

УДК 519.624

И. Ф. Соловьева

Белорусский государственный технологический университет

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МАЛОГО ПАРАМЕТРА
НА РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ**

В данной работе исследуются двухточечные граничные задачи с малым параметром при старшей производной. Для их решения предлагается модификация метода дифференциальной ортогональной прогонки. Идея метода заключается в переходе от исходной граничной задачи к совокупности трех задач Коши. Две задачи Коши решаются в прямом направлении, а третья задача – в обратном. Поскольку малый параметр, стоящий при старшей производной, очень мал, то решение вблизи граничных точек начинает быстро расти, и поэтому возникают пограничные или внутренние переходные слои. Чтобы замедлить рост решения и особенно рост градиента решения, в зонах пограничных слоев вводятся регулирующие множители, нейтрализующие профили пограничных слоев вблизи граничных точек. В работе изучается влияние малого параметра на решение граничной задачи с пограничным слоем, наглядная демонстрация которого представлена в виде графического решения примера с различным малым параметром при старшей производной. На графиках показано, как изменяется решение при уменьшении параметра. Решение примера получено при использовании пакета Mathcad.

Ключевые слова: малый параметр, пограничный слой, двухточечные граничные задачи.

I. F. Solov'yeva

Belarusian State Technological University

**STUDY OF THE INFLUENCE OF A SMALL PARAMETER
ON THE SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS WITH A BOUNDARY LAYER**

This paper studies two-point boundary value problems with a small parameter with the highest derivative. To solve them, a modification of the method of differential orthogonal sweep is proposed. The idea of the method is to move from the initial boundary problem to the totality of three Cauchy problems. Two Cauchy problems are solved in the forward direction, and the third problem is in the opposite direction. Since the small parameter standing at the highest derivative is very small, the solution near the boundary points starts to grow rapidly, and therefore, boundary or internal transition layers appear. In order to slow down the growth of the solution, and especially the growth of the gradient of the solution, regulating factors are introduced in the zones of the boundary layers, neutralizing the profiles of the boundary layers near the boundary points. The paper studies the effect of a small parameter on the solution of a boundary problem with a boundary layer, a visual demonstration of which is presented in the form of a graphical solution of an example with a different small parameter with the highest derivative. The graphs show how the solution changes as the parameter decreases. The solution is obtained using the Mathcad package.

Key words: small parameter, boundary layer, two-point boundary value problems.

Введение. Граничные задачи с малым параметром при старшей производной являются математическими моделями с очень сложным характером поведения решений. Решение такого рода задач быстро меняется вблизи граничных точек, т. е. здесь мы наблюдаем наличие пограничных слоев [1].

Открытие теории пограничного слоя принадлежит Людвигу Прандтлю. Он сформулировал и обосновал большую часть ее развития. Самым простым случаем пограничного слоя является пример простой твердой стенки, вдоль которой протекает жидкая или газообразная среда, в непосредственной близости от которой стенка захватывает «тонкий» слой. Это и есть пограничный слой. Он образуется за счет вязкости анализируемой среды [1].

Рассмотрим движение частицы массой m , закрепленной на линейной пружине с коэффи-

циентом жесткости k и испытывающей сопротивление среды, коэффициент вязкости которой равен μ .

Применяя второй закон Ньютона, получим обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$mu''(t) + \mu u'(t) + ku(t) = 0,$$

где $u(t)$ – смещение частицы; t – время. Если частица начинает движение без начальной скорости, т. е. из состояния покоя, описываемого координатой u_0 , то начальные значения будут следующими: $u(0) = u_0$, $u'(0) = 0$. Представим, что смещение $u(t)$ – безразмерная величина. В качестве характерной длины можно взять начальное смещение u_0 , а в качестве характерного масштаба времени принять величину, обрат-

ную собственной частоте системы, т. е. $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Тогда уравнение, учитывающее начальные условия, примет вид

$$mw_0^2 y'' + \mu y' + mw_0 y = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, x > 0.$$

Здесь $mw_0 \ll 1$. Полученная задача – задача с малым параметром при старшей производной.

