УДК 514.76

Н. П. Можей
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

СПЕЦИАЛЬНО РЕДУКТИВНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В общем случае задача исследования многообразий различных типов является достаточно сложной. Поэтому естественно рассматривать данную задачу в более узком классе многообразий, например, в классе однородных многообразий. В работе приведены результаты по исследованию трехмерных специально редуктивных однородных пространств. Определены основные понятия – изотропно-точная пара, редуктивное пространство, каноническое разложение, аффинная связность, тензоры кривизны и кручения, специально редуктивное пространство, алгебра голономии, форма Киллинга. Локальное изучение однородных пространств равносильно исследованию пар, состоящих из алгебры Ли и ее подалгебры. В статье описаны трехмерные специально редуктивные однородные пространства; для каждого такого пространства найдены в явном виде формы Киллинга, выписаны стандартные однородные псевдоримановы метрики, связности Леви-Чивита, тензоры кривизны, алгебры голономии, скалярные кривизны, тензоры Риччи, определено, является ли пространство Риччи-плоским, Эйнштейновым, Риччи-параллельным, локально симметрическим, конформно-плоским. Полученные результаты могут найти приложения в математике и физике, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях сводятся к изучению инвариантных объектов на однородных пространствах.

Ключевые слова: специально редуктивное пространство, группа преобразований, аффинная связность, тензор Риччи.

N. P. Mozhey
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

SPECIALLY REDUCTIVE HOMOGENEOUS SPACES

In general, the purpose of the research of manifolds of various types is rather complicated. Therefore, it is natural to consider this problem in a narrower class of manifolds, for example, in the class of homogeneous manifolds. The article presents the results of research of three-dimensional specially reductive homogeneous spaces. The basic notions, such as an isotropically-faithful pair, a reductive space, a canonical decomposition, an affine connection, curvature and torsion tensors, a specially reductive space, a holonomy algebra, Killing form are defined. The local study of homogeneous spaces is equivalent to the investigation of pairs consisting of Lie algebra and its subalgebra. The paper describes three-dimensional specially reductive homogeneous spaces. For each such space, Killing forms, standard homogeneous pseudo-Riemannian metrics, Levi-Chivita connections, curvature tensors, holonomy algebras, scalar curvatures, Ricci tensors have been found, it has been determined whether the Ricci-flat, Einstein, Ricci-parallel, locally symmetric, conformally flat space. The results obtained can find applications in mathematics and physics, since many fundamental problems in these fields are reduced to the study of invariant objects on homogeneous spaces.

Key words: specially reductive space, transformation group, affine connection, Ricci tensor.

Введение. П. К. Рашевский ввел в рассмотрение класс пространств аффинной связности с кручением, у которых при параллельном переносе сохраняются как тензор кривизны, так и тензор кручения; эти пространства он назвал симметрическими пространствами с кручением [1]. Соответствующий класс однородных пространств, получивших название «редуктивных пространств», изучается в дифференциальной геометрии и ее приложениях. Такие пространства, широко обобщающие римановы глобально симметрические пространства, обладают тем свойством, что все геодезические на них являются однородными [2]. М. Берже [3] изучал компактные однородные пространства с инвариантной римановой метрикой, которые являются естественно редуктивными. Естественно редуктивны также большинство примеров инвариантных Эйнштейновых метрик на компактных однородных пространствах (см. обзор [4]). Каждое односвязное стандартное однородное риманово пространство разложимо в прямое риманово произведение симметрического и специально редуктивного пространства [5, 6]. Поэтому, например, для изучения стандартных Эйнштейновых многообразий достаточно рассмотреть специально редуктивные пространства, которые и описываются в данной работе.

