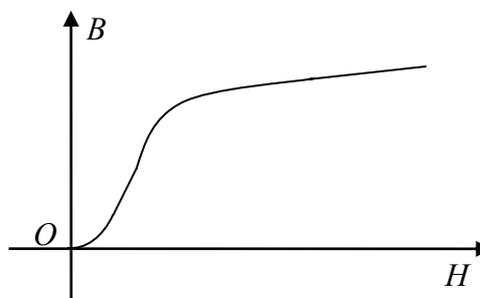


Рис. 4.4.3

Весьма важной особенностью ферромагнетиков является *магнитный гистерезис*. Явление гистерезиса заключается в том, что намагниченность  $J$  (следовательно, и магнитная индукция  $B$ ) зависит, не только от значения напряженности намагничивающего поля  $H$  в данный момент, но и от того, какова напряженность была раньше.

На рис. 4.4.4 приведен график зависимости  $J$  от  $H$ . Ветвь кривой  $OA$  дает возрастание намагниченности  $J$  при увеличении поля  $H$  при условии, что намагничивание производится первый раз. Точка  $A$  соответствует насыщению (намагниченность достигает максимального значения  $J_{\text{нас}}$ ). Если после того как насыщение достигнуто, начать уменьшать напряженность поля  $H$ , то намагниченность  $J$  будет спадать не по кривой  $AO$ , а по новой кривой  $AC$ . Тем же самым значениям  $H$ , проходимым в обратном порядке, соответствуют большие значения  $J$ . При  $H = 0$  намагниченность полностью не пропадает, а сохраняется *остаточная намагниченность*  $J_{\text{ост}}$ . Чтобы вызвать дальнейшее уменьшение  $J$ , надо изменить направление намагничивающего поля  $H$  на обратное. При некотором определенном  $H = -H_c$  намагниченность  $J$  пропадает (точка  $D$ ). Значение  $H_c$  называется *коэрцитивной силой*. При еще большем возрастании напряженность  $H$  обратного по направлению поля возникает намагниченность обратного знака. Здесь может быть также достигнуто насыщение (точка  $A'$ ). Далее уменьшая напряженность обратного по направлению магнитного поля до нуля получаем остаточную намагниченность  $-J_{\text{ост}}$  (точка  $C'$ ). Чтобы убрать остаточную намагниченность необходимо приложить поле напряжен-

ностью  $+H_c$  (точка  $D'$ ). Если затем напряженность  $H$  магнитного поля увеличивать до значения  $+H_{\text{нас}}$ , то зависимость  $J$  от  $H$  изобразится симметричной кривой  $ACDA'C'D'A$ , которую назвали *петлей гистерезиса*. Если намагниченность ферромагнетика достигает насыщения, то петля гистерезиса называется *максимальной* (рис. 4.4.4, сплошная линия). Если в процессе намагничивания ферромагнетика насыщение не достигается, то полученную петлю гистерезиса называют *частным циклом* (рис. 4.4.4, пунктирная линия). Все частные циклы лежат внутри максимальной петли гистерезиса.

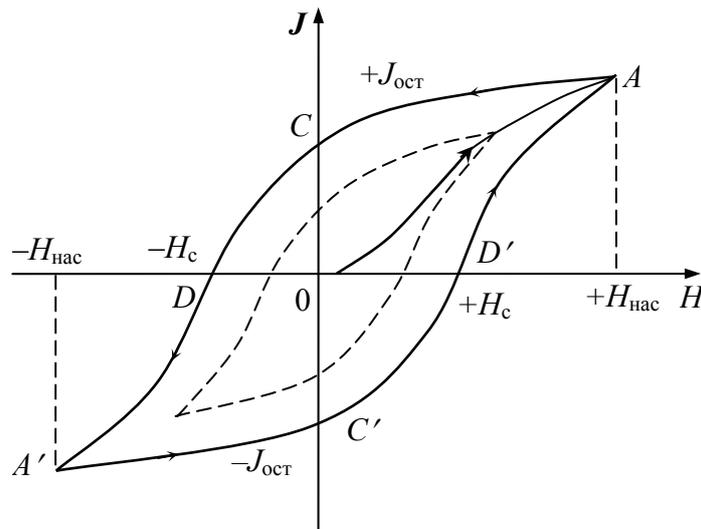


Рис. 4.4.4

В результате явления гистерезиса одному и тому же значению намагничивающего поля  $H$  могут соответствовать несколько значений намагниченности  $J$ . Например,  $H = 0$  соответствуют: 1) отсутствие намагниченности (точка 0); 2) намагниченность, выражаемая отрезком  $OD$  (имеет место после намагничивания ферромагнетика); 3) намагниченность, выражаемая отрезком  $OD'$  (имеет место после перемагничивания ферромагнетика).

Различные ферромагнитные вещества дают весьма разнообразные кривые гистерезиса. Ферромагнитные свойства оказываются тесно связанными с кристаллической структурой вещества. Кривые намагничивания (петли гистерезиса) реальных материалов зависят от их мелкокристаллической структуры и меняются под влиянием внешних воздействий. Принято различать «магнитомягкие» ферромагнетики, характеризуемые малой коэрцитивной силой, и «магнитожесткие», характеризуемые большой коэрцитивной силой. Магнитомягкие ферромагнетики используются для изготовления сердечников электрических машин (трансфор-

маторов, генераторов, электродвигателей). Магнитожесткие ферромагнетики используются как постоянные магниты.

Ферромагнетизм специфически связан с твердой фазой вещества. Для всякого ферромагнетика существует такая температура  $T = \Theta$ , при которой его ферромагнитные свойства пропадают. Эта температура  $\Theta$  называется *температурой* или *точкой Кюри*. При температурах, лежащих выше точки Кюри, ферромагнетик ведет себя, как обычное парамагнитное вещество. В точке Кюри наблюдается не только исчезновение ферромагнитных свойств у вещества, но и аномалия в ряде других их свойств, например, аномалия в ходе теплоемкости, электропроводности и т. д.

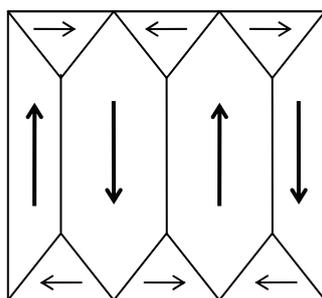


Рис. 4.4.5

Рассмотренные особенности ферромагнетика обусловлены тем, что в нем имеется множество сравнительно крупных самопроизвольно намагниченных областей, называемых *доменами* (рис. 4.4.5). Домены содержат большое число атомов, и в пределах одного домена спиновые магнитные моменты электронов всех атомов ориентированы одинаково. Это упорядочение определяется специфическим (квантовомеханическим) взаимодействием спинов молекул ферромагнитных веществ. Возникновение доменной структуры соответствует минимуму энергии тела.

