УДК 517.977

А. А. Якименко
Белорусский государственный технологический университет

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ МОДАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С СОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

В публикации рассмотрено достаточное условие модальной управляемости для стационарной динамической системы с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и соизмеримыми запаздываниями. Дано определение задачи модального управления для исследуемой системы. Получено новое легко проверяемое условие модальной управляемости. Показано, что при выполнении этого условия регуляторы, решающие задачу модального управления, могут быть выбраны в классе дифференциально-разностных регуляторов. В статье получены такие регуляторы, как элементарные функции параметров исходной системы. Приведен пример решения задачи модального управления для рассматриваемой системы.

Ключевые слова: системы нейтрального типа, модальное управление, дифференциально-разностные регуляторы, обратная связь, запаздывание.

A. A. Yakimenka
Belarusian State Technological University

SUFFICIENT CONDITION OF MODAL CONTROLLABILITY FOR NEUTRAL TYPE SYSTEMS WITH COMMENSURATE DELAYS

The publication considers a sufficient modal controllability condition for a stationary dynamical system with a delayed argument of a neutral type with one input and commensurate delays. The definition of the modal control problem for the system under study is given. A new, easily verifiable condition of modal controllability is obtained. It is shown that when this condition is fulfilled, the regulators that solve the modal control problem can be selected in the class of difference-differential regulators. The article has obtained such regulators as elementary functions of the parameters of the original system. An example of solving the modal control problem for the system under consideration is given.

Key words: neutral type systems, modal control, differential-difference regulators, feedback control, delay.

Введение. Задача модального управления является одной из основных задач теории управления. Такая задача хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом нейтрального типа [1–9] решение задачи модального управления значительно сложнее. Это обусловлено тем, что пространство состояний таких систем, как правило, бесконечномерно. Для систем запаздывающего типа в [4] получено достаточное условие решения задачи модального управления в классе дифференциально-разностных регуляторов. В данной статье получено обобщение этих результатов на системы нейтрального типа с одним входом и соизмеримыми запаздываниями.

Основная часть. Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и соизмеримыми запаздываниями:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{N}\Big(A_j x(t-jh) + D_j\dot{x}(t-jh) + b_j u(t-jh)\Big),\ t>0, \qquad (1)$$

где $N\in\mathbb{N}$, A_j, D_j, $j=0,1,\ldots,N$ – постоянные $(n\times n)$-матрицы, $D_0=0$; $h>0$ – постоянное запаздывание; b_j, $j=0,1,\ldots,N$ – ненулевые n-векторы; u – скалярное управление.

Характеристическое уравнение разомкнутой (с нулевым управлением) системы (1) имеет вид

$$\det\left[\lambda\left(I_n-\sum_{j=1}^{N}D_j e^{-j\lambda h}\right)-\sum_{j=0}^{N}A_j e^{-j\lambda h}\right]\equiv \equiv\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{nN}\alpha_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h}=0, \qquad (2)$$

где $e^{-j\lambda h}$ – оператор сдвига $(e^{-j\lambda h}x(t)\equiv x(t-jh))$, $\alpha_{n0}=1$.

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t)=q'_{00}x(t)+\sum_{i=0}^{L}\sum_{j=1}^{M}q'_{ij}x^{(i)}(t-jh), \qquad (3)$$

где $M\in\mathbb{N}$, $L\in\mathbb{Z}$, $L\geq 0$, q_{00}, q_{ij} – n-векторы;

$$x^{(i)}(t) \overset{def}{=} \frac{d^i}{dt^i} x(t); \;\; x^{(0)}(t) \equiv x(t).$$

Определение. Система (1) модально управляема регулятором вида (2), если для наперед заданных чисел $\tilde{\alpha}_{ij}$, $i = 0, 1, \ldots, n$; $j = 0, 1, \ldots, nN$; $\tilde{\alpha}_{n0} = 1$ найдется такой регулятор, при котором характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (2) будет иметь следующий вид (ср. с (2)):

$$\det\left[\lambda\left(I_n - \sum_{j=1}^{N} D_j e^{-j\lambda h}\right) - \sum_{j=0}^{N} A_j e^{-j\lambda h} - \right.$$
$$\left. - \sum_{j=0}^{N} b_j \left(q'_{00} + \sum_{i=0}^{L}\sum_{j=1}^{M} q'_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h}\right)\right] \equiv$$
$$\equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{nN} \tilde{\alpha}_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h} = 0.$$

Система (1) в операторной форме примет вид

$$\left(I_n - \sum_{j=1}^{N} D_j e^{-j\lambda h}\right)\dot{x}(t) =$$
$$= \sum_{j=0}^{N} A_j e^{-j\lambda h} x(t) + \sum_{j=0}^{N} b_j e^{-j\lambda h} u(t). \qquad (4)$$