Основная часть. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и фактор-пространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}} / \mathfrak{g}$. Если подгруппа G связна, то однородное пространство $\bar{G}/G$ *редуктивно* при существовании разложения $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$; $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, а само разложение $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ называется *каноническим* [2]. Такое разложение определяет на однородном пространстве геодезически полную линейную связность с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения. Обратно, односвязное многообразие с полной линейной связностью, имеющей ковариантно постоянные тензоры кривизны и кручения, является редуктивным однородным пространством относительно группы автоморфизмов этой связности (см. [7]).

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ такое, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Если пространство допускает инвариантную аффинную связность, то оно является изотропно-точным [7]. Редуктивные пространства всегда допускают инвариантную аффинную связность. Тензор кручения $T \in InvT_2^{\,1}(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in InvT_3^{\,1}(\mathfrak{m})$ имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x) y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y) x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}},$$

$$R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$.

Редуктивное однородное пространство $M = \bar{G}/G$ с разложением $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}$ называется *специально редуктивным*, если пространство $\mathfrak{m}$ с умножением

$$x * y = [x, y]_{\mathfrak{m}}$$

не содержит нетривиальных идеалов с нулевым умножением.

Одной из важнейших характеристик связности является группа голономии. *Алгебра* Ли $\mathfrak{h}^*$ группы *голономии* инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. В случае специально редуктивного однородного риманова многообразия, которое является голономно неприводимым относительно римановой связности (односвязное псевдориманово пространство является голономно неприводимым относительно канонической связности без кручения тогда и только тогда, когда алгебра $\mathfrak{m}$ проста), алгебра голономии порождается преобразованиями вида $L_x : y \mapsto 1/2[x, y]_{\mathfrak{m}}$, $x, y \in \mathfrak{m}$ и действует неприводимо на $\mathfrak{m}$ [8].

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения $\bar{\mathfrak{g}}$ с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$ и полагать, что $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, \ldots, e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, для нумерации пар – $d.n.m$, здесь d – размерность подалгебры; n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$; m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Будем описывать связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R – через $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T – через $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$.

Теорема. Любое трехмерное специально редуктивное однородное пространство имеет следующий вид:

1.8.2	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2
u_1	0	0	u_1	u_2
u_2	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3
u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0

2.21.4	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	u_1	u_2
u_2	0	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3
u_3	u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0

Замечание. Здесь предполагается, что $\mathfrak{g} \neq \{0\}$. Для $\mathfrak{g} = \{0\}$ получаем следующие однородные пространства:

0.1.6	u_1	u_2	u_3
u_1	0	$2u_2$	$-2u_3$
u_2	$-2u_2$	0	u_1
u_3	$2u_3$	$-u_1$	0

0.1.7	u_1	u_2	u_3
u_1	0	u_3	$-u_2$
u_2	$-u_3$	0	u_1
u_3	u_2	$-u_1$	0

Действительно, трехмерные редуктивные однородные пространства с ненулевой подалгеброй $\mathfrak{g}$ изучаются, например, в [9, 10]. Выбираем из них пространства, такие, что $\mathfrak{m}$ не содержит нетривиальных идеалов с нулевым умножением (в данном случае одномерных идеалов либо двумерных коммутативных идеалов).

Рассмотрим, например, случай 1.8.2. Очевидно, что $\mathfrak{m}$ не содержит нетривиальных идеалов с нулевым умножением. Обозначив через tr след эндоморфизма векторного пространства, рассмотрим билинейную форму

$$K(x,y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\,x \circ \mathrm{ad}\,y),\ x,y \in \overline{\mathfrak{g}}.$$