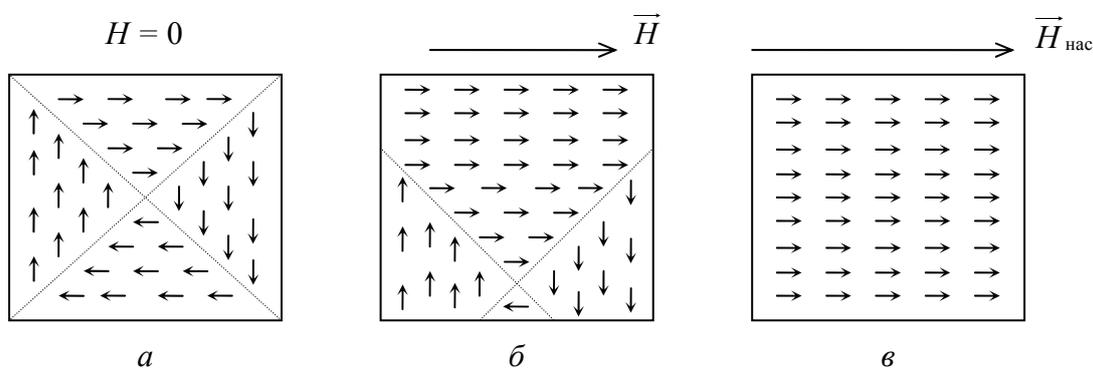


Рис. 4.4.6

При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты различных доменов ориентированы беспорядочно, в результате чего тело в среднем не намагничено (рис. 4.4.6, а). С появлением внешнего магнитного поля домены, ориентированные в направлении этого поля начинают увеличиваться в объеме за счет соседних доменов, имеющих иные ориентации магнитных моментов. Ферромагнетик начинает намагничиваться (рис. 4.4.6, б). Сначала при увеличении напряженности внешнего поля происходит обратимый рост границ доменов, ориентированных по полю (рис. 4.4.7, область 1); при дальнейшем возрастании поля происходит необратимый рост границ доменов (рис. 4.4.7, область 2). Далее происходит переворачивание доменов, ориентированных против поля, в направлении внешнего поля (рис. 4.4.7, область 3). При достаточно сильных полях все домены ориентируются в направлении поля (ферромагнетик представляет собой один монодомен) и намагничивание достигает насыщения (рис. 4.4.6, в).

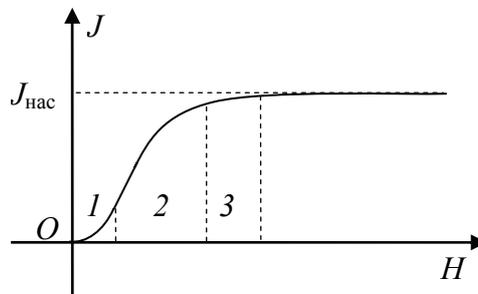


Рис. 4.4.7

При выключении внешнего поля тепловое движение не в состоянии полностью разрушить преимущественную ориентацию доменов. Поэтому ферромагнетики полностью не размагничиваются, а сохраняют остаточную индукцию (намагниченность). Этим объясняется явление гистерезиса.

При нагревании ферромагнетика до точки Кюри тепловое движение молекул становится достаточно интенсивным, чтобы разрушить домены. Поэтому исчезает спонтанная намагниченность, и ферромагнетик ведет себя как обычный парамагнетик. Процесс, связанный переходом через точку Кюри, не сопровождается выделением или поглощением теплоты, что указывает на фазовый переход второго рода.

#### **4.5. Эффекты, наблюдаемые в ферромагнетиках, и их применение.**

##### *Магнитострикционный эффект*

При намагничивании ферромагнетиков наблюдается явление магнитострикции (от лат. *strictio* – сжатие, натягивание), которое состоит в

изменении формы и объема образца. Этот эффект открыт английским физиком Джеймсом Прескоттом Джоулем в 1842 году. Изменение энергетического состояния кристаллической решетки в магнитном поле приводит к изменению расстояний между узлами решетки и, как следствие, изменению размеров и формы кристаллического тела.

Этот эффект используется в магнитострикционных датчиках устройств микроперемещений, реле, магнитострикционных преобразователях излучателей и приемников звука, фильтров, стабилизаторов частоты, линий задержки в радиотехнических и акустических устройствах, а также в магнитострикционных источниках ультразвука.

#### *Магнитоупругий эффект*

Магнитоупругий эффект был открыт итальянским физиком Э. Виллари в 1865 году. Он заключается в изменении намагниченности тела при его деформации (эффект, обратный магнитострикции) и обусловлен перестроением под действием механических напряжений доменной структуры ферромагнетика, определяющей его намагниченность. Данный эффект применяется в магнитоупругих датчиках, которые представляют собой измерительные преобразователи механических усилий или давления в электрический сигнал. Магнитоупругий датчик выполняется в виде катушки индуктивности с ферромагнитным сердечником, намагниченность которого (следовательно, и индуктивность катушки) меняется при деформации сердечника под действием измеряемой величины.

#### *Магнитокалорический эффект*

Магнитокалорический эффект – это изменение температуры магнетика под действием магнитного поля. Как правило, в условиях теплоизоляции намагничивание приводит к увеличению температуры, а размагничивание – к ее снижению. Этот эффект применяется для магнитного охлаждения вещества (адиабатическое размагничивание). Магнитокалорический эффект, впервые был обнаружен в железе немецким физиком Эмилем Варбургом в 1881 году. В 1926–27 годах голландский физик Петер Йозеф Вильгельм Дебай и американский физик Уильям Фрэнсис Джиок независимо друг от друга объяснили этот процесс и описали способы для достижения очень низких температур через адиабатическое размагничивание. Понижение температуры магнетика, находящегося в сильном магнитном поле, при быстром выключении поля, происходит в результате затраты внутренней энергии магнетика на дезориентацию магнитных моментов микрочастиц. В парамагнитных солях магнитное охлаждение позволяет достичь температуры  $\sim 10^{-3}$  К, в системах ядерных магнитных моментов  $10^{-5}$ – $10^{-6}$  К.

**4.6. Условия для магнитного поля на границе раздела двух изотропных сред (для самостоятельной работы).**

Рассмотрим поведение линий индукции на границе двух веществ с разными магнитными проницаемостями. Предположим, что мы имеем границу веществ, магнитные проницаемости которых обозначим через  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Если мы возьмем малый участок  $\Delta S$  границы раздела, то его можно считать плоским, а поле вблизи него – с каждой стороны однородным. Значение вектора индукции в веществе с магнитной проницаемостью  $\mu_1$  обозначим через  $\vec{B}_1$ , а в веществе с магнитной проницаемостью  $\mu_2$  – через  $\vec{B}_2$ . Вблизи точек границы вектор магнитной индукции можно разложить на две составляющие, из которых одна  $B_n$  будет перпендикулярна к границе раздела, а другая  $B_\tau$  – параллельна ей.

Тогда:  $\vec{B}_1 = \vec{B}_{1n} + \vec{B}_{1\tau}$ , а  $\vec{B}_2 = \vec{B}_{2n} + \vec{B}_{2\tau}$ .