Рассмотрим случай, когда упругая сила пружины задана в виде нелинейной функции:

$$f = k_1 u + k_2 u^2.$$

Тогда уравнение с малым параметром при старшей производной примет следующий вид:

$$mw_0^2 y'' + \mu w_0 y' + k_1 u_0 y + k_2 u_0^2 y^2 = 0.$$

Явление нелинейности данного уравнения характеризуется наиболее полно величиной $\frac{k_2}{k_1} u_0 = \varepsilon$. Малый параметр ε оказывает очень сильное влияние на решение граничных задач. Особенно его влияние проявляется в узких зонах вблизи граничных точек. Здесь решение начинает очень быстро расти, и процесс его нахождения становится затруднительным.

Постановка задачи. Рассмотрим двухточечные граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной вида [2]

$$\begin{cases} \varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) - b(x)y(x) = f(x), \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad 0 < x < 1, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} -\varepsilon y''(x) + b(x)y(x) = f(x), \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad 0 < x < 1, \quad \varepsilon > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Задача (1) является задачей с одним пограничным слоем, а задача (2) – задачей с двумя пограничными слоями.

Задачи вида (1), (2) являются математическими моделями диффузионно-конвективных процессов и называются сингулярно возмущенными. Их решение может быстро изменяться вблизи граничных точек, т. е. мы имеем пограничный слой. Причина трудностей решения задач с пограничным слоем заключается в неустойчивости данного численного процесса и быстром росте решения и градиента решения вблизи граничных точек.

Для численного решения граничных задач с пограничным слоем вида (1), (2) предлагается модификация метода дифференциальной орто-

гональной прогонки с введением в зонах пограничных слоев соответствующих регулирующих множителей, стабилизирующих поведение решения и его градиента. Этот метод позволяет применить единый подход к решению граничных задач с одним и двумя пограничными слоями.

1. Рассмотрим, например, граничную задачу вида (2), т. е. задачу с двумя пограничными слоями и с малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной. Представим ее в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\frac{f(x)}{\varepsilon} + \frac{b(x)}{\varepsilon} y_1, \quad 0 < x < 1, \quad \varepsilon > 0 \end{cases} \quad (3)$$

с заданными граничными условиями:

$$y_1(0) = A, \quad y_2(0) = B. \quad (4)$$

2. Введем в полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (3) множители $m_2(x, \varepsilon) > 0$, $m_1(x, \varepsilon) > 0$, регулирующие поведение функций $y(x)$ и $y'(x)$, т. е. самого решения и градиента решения вблизи пограничных слоев, где, как правило, решение и его градиент быстро растут. При выборе этих множителей нужно учитывать, чтобы произведения $m_1(x, \varepsilon)y_1(x)$, $m_2(x, \varepsilon)y_2(x)$ были в необходимой мере стабилизированы [2].

3. Рассмотрим вспомогательную функцию $Q(x)$ и новые неизвестные функции $u(x)$ и $v(x)$. Получим выражение для $y(x)$ и $y'(x)$:

$$\begin{aligned} m_1(x, \varepsilon)y_1(x) &= \sin Q(x)u(x) + \cos Q(x)v(x), \\ m_2(x, \varepsilon)y_2(x) &= \cos Q(x)u(x) - \sin Q(x)v(x). \end{aligned} \quad (5)$$

4. Исходную граничную задачу представим в виде совокупности трех соответствующих задач Коши для функций $Q(x)$, $u(x)$, $v(x)$. При решении задач Коши для функций $Q(x)$ и $u(x)$ применим прямой ход дифференциальной ортогональной прогонки:

$$Q' = \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2'}{2m_2} \sin 2Q - \left(\frac{m_2 b}{m_1 \varepsilon} + \frac{m_1}{m_2} \right) \cos^2 Q, \quad (6)$$

$$Q(0) = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2 b}{m_1 \varepsilon} \right) \sin 2Q + \frac{m_2'}{m_2} \cos^2 Q \right] u - \\ &\quad - m_2 \frac{f}{\varepsilon} \cos Q, \quad (7) \\ u(0) &= Am_1(0, \varepsilon). \end{aligned}$$

Получив численные значения для нахождения функций $Q(x)$ и $u(x)$ в каждой точке заданного отрезка, будем осуществлять обратный ход метода прогонки.