Пусть выполнено условие

$$\det\left(I_n - \sum_{j=1}^{N} D_j e^{-j\lambda h}\right) \equiv \text{const} \neq 0. \qquad (5)$$

Умножим обе части системы (4) слева на матрицу $\left(I_n - \sum_{j=1}^{N} D_j e^{-j\lambda h}\right)^{-1}$. Тогда система (4) перепишется в виде

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{K}\left(\tilde{A}_j e^{-j\lambda h} x(t) + \tilde{b}_j e^{-j\lambda h} u(t)\right), \qquad (6)$$

где

$$\sum_{j=0}^{K} \tilde{A}_j e^{-j\lambda h} = \left(I_n - \sum_{j=1}^{N} D_j e^{-j\lambda h}\right)^{-1} \sum_{j=0}^{N} A_j e^{-j\lambda h},$$
$$\sum_{j=0}^{K} \tilde{b}_j e^{-j\lambda h} = \left(I_n - \sum_{j=1}^{N} D_j e^{-j\lambda h}\right)^{-1} \sum_{j=0}^{N} b_j e^{-j\lambda h}.$$

Введем обозначения

$$m = e^{-\lambda h}, \;\; \tilde{A}(m) = \sum_{j=0}^{K} \tilde{A}_j m^j, \;\; \tilde{b}(m) = \sum_{j=0}^{K} \tilde{b}_j m^j.$$

Тогда система (6) перепишется в виде

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}(m)x(t) + \tilde{b}(m)u(t). \qquad (7)$$

Пусть выполнено условие

$$\det\left[\tilde{b}(m), \tilde{A}(m)\tilde{b}(m), \ldots, \left(\tilde{A}(m)\right)^{n-1}\tilde{b}(m)\right] \equiv \text{const} \neq 0. \qquad (8)$$

Из (8) следует, что имеет место соотношение

$$\left(\tilde{A}(m)\right)^n \tilde{b}(m) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(m)\left(\tilde{A}(m)\right)^i \tilde{b}(m), \qquad (9)$$

где $\alpha_i(m)$ – многочлены переменной m.

Рассмотрим матрицу

$$T(m) = \left[t_1(m), t_2(m), \ldots, t_n(m)\right],$$

где

$$t_n(m) = \tilde{b}(m);$$
$$t_{n-1}(m) = \tilde{A}(m)\tilde{b}(m) - \alpha_{n-1}(m)\tilde{b}(m);$$
$$t_{n-2}(m) = \left(\tilde{A}(m)\right)^2\tilde{b}(m) - \alpha_{n-1}(m)\tilde{A}(m)\tilde{b}(m) -$$
$$-\alpha_{n-2}(m)\tilde{b}(m);$$
$$\vdots$$
$$t_{n-j}(m) = \left(\tilde{A}(m)\right)^j\tilde{b}(m) - \alpha_{n-1}(m)\left(\tilde{A}(m)\right)^{j-1}\tilde{b}(m) -$$
$$-\alpha_{n-2}(m)\left(\tilde{A}(m)\right)^{j-2}\tilde{b}(m) - \ldots - \alpha_{n-j}(m)\tilde{b}(m);$$
$$j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где $\alpha_i(m)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ определены в (9).

Очевидно, что

$$\det T(m) = \det\left[\tilde{b}(m), \tilde{A}(m)\tilde{b}(m), \ldots, \left(\tilde{A}(m)\right)^{n-1}\tilde{b}(m)\right] \equiv \text{const} \neq 0.$$

Введем новый вектор переменных y по формуле $x = T(m)y$. Несложно убедиться, что с новыми переменными система (7) перепишется в эквивалентной форме

$$\dot{y}(t) = \tilde{A}_1(m)y + \tilde{b}_1(m)u(t), \qquad (10)$$

где $\tilde{A}_1(m) = T^{-1}(m)\tilde{A}(m)T(m)$; $\tilde{b}_1(m) = T^{-1}(m)\tilde{b}(m)$.

Нетрудно проверить, что эти матрицы имеют вид

$$\tilde{b}_1(m) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_1(m) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix},$$

где $\alpha_i = \alpha_i(m)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ определены в (9).