Форма K называется формой Киллинга алгебры $\overline{\mathfrak{g}}$. Если форма Киллинга не вырождена, то она отрицательно определена. В случае 1.8.2 форма Киллинга имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а ограничение формы Киллинга на подалгебру –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно рассмотреть скалярное произведение $B(x,y) = -\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\,x \circ \mathrm{ad}\,y)$ алгебры $\overline{\mathfrak{g}}$ и ортогональное разложение алгебры $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}$. Пара $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ редуктивна относительно данного разложения, т. е. $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}$ – прямая сумма, а ограничение скалярного произведения на $\mathfrak{m}$ индуцирует $\overline{G}$-инвариантную риманову метрику на однородном пространстве $\overline{G}/G$. В случае 1.8.2 получаем, что стандартная однородная псевдориманова метрика принимает вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Риманова (псевдориманова) связность, соответствующая форме B, находится из соотношения

$$\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} = \frac{1}{2}[x,y]_{\mathfrak{m}} + u(x,y),$$
$$2B(u(x,y),z) = B(x,[z,y]_{\mathfrak{m}}) + B([z,x]_{\mathfrak{m}}, y)$$

для всех $x,y,z \in \mathfrak{m}$. Существует единственная риманова связность без кручения, называемая *Леви-Чивита связностью*. Тогда связность Леви-Чивита примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

а тензор кривизны –

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения нулевой.

Алгебра голономии $\mathfrak{h}^*$ имеет вид

$$\left\{ \begin{pmatrix} s_2 & s_1 & 0 \\ s_3 & 0 & s_1 \\ 0 & s_3 & -s_2 \end{pmatrix} \middle| s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Тензор Риччи определяется через тензор кривизны следующим образом:

$$\mathrm{Ric}(x,y) = \mathrm{tr}\{z \to R(z,x)y\},$$

где x,y,z – произвольные касательные векторы на многообразии, в рассматриваемом случае

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С тензором Риччи связано несколько геометрических свойств многообразия. Многообразие называется *Риччи-плоским*, если тензор Риччи тождественно равен нулю. Более общее условие – многообразие является *Эйнштейновым*, если $\mathrm{Ric} = \lambda B$ для некоторой константы λ. Условие *Риччи-параллельности* – ковариантная производная тензора Риччи равна нулю. Если ковариантная производная тензора кривизны равна нулю, т. е. $\Lambda(R) = 0$, многообразие называется *локально симметрическим*. Тензор Коттона (тензор Схоутена – Вейля) задается как тензор 3-го ранга, определяемый с помощью метрики:

$$C(x,y,z) = \nabla_z \mathrm{Ric}(x,y) - \nabla_y \mathrm{Ric}(x,z) +$$
$$+ \frac{1}{2(n-1)}\left(\nabla_y RB(x,z) - \nabla_z RB(x,y)\right),$$

где $x, y, z \in \mathfrak{m}$, а R – скалярная кривизна. В размерности $n = 3$ равенство нулю тензора Коттона является необходимым и достаточным условием того, что многообразие будет *конформно-плоским*.

Пространство 1.8.2 не является Риччи-плоским (так как тензор Риччи не равен нулю), является Эйнштейновым (поскольку $\mathrm{Ric} = \lambda B$ при $\lambda = 1/4$), Риччи-параллельным (так как ковариантная производная тензора Риччи равна нулю), локально симметрическим (поскольку $\Lambda(R)=0$), конформно-плоским (так как тензор Коттона равен нулю), а скалярная кривизна $R = 3/4$.

Рассмотрим теперь случай 2.21.4. Очевидно, что $\mathfrak{m}$ не содержит нетривиальных идеалов с нулевым умножением. Форма Киллинга имеет вид

$$K=\begin{pmatrix}3&0&0&-2&0\\0&0&0&0&-2\\0&0&0&0&-2\\-2&0&0&2&0\\0&-2&-2&0&0\end{pmatrix},$$

а ограничение формы Киллинга на подалгебру –

$$\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&2&0\\-2&0&0\end{pmatrix}.$$

Стандартная однородная псевдориманова метрика примет вид

$$B=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&-2&0\\2&0&0\end{pmatrix},$$

а связность Леви-Чивита –

$$\begin{pmatrix}0&1/2&0\\0&0&1/2\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2&0&0\\0&0&0\\0&0&1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\-1/2&0&0\\0&-1/2&0\end{pmatrix},$$

при этом тензор кривизны –

$$\begin{pmatrix}0&-1/4&0\\0&0&-1/4\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/4&0&0\\0&0&0\\0&0&-1/4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1/4&0&0\\0&1/4&0\end{pmatrix},$$

тензор кручения нулевой.