Обратный ход прогонки для решения задачи Коши и нахождения функции $v(x)$ иллюстрируют формулы (8). При этом движение идет с конца отрезка, в котором начальные условия уже получены с учетом значений $Q(1)$ и $u(1)$ за счет прямого хода прогонки.

Учитывая эти значения функции на правом конце интервала как начальные и осуществляем обратный ход метода дифференциальной ортогональной прогонки, используя следующие формулы:

$$v' = \left[-\frac{m_2'}{m_2} \sin 2Q + \frac{m_2 b}{m_1 \varepsilon} \cos 2Q + 2 \frac{m_1}{m_2} \cos^2 Q - \frac{m_1}{m_2} \right] u + \left[\frac{m_2'}{m_2} \sin^2 Q - \frac{1}{2} \left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2 b}{m_1 \varepsilon} \right) \sin 2Q \right] v + m_2 \frac{f}{\varepsilon} \sin Q, \quad (8)$$

$$v(1) = \frac{1}{\cos Q(1)} [B - \sin Q(1)] u(1), \quad \cos Q(1) = 0.$$

Полученные задачи Коши являются благоприятными в вычислительном отношении. При этом каждая задача Коши вида (6)–(8) решается по формулам известных численных методов, например, Рунге – Кутта, а также В-устойчивых и Д-устойчивых методов [3].

Проследим на примере, как малый параметр влияет на решение граничной задачи [4]. Будем придавать параметру ε различные значения, начиная с достаточно больших и заканчивая малыми значениями, и увидим, как меняется при этом решение граничной задачи.

Пример. Методом дифференциальной ортогональной прогонки получить решение граничной задачи с различными значениями малого параметра ε :

$$\varepsilon y'' + (1+x^2)y'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 y(x) = -(x^2 + \exp(x)),$$

$$0 < x < 1, y(0) = -1, y(1) = 0.$$

Для решения данной задачи методом дифференциальной ортогональной прогонки воспользуемся математическим пакетом Mathcad, главными достоинствами которого являются простота использования, возможность создания таблиц и графиков. Поэтому решение представим в виде графиков.

Для первого решения задачи положим достаточно большое значение для малого параметра. Пусть $\varepsilon = 2$ (рис. 1).

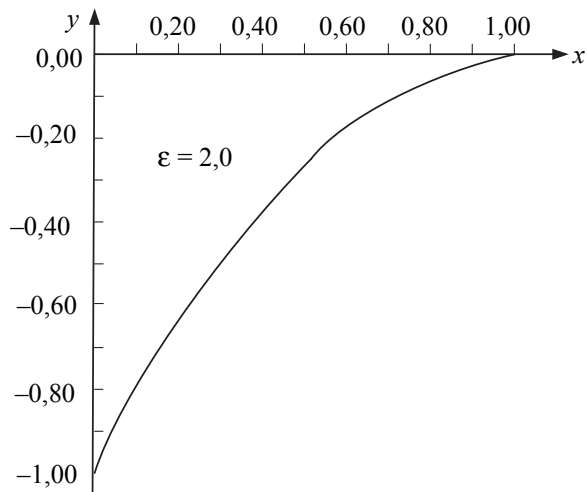


Рис. 1. Малый параметр $\varepsilon = 2$

Уменьшим значение малого параметра ε и проследим за полученными результатами решения (рис. 2).