Возьмем произвольные числа $\tilde{\alpha}_{ij}$, $i = 0, 1, \ldots, n$; $j = 0, 1, \ldots, nN$; $\tilde{\alpha}_{n0} = 1$ и присоединим к системе (1) регулятор

$$u(t) = [\eta_0 \quad \eta_1 \quad \ldots \quad \eta_{n-1} + \lambda\eta_n] y(t), \qquad (11)$$

где $\eta_i = -\alpha_i(m) - \sum_{j=0}^{nN} \tilde{\alpha}_{ij} m^j$, $\quad i = 0, 1, \ldots, n-1$,

$\eta_n = -\sum_{j=1}^{nN} \tilde{\alpha}_{nj} m^j.$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что регулятор (11) решает задачу модального управления для системы (10). Выполним в системе (10) обратную замену переменных $y = T^{-1}(m)x$. Тогда, очевидно, регулятор

$$u(t) = [\eta_0 \quad \eta_1 \quad \ldots \quad \eta_{n-1} + \lambda\eta_n] T^{-1}(m) x(t) \qquad (12)$$

решает задачу модального управления для системы (7). Умножим обе части системы (7) слева на матрицу $I_n - \sum_{j=1}^{N} D_j m^j$ и перейдем от системы (7) к системе (4), которая в операторном виде эквивалентна системе (1). Следовательно, регулятор (12) решает задачу модального управления для системы (1). Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема. Если для системы (1) выполнены условия (5) и (8), то она модально управляема дифференциально-разностным регулятором (12).

Пример. Рассмотрим систему (1) с матрицами

$$A(m) = \begin{bmatrix} a_{11}(m) & a_{12}(m) & a_{13}(m) \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) & a_{23}(m) \\ a_{31}(m) & a_{32}(m) & a_{33}(m) \end{bmatrix},$$

где

$$a_{11}(m) = -3 + 3m - 4m^2 + 3m^3 - m^4 + m^5,$$
$$a_{12}(m) = 4 + m + 9m^2 - 3m^3 + 5m^4 - m^5 + m^6,$$
$$a_{13}(m) = -1 - 10m - m^2 - 11m^3 + 2m^4 - 3m^5 + m^6,$$
$$a_{21}(m) = m + 4m^2 - 4m^3 + m^4 - m^5 + m^6,$$
$$a_{22}(m) = -m^2 + 6m^3 - 3m^4 + 3m^5 - m^6 + m^7,$$
$$a_{23}(m) = 1 + m + 6m^3 - 7m^4 - 3m^6 + m^7,$$
$$a_{31}(m) = -2 - 8m - 7m^2 + 2m^3 + 5m^4 + m^5,$$
$$a_{32}(m) = 3 + 11m + 14m^2 + 6m^3 + 4m^4 + 5m^5 + m^6,$$
$$a_{33}(m) = -3 - 13m - 27m^2 + 30m^3 - 11m^4 + 3m^5 + m^6,$$

$$D(m) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -m & -2m & 2m \\ -1 & 1 & 3+3m \end{bmatrix},$$

$$b(m) = \begin{bmatrix} -3 + m - m^2 \\ -m + m^2 - m^3 \\ -2 - 5m - m^2 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица $I_3 - D(m)$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ m & 1+2m & -2m \\ 1 & -1 & -2-3m \end{bmatrix}.$$

Ее определитель равен 1, следовательно, условие (5) выполнено. После перехода от системы (1) к системе (4) и умножения обеих частей системы (4) слева на матрицу $(I_3 - D(m))^{-1}$ придем к системе (7) с матрицами

$$\tilde{A}(m) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11}(m) & \tilde{a}_{12}(m) & \tilde{a}_{13}(m) \\ \tilde{a}_{21}(m) & \tilde{a}_{22}(m) & \tilde{a}_{23}(m) \\ \tilde{a}_{31}(m) & \tilde{a}_{32}(m) & \tilde{a}_{33}(m) \end{bmatrix},$$

где

$$\tilde{a}_{11}(m) = -4m^2 + m^4 + m^5,$$
$$\tilde{a}_{12}(m) = 1 + m + 6m^2 + m^3 + 2m^4 + m^5 + m^6,$$
$$\tilde{a}_{13}(m) = -3m - 3m^2 - 11m^3 - 5m^4 - m^5 + m^6,$$
$$\tilde{a}_{21}(m) = 3m - m^4,$$
$$\tilde{a}_{22}(m) = -3m - 2m^3 - m^5,$$
$$\tilde{a}_{23}(m) = 1 + m + 7m^2 + 3m^3 + 2m^4 - m^5,$$
$$\tilde{a}_{31}(m) = 1 + m - m^3,$$
$$\tilde{a}_{32}(m) = -1 - 2m - m^2 - m^4,$$
$$\tilde{a}_{33}(m) = 1 + 3m + 4m^2 + 2m^3 - m^4,$$

$$\tilde{b}(m) = \begin{bmatrix} -m - m^2 \\ m \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\tilde{A}(m)\tilde{b}(m) = \begin{bmatrix} -2m - 2m^2 - m^3 \\ 1 + m + m^2 \\ 1 + m \end{bmatrix},$$

$$\left(\tilde{A}(m)\right)^2 \tilde{b}(m) = \begin{bmatrix} 1 - m + 2m^2 + 2m^3 + m^4 \\ 1 - m - m^2 - m^3 \\ -m - m^2 \end{bmatrix},$$

а определитель матрицы $\left[\tilde{b}(m), \tilde{A}(m)\tilde{b}(m), \left(\tilde{A}(m)\right)^2\tilde{b}(m)\right]$ равен -1. Таким образом выполнено условие (8), следовательно, рассматриваемая система модально управляема.