Алгебра голономии $\mathfrak{h}^*$ имеет вид

$$\left\{\left.\begin{pmatrix}s_2&s_1&0\\s_3&0&s_1\\0&s_3&-s_2\end{pmatrix}\right| s_1,s_2,s_3\in\mathbb{R}\right\}.$$

Тензор Риччи –

$$\mathrm{Ric}=\begin{pmatrix}0&0&1/2\\0&-1/2&0\\1/2&0&0\end{pmatrix}.$$

Пространство не является Риччи-плоским (так как тензор Риччи не равен нулю), является Эйнштейновым (поскольку $\mathrm{Ric}=\lambda B$ при $\lambda = 1/4$), Риччи-параллельным (так как ковариантная производная тензора Риччи равна нулю), локально симметрическим $(\Lambda(R)=0)$, конформно-плоским (поскольку тензор Коттона равен нулю), а $R = 3/4$.

В случае 0.1.6 $\mathfrak{m}$ не содержит нетривиальных идеалов с нулевым умножением, форма Киллинга –

$$K=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&0&4\\0&4&0\end{pmatrix},$$

стандартная однородная псевдориманова метрика имеет вид

$$B=\begin{pmatrix}-8&0&0\\0&0&-4\\0&-4&0\end{pmatrix},$$

а связность Леви-Чивита –

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1/2\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1/2&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

тензор кривизны –

$$\begin{pmatrix}0&0&-1/2\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1/2&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1/2&0\\0&0&1/2\end{pmatrix},$$

тензор кручения нулевой.

Алгебра голономии –

$$\left\{\left.\begin{pmatrix}0&s_2&s_1\\-2s_1&s_3&0\\-2s_2&0&-s_3\end{pmatrix}\right| s_1,s_2,s_3\in\mathbb{R}\right\},$$

а тензор Риччи –

$$\mathrm{Ric}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Пространство не является Риччи-плоским, является Эйнштейновым (при $\lambda = 1/4$), Риччи-параллельным, локально симметрическим, конформно-плоским, а $R = 3/4$.

Для случая 0.1.7 $\mathfrak{m}$ не содержит нетривиальных идеалов с нулевым умножением, форма Киллинга –

$$K=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix},$$

тогда стандартная однородная псевдориманова метрика –

$$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

а связность Леви-Чивита –

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1/2\\ 0 & 1/2 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 0\\ -1/2 & 0 & 0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0 & -1/2 & 0\\ 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

тензор кривизны –

$$\begin{pmatrix}0 & 1/4 & 0\\ -1/4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 1/4\\ 0 & 0 & 0\\ -1/4 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/4\\ 0 & -1/4 & 0\end{pmatrix},$$

тензор кручения нулевой.

Алгебра голономии –

$$\left\{\left.\begin{pmatrix}0 & s_1 & s_2\\ -s_1 & 0 & s_3\\ -s_2 & -s_3 & 0\end{pmatrix}\right| s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Тогда тензор Риччи –

$$\mathrm{Ric}=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix},$$

пространство не является Риччи-плоским, является Эйнштейновым ($\lambda = 1/4$), Риччи-параллельным, локально симметрическим, конформно-плоским ($R = 3/4$).

Прямыми вычислениями для всех трехмерных редуктивных однородных пространств получаем, что других специально редуктивных трехмерных однородных пространств нет. В частности, не существует специально редуктивных трехмерных однородных пространств со стабилизатором размерности более двух.