Установим связь между нормальными составляющими векторов магнитной индукции с двух сторон границы. Для этого рассмотрим поток магнитной индукции через замкнутую поверхность в виде ломаного цилиндра, основания которого  $\Delta S_1$  и  $\Delta S_2$  равны и параллельны участку  $\Delta S$  границы, а образующие параллельны линиям индукции в тех веществах, в которых расположена данная часть цилиндра (рис. 4.6.1). Направим нормаль  $n$  к границе раздела от первого вещества ко второму. Тогда для основания  $\Delta S_2$  это направление будет внешней нормалью, для основания  $\Delta S_1$  оно будет противоположно направлению внешней нормали. Согласно теореме Гаусса  $\oint_S \vec{B}_n dS = 0$  имеем:  $-B_{1n}\Delta S_1 + B_{2n}\Delta S_2 = 0$ .

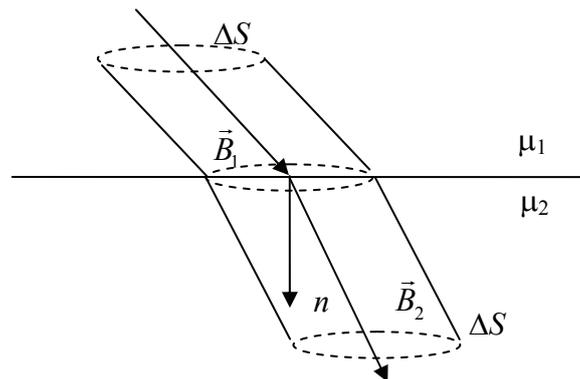


Рис.6.1.1

Знак минус получается вследствие того, что  $B_{1n}$  представляет собой проекцию  $\vec{B}_1$  на направление, противоположное направлению

внешней нормали к элементу поверхности  $\Delta S_1$ . Замечая, что  $\Delta S_1 = \Delta S_2$ , имеем:  $-B_{1n} + B_{2n} = 0$ , откуда

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (4.6.1)$$

Таким образом, *нормальная составляющая вектора магнитной индукции не меняется при переходе из одного вещества в другое.*

Определим соотношение между касательными составляющими векторов магнитной индукции  $\vec{H}_1$  и  $\vec{H}_2$ . В качестве контура, по которому берется циркуляция вектора напряженности магнитного поля, выберем замкнутый контур  $abcd$  (рис. 4.6.2), стороны  $ad$  и  $bc$  которого параллельны границе раздела веществ, а стороны  $ab$  и  $dc$  бесконечно малы. Так как на границе веществ предполагается отсутствие токов, то согласно теореме о циркуляции вектора  $H$ :  $\oint_{abcd} \vec{H} dl = 0$ . Будем об-

ходить контур  $abcd$  по часовой стрелке и выберем за положительное направление касательной к границе раздела слева направо. Так как участки  $ab$  и  $dc$  предполагаются бесконечно малыми, то вся циркуляция выражается через участки  $bc$  и  $da$ . Обозначая через  $H_1$  и  $H_2$  напряженности в обоих веществах соответственно, получаем:  $H_{1\tau}bc - H_{2\tau}da = 0$ .

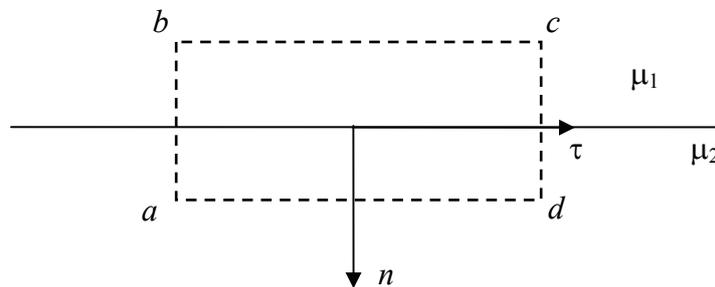


Рис. 4.6.2

Знак минус во втором члене получается вследствие того, что в нижней среде выбранное направление обхода противоположно положительному направлению касательной. Учитывая, что  $bc = da$ , имеем:

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = 0 \Rightarrow H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (4.6.2)$$

Следовательно, *касательная составляющая вектора напряженности не меняется при переходе через границу раздела двух веществ.*

Переходя к вектору магнитной индукции, в силу соотношения

$$B = \mu\mu_0 H, \text{ получим: } \frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Таким образом, касательные составляющие вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  с двух сторон границы веществ относятся, как магнитные проницаемости  $\mu$  этих веществ. В том случае, когда граница не перпендикулярна к линиям индукции, линии индукции претерпевают преломление. Разлагая векторы  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  на составляющие, параллельные границе и перпендикулярные к границе получим (рис. 4.6.3):

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{B_{1\tau}B_{2n}}{B_{1n}B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad (4.6.3)$$

т. е. тангенсы угла наклона векторов индукции к нормали в двух веществах относятся, как магнитные проницаемости веществ.

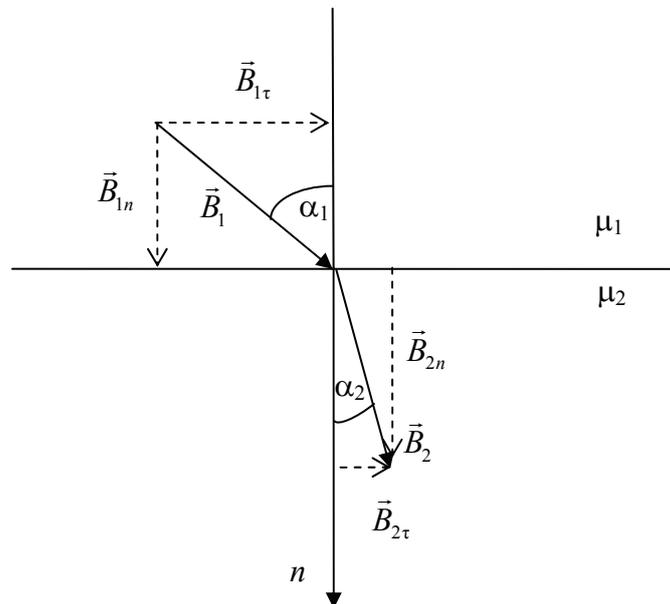


Рис. 4.6.3

На законе преломления линий индукции основана магнитная защита. Она обусловлена тем, что благодаря преломлению линий индукции внутри полости, находящейся в веществе с большим значением магнитной проницаемости, магнитное поле оказывается близким к нулю.

## Тема 5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

### Лекция № 7

5.1. Основы теории Максвелла для электромагнитного поля. Вихревое электрическое поле. Ток смещения. Система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в интегральной форме.

5.2. Полная система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в дифференциальной форме. Материальные уравнения. Граничные условия.