Столбцы матрицы $T(m)=\left[t_1(m), t_2(m), t_3(m)\right]$ имеют вид

$$t_1(m)=\begin{bmatrix}1+3m^2+3m^3+m^4\\ -m-2m^2-m^3\\ -2m-m^2\end{bmatrix},$$

$$t_2(m)=\begin{bmatrix}-m-m^2-m^3\\ 1+m^2\\ m\end{bmatrix},$$

$$t_3(m)=\begin{bmatrix}-m-m^2\\ m\\ 1\end{bmatrix}.$$

Матрица $\tilde{A}_1(m)=T^{-1}(m)\tilde{A}(m)T(m)$ в (10) имеет следующий вид:

$$\tilde{A}_1(m)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Тогда регулятор, решающий задачу модального управления для системы (10), приобретает вид

$$u(t)=\left[\eta_0 \quad \eta_1 \quad \eta_2+\lambda\eta_3\right]y(t),$$

где

$$\eta_0=-1-\sum_{j=0}^{6}\tilde{\alpha}_{0j}m^j,$$

$$\eta_1=1-\sum_{j=0}^{6}\tilde{\alpha}_{1j}m^j,$$

$$\eta_2=-1-\sum_{j=0}^{6}\tilde{\alpha}_{2j}m^j,$$

$$\eta_3=-\sum_{j=0}^{6}\tilde{\alpha}_{3j}m^j.$$

Для исходной системы искомый регулятор имеет следующий вид:

$$u(t)=\left[\eta_0 \quad \eta_1 \quad \ldots \quad \eta_{n-1}+\lambda\eta_n\right]T^{-1}(m)x(t),$$

где

$$T^{-1}(m)=\begin{bmatrix}1 & m & m\\ m & 1+m^2 & m+m^2\\ 2m & m+2m^2 & 1+3m^2\end{bmatrix}.$$

Заключение. В статье получен способ преобразования системы с запаздывающим аргументом нейтрального типа в систему запаздывающего типа. При выполнении описанных условий (5), (8) для такой системы получен регулятор, решающий задачу модального управления. Этот регулятор принадлежит к классу дифференциально-разностных регуляторов, который является наиболее простым в реализации. Также рассмотрен иллюстративный пример.

Литература

1. Марченко В. М. О проблеме модального управления в линейных системах с запаздыванием // Доклады Академии наук БССР. 1978. № 5. С. 401–404.

2. Salamon D. Control and Observation of Neutral Systems. London: Pitman Press, 1984. 362 p.

3. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1967. Vol. AC-12, no. 6. P. 660–665.

4. Кириллова Ф. М., Марченко В. М. Функциональные преобразования и некоторые канонические формы в линейных системах с запаздывающим аргументом. Минск, 1978. 28 с. (Препринт / Акад. наук БССР, № 7 (39)).

5. Spong M. W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems // Circuits Systems Signal Process. 1986. Vol. 5, no. 1. P. 69–84.

6. Якименко А. А. Модальное управление одной запаздывающей системой // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–7.

7. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 18–21.

8. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 2. С. 25–27.

9. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае при кратных корнях // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2018. № 1. С. 5–8.

References

1. Marchenko V. M. On problem of modal control in linear systems with delay. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Reports of the BSSR Academy of Science], 1978, no. 5, pp. 401–404 (In Russian).

2. Salamon D. Control and Observation of Neutral Systems. London, Pitman Press, 1984. 362 p.

3. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1967, vol. AC-12, no. 6, pp. 660–665.

4. Kirillova F. M., Marchenko V. M. *Funktsional'nyye preobrazovaniya i nekotoryye kanonicheskiye formy v lineynykh sistemakh s zapazdyvayushchim argumentom* [Functional transforms and some canonical forms for linear retarded systems]. Minsk, 1978. 28 p.

5. Spong M. W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems. *Circuits Systems Signal Process*, 1986, vol. 5, no. 1, pp. 69–84.

6. Yakimenka A. A. Modal control for one delayed system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 3–7 (In Russian).

7. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 18–21 (In Russian).

8. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 2, pp. 25–27 (In Russian).

9. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case with double roots. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 1, pp. 5–8 (In Russian).

Информация об авторе

Якименко Андрей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yakimenko@belstu.by

Information about the author

Yakimenka Andrei Aliaksandravich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakimenko@belstu.by

Поступила 14.05.2019