Заключение. Описаны трехмерные специально редуктивные однородные пространства. Для каждого такого пространства найдены в явном виде формы Киллинга, их ограничение на подалгебру, выписаны стандартные однородные псевдоримановы метрики, связности Леви-Чивита, тензоры кривизны, алгебры голономии, скалярные кривизны, тензоры Риччи, определено, является ли пространство Риччи-плоским, Эйнштейновым, Риччи-параллельным, локально симметрическим, конформно-плоским. Полученные результаты могут найти приложения в математике и физике, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях сводятся к изучению инвариантных объектов на однородных пространствах.

Литература

1. Рашевский П. К. Симметрические пространства аффинной связности с кручением // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1969. Вып. 8. С. 82–92.

2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. М.: Наука, 1981. 2 т.

3. Berger M. Les variétés riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive // Ann. Sci. Ecole Norm. Super. 1961. Vol. 15. P. 179–246.

4. Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В. Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. 2006. Т. 37. С. 1–78.

5. Родионов Е. Д. Односвязные компактные стандартные однородные Эйнштейновы многообразия с группой голономии SO(n) // Известия Алтайского государственного университета. 1997. № 1. С. 7–10.

6. Фляйшер А. Алгебры инвариантных псевдоримановых связностей на однородных пространствах // Ученые записки Тартуского университета. 1988. Вып. 803. С. 132–142.

7. Картан Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М.: Иностранная литература, 1949. 384 с.

8. Sagle A. On anticommutative algebras and homogeneous spaces // J. math. and mech. 1967. Vol. 16, no. 12. P. 1381–1394.

9. Можей Н. П. Трехмерные редуктивные пространства разрешимых групп Ли // Известия Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. 2016. № 6. С. 74–81.

10. Можей Н. П. Трехмерные редуктивные пространства неразрешимых групп Ли // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2017. Т. 61, № 1. С. 7–17.

References

1. Rashevskiy P. K. Symmetric spaces of affine connection with torsion. *Trudy seminara po vektornomu i tenzornomu analizu* [Proceedings of the seminar on vector and tensor analysis], 1969, issue 8, pp. 82–92 (In Russian).

2. Kobayasi Sh., Nomidzu K. *Osnovy differentsial'noy geometrii: v 2 tomakh* [Foundations of differential geometry: in 2 vol.]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 2 vol.

3. Berger M. Les variétés riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive. *Ann. Sci. Ecole Norm. Super.*, 1961, vol. 15, pp. 179–246.

4. Nikonorov Yu. G., Rodionov E. D., Slavskiy V. V. Geometry of homogeneous Riemannian manifolds. *Sovremennaya matematika i ee prilozheniya* [Modern Mathematics and Its Applications], 2006, vol. 37, pp. 1–78 (In Russian).

5. Rodionov E. D. Compact simply connected standard homogeneous Einstein manifolds with holonomy group SO(n). *Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta* [Proceedings of the Altai State University], 1997, no. 1, pp. 7–10 (In Russian).

6. Flyaysher A. Algebras of invariant pseudo-Riemannian connections on homogeneous spaces. *Uchenyye zapiski Tartuskogo universiteta* [Scientific notes of the University of Tartu], 1988, issue 803, pp. 132–142 (In Russian).

7. Kartan E. *Geometriya grupp Li i simmetricheskiye prostranstva* [Geometry of Lie groups and symmetric spaces]. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1949. 384 p.

8. Sagle A. On anticommutative algebras and homogeneous spaces. *J. math. and mech.*, 1967, vol. 16, no. 12, pp. 1381–1394.

9. Mozhey N. P. Three-dimensional reductive spaces of solvable Lie groups. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta imeni Frantsiska Skoriny* [Proceedings of the Francis Skaryna Gomel State University], 2016, no. 6, pp. 74–81 (In Russian).

10. Mozhey N. P. Three-dimensional reductive spaces of insoluble Lie groups. *Doklady Natsional'noy akademii nauk Belarusi* [Reports of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 7–17 (In Russian).

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна − кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna − PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki st., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила 29.03.2019