#### ***5.1. Основы теории Максвелла для электромагнитного поля. Вихревое электрическое поле. Ток смещения. Система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в интегральной форме.***

В соответствии с законом Фарадея – Ленца, э.д.с. индукции, возбуждаемая в неподвижном замкнутом проводящем контуре, определяется формулой:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (5.1.1)$$

Тем самым было выяснено, что переменное магнитное поле создает в проводящем замкнутом контуре вихревое электрическое поле. Согласно определению, э.д.с. равна циркуляции вектора напряженности электрического поля:

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E} d\vec{l}. \quad (5.1.2)$$

Обобщенный таким образом закон Фарадея – Ленца имеет вид:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (5.1.3)$$

Формула (5.1.3) получила название *первое уравнение Максвелла в интегральной форме*: циркуляция вектора напряженности электрического поля по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром. Из этого уравнения следует, что переменное магнитное поле создает в пространстве вихревое электрическое поле независимо от того, находится в этом поле проводник или нет.

Явление возникновения в пространстве вихревого электрического поля под влиянием переменного магнитного поля было использовано для создания индукционного ускорителя электронов – *бетатрона*

(рис. 5.1.1). Идея этого метода ускорения электронов высказана в 1928 г. норвежским физиком Рольфом Видероз. В дальнейшем она была разработана русским физиком Яковом Петровичем Терлецким. Первый бетатрон был построен в 1940 г. в США Дональдом Вильямом Керстом.

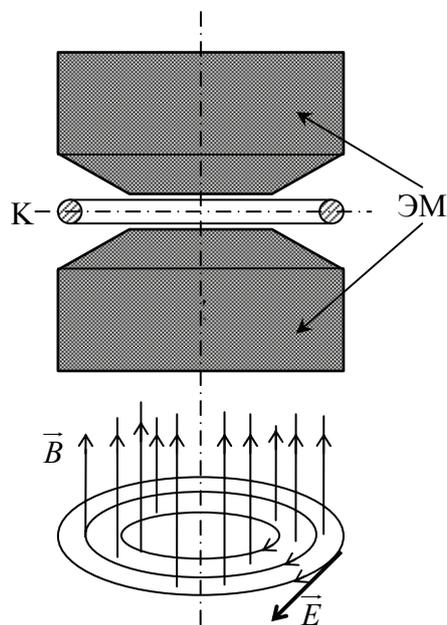


Рис. 5.1.1

Основной частью бетатрона является мощный электромагнит ЭМ с коническими полюсными наконечниками. Между наконечниками расположена ускорительная камера К, имеющая форму тора и откачанная до высокого вакуума. Обмотка электромагнита питается переменным током. Изменение силы тока в обмотке электромагнита вызывает в пространстве между его полюсами изменение магнитного поля и возникновение вихревого электрического поля. Силовые линии вихревого электрического поля представляют собой концентрические окружности и расположены в плоскости, перпендикулярной оси электромагнита и проходящей через середину зазора между полюсами. В определенный момент времени в камеру попадает пучок электронов из термоэлектронного излучателя, расположенного внутри камеры. На каждый электрон будет действовать сила со стороны электрического поля, вследствие чего скорость у электронов будет увеличиваться. Непременным условием ускорения электрона является его непрерывное движение по одной и той же орбите. Для этого полюсным наконечникам придают такую форму, чтобы магнитное поле убывало от центра к краю по определенному закону.

Согласно закону полного тока (1.5.10), циркуляция вектора напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I. \quad (5.1.4)$$

Из закона полного тока следует, что источником магнитного поля являются упорядоченно движущиеся электрические заряды. Максвелл предположил, что помимо токов всех видов, связанных с упорядоченным движением зарядов, источником возникновения магнитного поля является также переменное электрическое поле.

Действительно, по теореме Гаусса поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен:

$$\Phi_D = \oint_S D_n dS = q, \quad (5.1.5)$$

где  $q$  – алгебраическая сумма свободных электрических зарядов, охватываемых замкнутой поверхностью.

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \oint_S D_n dS \right] = \frac{dq}{dt}. \quad (5.1.6)$$

Если поверхность  $S$  неподвижна и не деформируется, то изменение во времени потока смещения сквозь поверхность  $S$  вызывается только изменением электрического смещения  $D$ . Поэтому полную производную, стоящую в правой части уравнения, можно заменить частной производной по времени и дифференцирование внести под знак интеграла:

$$\frac{dq}{dt} = \oint_S \frac{dD_n}{dt} dS. \quad (5.1.7)$$

С другой стороны, сила тока определяется выражением:

$$I = \frac{dq}{dt} = \int_0^S j_n dS. \quad (5.1.8)$$

Из сравнения выражения (5.1.8) с формулой (5.1.7) следует, что величина  $\frac{dD_n}{dt}$  имеет размерность плотности тока. Эта величина представляет собой численное значение нормальной составляющей плотности тока, обусловленного не движением свободных электрических зарядов, а изме-

нением во времени электрического поля. Поэтому Джеймс Максвелл предложил назвать величину  $\frac{d\vec{D}}{dt}$  *плотностью тока смещения*:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad (5.1.9)$$

Следовательно, плотность тока смещения в данной точке пространства равна скорости изменения вектора электрического смещения в этой точке.

*Током смещения* сквозь произвольную поверхность  $S$  называется физическая величина, численно равная потоку вектора плотности тока смещения сквозь эту поверхность:

$$I_{\text{см}} = \int_S (j_{\text{см}})_n dS = \int_S \frac{dD_n}{dt} dS = \frac{d}{dt} \left( \int_S D_n dS \right) = \frac{d\Phi_D}{dt}. \quad (5.1.10)$$

До Дж. Максвелла считалось, что если цепи постоянного тока должны быть обязательно замкнутыми, то это условие не обязательно для цепей переменных токов. С точки зрения Максвелла, цепи любых токов замкнуты. Замкнутость цепей переменных токов обеспечивается токами смещения, которые протекают на тех участках, где нет проводников, например, между обкладками конденсатора в процессе его зарядки или разрядки.

Согласно Максвеллу ток смещения, подобно обычным токам проводимости, является источником возникновения вихревого магнитного поля. В общем случае токи проводимости и ток смещения не разделены в пространстве, как это имеет место, например, в конденсаторе с переменным напряжением на обкладках. Все типы токов существуют в одном и том же объеме, поэтому можно говорить о полном токе, равном сумме токов проводимости и токов смещения. Тогда обобщенный закон полного тока будет иметь вид:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I + I_{\text{см}}. \quad (5.1.11)$$

Из всех физических свойств, присущих току проводимости, Максвелл приписал току смещения только одно свойство – способность создавать в окружающем пространстве магнитное поле.

Учитывая ток смещения (5.1.11), получим:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I + \frac{d\Phi_D}{dt}. \quad (5.1.12)$$

Формула (5.1.12) получила название *второе уравнение Максвелла в интегральной форме*: циркуляция вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру  $L$  равна полному току, пронизывающему поверхность, ограниченную этим контуром.