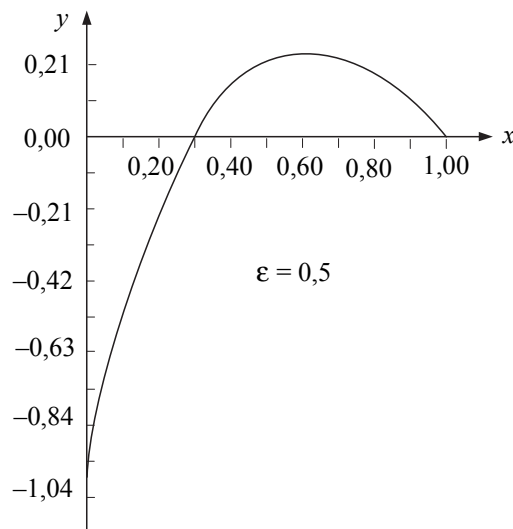


Рис. 2. Малый параметр $\varepsilon = 0,5$

Видно, что решение изменилось. На достаточно большом участке от 0,30 до 1,00 оно приняло положительные значения.

Далее, уменьшая малый параметр при старшей производной, получили практически совершенно новое решение, принимающее нулевые или положительные значения на всем рассматриваемом участке (рис. 3).

На рис. 1–3 видно, как изменяется решение одной и той же задачи в зависимости от малого параметра, стоящего при старшей производной.

Математики шутят, что малый параметр породил большую теорию. Ведь это правда. Задачи с малым параметром не теряют своего значения и в наши дни. В связи с быстро растущим техническим прогрессом появляется

очень много прикладных задач, математическими моделями которых становятся граничные задачи с малым параметром при старшей производной [5].

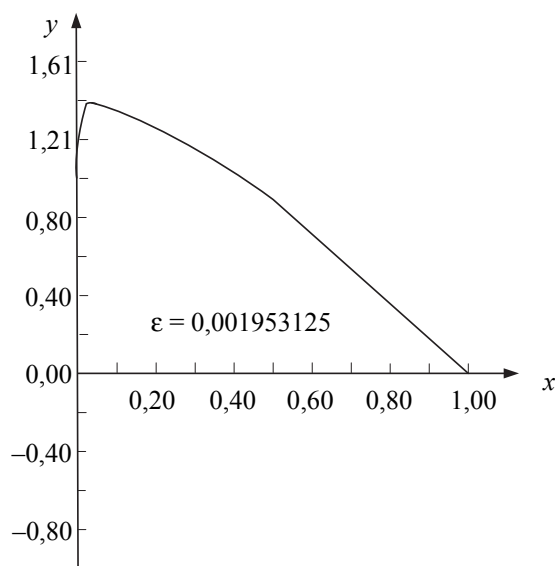


Рис. 3. Малый параметр $\varepsilon \approx 0,002$

Такие задачи широко распространены в механике, магнитодинамике, динамике жидкостей, в физике и других областях науки и техники. В качестве примеров задач с малым параметром при старшей производной можно привести задачи о течениях Навье – Стокса с большими числами Рейнольдса, задачи магнитной гидродинамики с большими числами Хартмана и т. д.

Пограничный слой является очень тонким слоем. Например, при полете птиц, бабочек, самолетов толщина пограничного слоя будет вычисляться в миллиметрах; у пароходов толщина пограничного слоя будет оцениваться в сантиметрах. Зато пограничный слой ветра над водой или сушей измеряется уже в метрах.

Задачи с пограничными слоями очень сложны в вычислительном отношении, а так как область их применения постоянно расширяется, то интерес к их решению неуклонно возрастает. Нужно не только применить численный метод решения задачи, но и реализовать выбранный алгоритм, используя тот или иной математический пакет. Большие сложности при решении данных задач возникают вблизи граничных точек, т. е. в зонах пограничных слоев, где наблюдается неограниченный рост решения, и особенно градиентов решения.

Проследим влияние пограничного слоя на решение задач на следующем примере.

Пример. Рассмотрим двухточечную граничную задачу с одним пограничным слоем:

$$\varepsilon y'' + y'(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, стоящий при старшей производной.

Решим ее сначала как обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Составим характеристическое уравнение

$$\varepsilon \lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Общее решение получим в виде

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-\frac{x}{\varepsilon}}.$$

С учетом граничных условий ее частное решение примет вид

$$y(x) = \frac{1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}.$$

Найдем $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x) = \tilde{y}(x)$. Понятно, что

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Функция $\tilde{y}(x)$ имеет разрыв в точке $x = 0$. Решение представим в виде графика (рис. 4).