Из уравнения (5.1.12) следует, что переменное магнитное поле может возбуждаться движущимися зарядами (электрическим током) и переменным электрическим полем (током смещения). Из двух уравнений Максвелла можно сделать важный вывод: между электрическим и магнитным полями существует тесная взаимная связь. Изменение во времени электрического поля вызывает появление вихревого магнитного поля, а переменное магнитное поле является источником вихревого электрического поля.

Первые два уравнения Максвелла (5.1.3) и (5.1.12) дополняются еще двумя уравнениями. *Третье уравнение Максвелла* выражает теорему Гаусса для потока вектора электрического смещения сквозь произвольную замкнутую поверхность  $S$ , охватывающую суммарный заряд  $q$ :

$$\oint_S D_n dS = q. \quad (5.1.13)$$

Оно позволяет рассчитывать электрическое поле, созданное заданной системой электрических зарядов, произвольным образом расположенных в пространстве.

*Четвертое уравнение Максвелла* представляет собой теорему Гаусса для магнитного потока сквозь произвольную замкнутую поверхность  $S$ :

$$\oint_S B_n dS = 0. \quad (5.1.14)$$

Эта теорема является следствием того, что свободных магнитных «зарядов» (свободных магнитных полюсов) в природе не существует.

Система уравнений (5.1.3, 5.1.12–5.1.14) является системой уравнений Максвелла для электромагнитного поля в интегральной форме.

## **5.2. Полная система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в дифференциальной форме. Материальные уравнения. Граничные условия.**

Используя систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля в интегральной форме (5.1.3, 5.1.12–5.1.14), получим полную систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля в дифференциальной форме.

Рассмотрим первое уравнение Максвелла (5.1.3). К левой части уравнения применим теорему Стокса:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S (\text{rot} \vec{E})_n dS, \quad (5.2.1)$$

где  $S$  – произвольная поверхность, ограниченная контуром  $L$ .

Если контур  $L$  не деформируется и не перемещается в пространстве, то правую часть уравнения (5.1.3) можно представить в виде:

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \int_S B_n dS \right] = \int_S \frac{dB_n}{dt} dS. \quad (5.2.2)$$

Подставив выражения (5.2.1–5.2.2) в уравнение (5.1.3), получим:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \Rightarrow \int_S (\text{rot} \vec{E})_n dS = -\int_S \frac{dB_n}{dt} dS. \quad (5.2.3)$$

Так как поверхность  $S$  в выражении (5.2.3) является произвольной, то равенство интегралов будет выполняться, если выполняется условие:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}. \quad (5.2.4)$$

Уравнение (5.2.4) является *1-м уравнением Максвелла в дифференциальной форме*.

Рассмотрим второе уравнение Максвелла (5.1.12). К левой части уравнения применим теорему Стокса:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S (\text{rot} \vec{H})_n dS. \quad (5.2.5)$$

Суммарный ток проводимости, пронизывающий произвольную поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $L$ , запишем в виде:

$$I = \int_S j_n dS. \quad (5.2.6)$$

Если контур  $L$  не деформируется и не перемещается в пространстве, то поток вектора электрического смещения через поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $L$ , можно записать в виде:

$$\frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S D_n dS = \int_S \frac{dD_n}{dt} dS. \quad (5.2.7)$$

Подставив выражения (5.2.5–5.2.7) в уравнение (5.1.12), получим:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I + \frac{d\Phi_D}{dt} \Rightarrow \oint_L (\text{rot} \vec{H})_n dS = \int_S j_n dS + \int_S \frac{dD_n}{dt} dS. \quad (5.2.8)$$

Так как поверхность  $S$  в выражении (5.2.8) является произвольной, то равенство интегралов будет выполняться, если выполняется условие:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad (5.2.9)$$

Уравнение (5.2.9) является 2-м уравнением Максвелла в дифференциальной форме.

3-м и 4-м уравнениями Максвелла в дифференциальной форме являются теоремы Гаусса для электрического (5.2.10) и магнитного (5.2.11) поля в дифференциальной форме:

$$\text{div} \vec{D} = \rho. \quad (5.2.10)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0. \quad (5.2.11)$$

Уравнения (5.2.3, 5.2.9–5.2.11) составляют систему четырех уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

Четыре фундаментальных уравнения Максвелла не образуют полную систему уравнений электромагнитного поля в веществе. В самом деле, если два векторных уравнения системы (5.2.3, 5.2.9) записать в координатной форме, то с учетом двух оставшихся уравнений получится восемь скалярных уравнений. Они связывают между собой проекции пяти векторов ( $E, D, H, B, j$ ) и  $\rho$ , т. е. восемь уравнений содержат шестнадцать неизвестных величин. Это связано с тем, что уравнения Максвелла не содержат никакой информации о свойствах среды, в которой существует электромагнитное поле. Электромагнитные свойства вещества (материи) определяются уравнениями, которые в случае изотропной, однородной, проводящей, неферромагнитной и не сегнетоэлектрической среды ( $\varepsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ,  $\sigma = \text{const}$ ) имеют вид:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (5.2.12)$$

Уравнения (5.2.12) называют материальными уравнениями среды.

Уравнения (5.2.3, 5.2.9–5.2.12) образуют полную систему уравнений электромагнитного поля в среде, решение которой при заданных граничных условиях позволяет определить векторы  $E, D, H, B, j$  и скаляр  $\rho$  в каждой точке среды с заданными ее характеристиками  $\varepsilon, \mu, \sigma$ .

Уравнения справедливы при следующих условиях:

1) материальные тела в поле неподвижны;

2) материальные константы  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  могут зависеть от координат, но не должны зависеть от времени и векторов поля;

3) в поле отсутствуют постоянные магниты и ферромагнитные тела.

Из уравнений Максвелла следует:

- источниками электрического поля являются либо электрические заряды, либо изменяющиеся во времени магнитные поля (1-е и 3-е уравнение);

- магнитное поле может возбуждаться либо электрическими токами, либо переменным электрическим полем (2-е уравнение);

- переменное магнитное поле всегда связано с порождаемым им электрическим полем, а переменное электрическое поле – с магнитным, т. е. электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом и образуют единое электромагнитное поле.

## Тема 6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

### Лекция № 8

- 6.1. Электромагнитные волны. Волновое уравнение.
- 6.2. Основные свойства электромагнитной волны. Уравнение электромагнитной волны. Фазовая скорость. Монохроматические волны.
- 6.3. Энергия электромагнитной волны. Вектор Умова–Пойнтинга.
- 6.4. Шкала электромагнитных волн.

#### **6.1. Электромагнитные волны. Волновое уравнение.**

Мы выяснили, что переменное электрическое поле порождает магнитное, которое тоже оказывается переменным. Это переменное магнитное поле порождает электрическое и т. д. Таким образом, если возбудить с помощью колеблющихся зарядов переменное электромагнитное поле, то в пространстве, окружающем заряды, возникнет последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся от точки к точке. Этот процесс будет периодическим во времени и в пространстве и, следовательно, представляет собой волну.

Покажем, что существование электромагнитных волн вытекает из системы уравнений Максвелла (5.2.3, 5.2.9–5.2.12). Для упрощения математических преобразований рассмотрим электромагнитное поле в случае однородной незаряженной (объемная плотность заряда  $\rho = 0$ ), непроводящей (плотность тока  $\mathbf{j} = 0$ ), не сегнетоэлектрической ( $\varepsilon = \text{const}$ ) и неферромагнитной ( $\mu = \text{const}$ ) среды.

Система уравнений Максвелла для этого случая с учетом материальных уравнений ( $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ ) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\text{rot}\vec{E} &= -\frac{d\vec{B}}{dt} \\ \text{rot}\vec{H} &= \frac{d\vec{D}}{dt} \\ \text{div}\vec{E} &= 0 \\ \text{div}\vec{H} &= 0\end{aligned}\tag{6.1.1}$$

Запишем дифференциальные уравнения Максвелла в координатной форме:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{d(\mu\mu_0\vec{H})}{dt} \Rightarrow \operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{d\vec{H}}{dt} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{dH_x}{dt} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{dH_y}{dt} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu\mu_0 \frac{dH_z}{dt} \end{cases} \quad (6.1.2)$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{d(\varepsilon\varepsilon_0\vec{E})}{dt} \Rightarrow \operatorname{rot}\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{dE_x}{dt} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{dE_y}{dt} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{dE_z}{dt} \end{cases} \quad (6.1.3)$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (6.1.4)$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. \quad (6.1.5)$$

Возьмем ротор от выражения (6.1.3) и изменим последовательность дифференцирования по координатам и времени:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) = \operatorname{rot}\left(-\mu\mu_0 \frac{d\vec{H}}{dt}\right) \Rightarrow \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) = -\mu\mu_0 \frac{d}{dt}(\operatorname{rot}\vec{H}). \quad (6.1.6)$$

Подставим выражение (6.1.6) в выражение (6.1.7):

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) = -\mu\mu_0 \frac{d}{dt}\left(\varepsilon\varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}\right) \Rightarrow \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) = -\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{d^2\vec{E}}{dt^2}. \quad (6.1.7)$$

Так как выражение в правой части (6.1.7) представляет двойное векторное произведение, то

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) &= \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - (\nabla \nabla) \vec{E} = \\ &= \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \nabla(\operatorname{div}\vec{E}) - \Delta \vec{E}. \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

С учетом (6.1.4) получим:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) = -\Delta \vec{E}. \quad (6.1.9)$$

Подставим (6.1.9) в (6.1.7) и получим:

$$\Delta \vec{E} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}. \quad (6.1.10)$$

Аналогично можно получить для  $\vec{H}$ :

$$\Delta \vec{H} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{H}}{dt^2}. \quad (6.1.11)$$

Выражения (6.1.10–6.1.11) представляют собой волновые уравнения для  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} - v^2 \Delta \vec{E} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2 \vec{H}}{dt^2} - v^2 \Delta \vec{H} = 0, \quad (6.1.12)$$

где  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}$  – фазовая скорость электромагнитной волны.

## **6.2. Основные свойства электромагнитной волны. Уравнение электромагнитной волны. Фазовая скорость. Монохроматические волны.**

Рассмотрим основные свойства электромагнитных волн.

1. Из выражений (6.1.12) видно, что переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве в виде электромагнитной волны. Фазовая скорость волны равна:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}. \quad (6.2.1)$$

Если электромагнитная волна распространяется в вакууме ( $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ), то получаем:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}, \quad (6.2.2)$$

где  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с – скорость света в вакууме.

С учетом выражения (6.2.2) фазовая скорость электромагнитной волны равна:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{n}, \quad (6.2.3)$$

где  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$  – абсолютный показатель преломления среды.

2. Из уравнений Максвелла вытекает вывод о том, что *электромагнитная волна является поперечной*.

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль оси  $Ox$ . Тогда  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , а также их компоненты по координатным осям не будут зависеть от координат  $y$  и  $z$ . Поэтому уравнения (6.1.2–6.1.5) упрощаются следующим образом:

$$\begin{cases} 0 = \mu\mu_0 \frac{dH_x}{dt} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{dH_y}{dt} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{dH_z}{dt} \end{cases} \quad (6.2.4)$$

$$\begin{cases} 0 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{dE_x}{dt} \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{dE_y}{dt} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{dE_z}{dt} \end{cases} \quad (6.2.5)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad (6.2.6) \qquad \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \quad (6.2.7)$$

Уравнения (6.2.6–6.2.7) и первые из уравнений систем (6.2.4–6.2.5) показывают, что  $E_x$  и  $H_x$  не зависят от координаты  $x$  и времени  $t$ . Следовательно, отличные от нуля  $E_x$  и  $H_x$  могут быть обусловлены лишь постоянными однородными полями, накладываемыми на электромагнитное поле волны. Таким образом, электромагнитное поле волны не имеет составляющих вдоль оси  $Ox$ . Отсюда вытекает, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перпендикулярны к направлению распространения волны (вектору  $\vec{v}$ ), т. е. что электромагнитные волны поперечны (рис. 6.2.1).

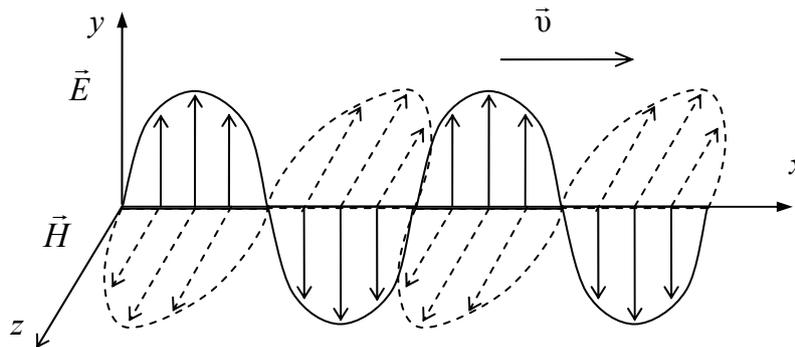


Рис. 6.2.1

3. Из уравнений Максвелла вытекает вывод о том, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  электромагнитной волны всегда взаимно перпендикулярны. Рассмотрим следующие уравнения из систем (6.2.4–6.2.5):

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{dE_y}{dt} \quad (6.2.8)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{dH_z}{dt} \quad (6.2.9)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{dH_y}{dt} \quad (6.2.10)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{dE_z}{dt} \quad (6.2.11)$$

Уравнения (6.2.8–6.2.9) связывают компоненты  $E_y$  и  $H_z$ , а уравнения (6.2.10–6.2.11) – компоненты  $E_z$  и  $H_y$ . Допустим, что первоначально было создано переменное электрическое поле  $E_y$ , направленное вдоль оси  $Oy$ . Согласно уравнению (6.2.8) это поле создает магнитное поле  $H_z$ , направленное вдоль оси  $Oz$ . В соответствии с уравнением (6.2.9) магнитное поле  $H_z$  создаст электрическое поле  $E_x$  и т. д. Составляющие электрического  $E_z$  и магнитного  $H_y$  полей при этом не возникают. Аналогично, если первоначально появится магнитное поле  $H_y$ , то оно возбудит электрическое поле  $E_z$  и т. д. В этом случае не возникают составляющие полей  $E_y$  и  $H_x$ . Из уравнений (6.2.8–6.2.11) видно, что в любом случае вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  электромагнитной волны всегда взаимно перпендикулярны (рис. 6.2.1).

4. Колебания векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в волне происходят с одинаковой фазой, а амплитуды колебаний этих векторов связаны соотношением:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E_m = \sqrt{\mu\mu_0} H_m. \quad (6.2.12)$$

Докажем это. Возьмем для описания волны уравнения (6.2.8–6.2.9), положив  $E_z = H_y = 0$ .

Продифференцируем первое уравнение (6.2.8) по  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} &= -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{d}{dx} \left( \frac{dE_y}{dt} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{dE_y}{dx} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} &= -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{d}{dt} \left( -\mu\mu_0 \frac{dH_z}{dt} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{d^2 H_z}{dt^2} \Rightarrow \quad (6.2.13) \\ &\Rightarrow \frac{d^2 H_z}{dt^2} - v^2 \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично продифференцировав уравнение (6.2.9) по  $x$ , получим:

$$\frac{d^2 E_y}{dt^2} - v^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = 0. \quad (6.2.14)$$

Полученные уравнения (6.2.13–6.2.14) являются частным случаем уравнений (6.1.12).

Простейшими решениями уравнений (6.2.13–6.2.14) являются функции вида:

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1), \quad (6.2.15)$$

$$H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2), \quad (6.2.16)$$

где  $k = \frac{\omega}{v}$  – волновое число,  $\alpha_1, \alpha_2$  – начальные фазы колебаний электрической и магнитной составляющей волны.

Выражения (6.2.15–6.2.16) называют *уравнениями плоской монохроматической электромагнитной волны*. В векторном виде уравнения плоской электромагнитной волны имеют вид:

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1), \quad (6.2.17)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2). \quad (6.2.18)$$

Если подставить выражения (6.2.15–6.2.16) в (6.2.8), то получится:

$$-kH_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2) = -\varepsilon\varepsilon_0\omega E_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1). \quad (6.2.19)$$

Если подставить выражения (6.2.15–6.2.16) в (6.2.9), то получится:

$$-kE_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1) = -\mu\mu_0\omega H_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2). \quad (6.2.20)$$

Чтобы равенства (6.2.19–6.2.20) выполнялись, необходимо выполнение следующих условий:

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad (6.2.21)$$

$$\left. \begin{array}{l} kH_m = \varepsilon\varepsilon_0\omega E_m \\ kE_m = \mu\mu_0\omega H_m \end{array} \right\} \Rightarrow \varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 = \mu\mu_0 H_m^2. \quad (6.2.22)$$

Таким образом получается еще одно свойство электромагнитной волны.

### **6.3. Энергия электромагнитной волны. Вектор Умова – Пойнтинга.**

Электромагнитные волны переносят энергию. *Поток волновой энергии* или *энергетический поток* (энергия, переносимая волной в единицу времени через некоторую площадку) равен:

$$\Phi_3 = \frac{dW}{dt}. \quad (6.3.1)$$

Плотность потока волновой энергии (энергия, переносимая волной в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению переноса энергии) равна:

$$S = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S_{\perp}} = \frac{\Delta W}{\Delta S_{\perp} \Delta t} = wv \text{ или } \vec{S} = w\vec{v}, \quad (6.3.2)$$

где  $w$  – объемная плотность энергии волны;  $\vec{S}$  – вектор плотности потока волновой энергии.

Плотность энергии электромагнитного поля  $w$  состоит из плотности энергии электрического поля и плотности энергии магнитного поля:

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2, \quad (6.3.3)$$

где  $w_e$  – плотность энергии электрического поля волны;  $w_m$  – плотность энергии магнитного поля волны.

В данной точке пространства векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются в одинаковой фазе. Поэтому соотношение (6.2.22) между амплитудными значениями  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  справедливо и для их мгновенных значений:

$$\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2. \quad (6.3.4)$$

Отсюда следует, что плотности энергии электрического и магнитного полей волны каждый момент времени одинаковы:

$$\varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 = \mu\mu_0 H_m^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2 \Rightarrow w_e = w_m. \quad (6.3.5)$$

Поэтому выражение (6.3.3) можно написать в виде:

$$w = 2w_e = \varepsilon\varepsilon_0 E^2. \quad (6.3.6)$$

Из выражения (6.3.4) выразим напряженность  $E$  электрического поля волны:

$$E = \frac{\sqrt{\mu\mu_0}}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}} H \quad (6.3.7)$$

и подставим в (6.3.6):

$$w = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} EH = \frac{1}{v} EH, \quad (6.3.8)$$

где  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}$  – фазовая скорость электромагнитной волны. Под-

ставим выражение (6.3.8) в (6.3.6) и получим модуль вектора плотности потока  $S$  энергии электромагнитной волны:

$$S = EH. \quad (6.3.9)$$

Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. Поэтому направление вектора  $\vec{E} \times \vec{H}$  совпадает с направлением переноса энергии (направлением вектора фазовой скорости), а модуль этого вектора равен  $EH$ . Следовательно, вектор плотности потока электромагнитной энергии можно представить как векторное произведение  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (6.3.10)$$

Вектор  $\vec{S}$  называется *вектором Умова – Пойнтинга*.

#### 6.4. Шкала электромагнитных волн.

Свойства электромагнитных волн сильно зависят от их частоты (или длины волны). Между диапазонами нет резких переходов, они иногда перекрываются, а границы между ними условны. Поскольку скорость распространения электромагнитного излучения в вакууме постоянна, то частота его колебаний однозначно связана с длиной волны в вакууме.

В таблице приведена классификация электромагнитных волн в зависимости от их частоты (длины волны).

Виды излучения	Диапазоны		Название групп частот	Источники	Применение
	частот, Гц	длин волн, м			
Низкочастотные волны	$< 3 \cdot 10^3$	$> 10^5$	Инфранизкие	Генераторы специальных конструкций	Радиовещание, радиосвязь
			Низкие		
			Промышленные	Большинство электрических приборов и двигателей; генераторы переменного тока	
			Звуковые	Звуковые генераторы	Электроакустика (микрофоны), кино, радиовещание

Виды излучения	Диапазоны		Название групп частот	Источники	Применение
	частот, Гц	длин волн, м			
Радио- и микро-волны	$3 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^{12}$	$10^5 - 10^{-4}$	Длинные Средние Короткие Метровые Дециметровые	Генераторы электрических колебаний различных конструкций	Телеграфия, телевидение, радиовещание, радиолокация, исследование свойств вещества (метровые и дециметровые волны)
			Сантиметровые Миллиметровые Переходные	Магнетронные, клистронные генераторы и мазеры	Радиолокация, радиоспектроскопия и радиоастрономия
Инфракрасное излучение	$10^{12} - 4,3 \cdot 10^{14}$	$3 \cdot 10^{-4} - 7,8 \cdot 10^{-7}$	Декамикронные Микронные	Излучение нагретых тел (газоразрядные лампы и т. п.)	Инфракрасная спектроскопия, фотографирование в темноте (в инфракрасных лучах)
Видимое излучение	$4,3 \cdot 10^{14} - 7,5 \cdot 10^{14}$	$7,8 \cdot 10^{-7} - 4 \cdot 10^{-7}$	—	Излучение молекул и атомов при тепловых и электрических воздействиях	
Ультрафиолетовое излучение	$7,5 \cdot 10^{14} - 10^{16}$	$4 \cdot 10^{-7} - 3 \cdot 10^{-8}$	Ближние Крайние	Излучение Солнца, ртутных ламп и др.	Ультрафиолетовая микроскопия, медицина
Рентгеновские лучи	$10^{16} - 3 \cdot 10^{18}$	$3 \cdot 10^{-8} - 10^{-10}$	Ультрамягкие Мягкие Жесткие	Рентгеновские трубки и другие приборы, где происходит торможение электронов с энергией более $10^5$ эВ	Медицина, изучение вещества, дефектоскопия
Гамма-лучи	$3 \cdot 10^{18} - 3 \cdot 10^{29}$	$10^{-10} - 10^{-21}$	—	Взаимодействие элементарных частиц, радиоактивный распад ядер, торможение электронов энергией более $10^5$ эВ	Гамма-дефектоскопия, изучение свойств вещества

Видимый свет (видимое излучение) – это электромагнитные волны, лежащие в диапазоне длин от 780 нм (красный свет) до 400 нм (фиолетовый свет). Однако видимый свет по своей физической природе ничем не отличается от других электромагнитных волн. Поэтому термин «свет» применяют в более широком смысле. В частности, говоря о скорости света в вакууме  $c$ , под светом понимают не только видимое излучение, а фактически любые электромагнитные волны.

## **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ И РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Наркевич, И. И. Физика для ВТУЗов / И. И. Наркевич, Э. И. Волмянский, С. И. Лобко. – Минск: Новое знание, 2004. – 680 с.
2. Наркевич, И. И. Физика для ВТУЗов: в 2 т. / И. И. Наркевич, Э. И. Волмянский, С. И. Лобко. – Минск: Вышэйшая школа, 1992–1994. – 2 т.
3. Курс физики: учеб. пособие для ВТУЗов: в 3 т. / А. А. Детлаф [и др.]. – М.: Высшая школа, 1987, 1989. – 3 т.
4. Детлаф, А. А. Курс физики: учеб. пособие для студентов ВТУЗов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М.: Академия, 2007. – 720 с.
5. Савельев, И. В. Курс общей физики: в 3 т. / И. В. Савельев. – М.: Наука, 1987. – 3 т.
6. Курс физики: учебник для вузов: в 2 т. / под ред. В. Н. Лозовского. – СПб.: Лань, 2000. – 2 т.
7. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 1998. – 542 с.
8. Джанколи, Д. Физика: в 2 т. / Д. Джанколи. – М.: Мир, 1989. – 2 т.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Тема 1. Магнитное поле в вакууме</b> .....	3
Лекция № 1 .....	3
1.1. Магнитное поле. Взаимодействие токов. Вектор магнитной индукции .....	3
1.2. Закон Био – Савара – Лапласа .....	7
1.3. Расчет магнитных полей прямого проводника с током бесконечной и конечной длины .....	7
Лекция № 2 .....	10
1.4. Магнитное поле движущейся заряженной частицы .....	10
1.5. Циркуляция вектора магнитной индукции .....	11
1.6. Магнитное поле тороида и соленоида .....	14
1.7. Магнитный поток. Теорема Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах .....	17
<b>Тема 2. Действие магнитного поля на проводник с током и движущуюся заряженную частицу</b> .....	19
Лекция № 3 .....	19
2.1. Сила Ампера .....	19
2.2. Контур с током в магнитном поле. Магнитный момент контура с током. Механический момент, действующий на контур с током в однородном магнитном поле .....	20
2.3. Работа перемещения проводника с током в магнитном поле .....	22
2.4. Сила Лоренца. Масс-спектрометрия .....	25
2.5. Эффект Холла .....	29
<b>Тема 3. Явление электромагнитной индукции</b> .....	32
Лекция № 4 .....	32
3.1. Опыты Фарадея. Закон электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле .....	32
3.2. Токи Фуко .....	35
3.3. Явление самоиндукции. Индуктивность .....	36
3.4. Энергия и объемная плотность энергии магнитного поля .....	37
3.5. Токи при включении и при выключении источника тока в электрической цепи (для самостоятельной работы) .....	39

<b>Тема 4. Магнитное поле в веществе</b> .....	44
Лекция № 5 .....	44
4.1. Атом в магнитном поле. Магнитные моменты электронов и атомов. Орбитальный и спиновый магнитные моменты .....	44
4.2. Намагниченность. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость среды .....	48
Лекция № 6 .....	50
4.3. Типы магнетиков. Элементарная теория диа- и парамагнетизма .....	50
4.4. Ферромагнетики. Магнитный гистерезис. Точка Кюри .....	55
4.5. Эффекты, наблюдаемые в ферромагнетиках и их применение .....	59
4.6. Условия для магнитного поля на границе раздела двух изотропных сред (для самостоятельной работы) .....	61
<b>Тема 5. Электромагнитное поле</b> .....	64
Лекция № 7 .....	64
5.1. Основы теории Максвелла для электромагнитного поля. Вихревое электрическое поле. Ток смещения. Система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в интегральной форме .....	64
5.2. Полная система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в дифференциальной форме. Материальные уравнения. Граничные условия .....	68
<b>Тема 6. Электромагнитные волны</b> .....	72
Лекция № 8 .....	72
6.1. Электромагнитные волны. Волновое уравнение .....	72
6.2. Основные свойства электромагнитной волны. Уравнение электромагнитной волны. Фазовая скорость. Монохроматические волны .....	74
6.3. Энергия электромагнитной волны. Вектор Умова – Пойнтинга .....	77
6.4. Шкала электромагнитных волн .....	79
<b>Список использованной и рекомендуемой литературы</b> .....	81

Учебное издание

**Бобрович Олег Георгиевич**  
**Тульев Валентин Валентинович**

# **ФИЗИКА**

**В 5-ти частях**

**Часть 3**

**МАГНИТНОЕ ПОЛЕ.  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ**

Тексты лекций

Редактор *С. С. Белявская*  
Компьютерная верстка *С. С. Белявская*  
Корректор *С. С. Белявская*

Издатель:

УО «Белорусский государственный технологический университет».

ЛИ № 02330/0549423 от 08.04.2009.

Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.