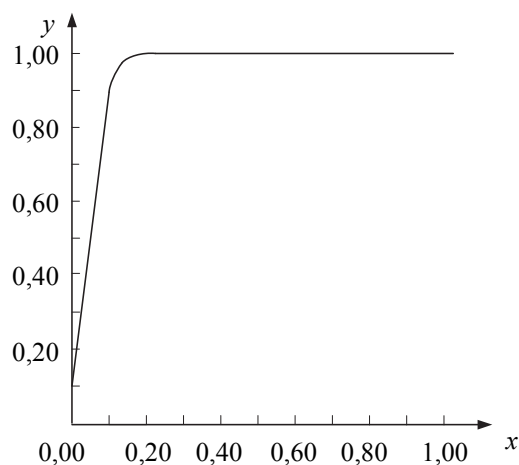


Рис. 4. Влияние пограничного слоя

Предположим, что в условии примера $\varepsilon = 0$. Тогда первое слагаемое обращается в 0, и получаем редуцированную задачу для заданного уравнения вида

$$y'(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y(1) = 1.$$

Ее решение: $y_0(x) \equiv 1$. Если $\varepsilon \rightarrow 0$, то функция $y(x) \rightarrow y_0(x)$, за исключением малой окрестности вблизи точки $x = 0$. Здесь функция $y(x)$ быстро изменяется в связи с выполнением

левого граничного условия $y(0)=0$. Это возможно осуществить только при быстром возрастании $y(x)$ в окрестности точки $x=0$, следовательно, мы наблюдаем возникновение пограничного слоя. Это хорошо видно на рис. 4. Пограничный слой находится вблизи окрестности левой граничной точки $x=0$. На малом участке заданного отрезка от точки $x=0$ до точки $x=0,2$ наблюдается быстрый рост решения. Оно изменяется от значения функции $y=0$ до $y=1$. На оставшемся отрезке значение функции остается постоянным.

Вместе с решением вблизи левого граничного условия неограниченно быстро растет градиент решения. Ширина пограничного слоя очень мала, примерно порядка ε . На правом граничном условии при $x=1$ пограничный слой отсутствует, так как $y_0(1)=\bar{y}(1)$.

Заключение. Любая математическая модель, описывающая реальные процессы в терминах дифференциальных уравнений, обязательно будет включать в себя различные параметры. Значения этих параметров в обычной

ситуации известны лишь приближенно с заданной точностью. Поэтому вопрос о характере поведения решений дифференциальных уравнений при малом изменении величины входящего в уравнение параметра всегда представляет принципиальный интерес.

Природа математических моделей такого рода задач объясняется сущностью процессов и явлений, которые описываются данными уравнениями.

Предложенный метод дифференциальной ортогональной прогонки наглядно продемонстрировал влияние малого параметра на решение граничных задач. Он достаточно прост и перспективен для решения граничных задач с пограничными слоями. Здесь не нужно решать громоздких систем уравнений. Регулирующие множители, стоящие перед решением и градиентом, нейтрализуют их рост непосредственно в зонах пограничных слоев. На рис. 1–3 видно изменение решения при изменении ε . Реализация метода с помощью пакета Mathcad доступна, удобна в обращении и легко представляется графиками.

Литература

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
2. Соловьева И. Ф. Влияние пограничных слоев на решение граничных задач с малым параметром при старшей производной // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 12–14.
3. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983. 186 с.
4. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979. 312 с.
5. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге – Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1983. 200 с.

References

1. Schlikhting G. *Teoriya pogranichnogo sloya* [Theory of the boundary layer]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 712 p.
2. Solov'yeva I. F. The influence of boundary layers on the solution of boundary problems with a small parameter with the highest derivative. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 12–14 (In Russian).
3. Dulan E., Miller Dzh., Shilders U. *Ravnomernyye chislennyye metody resheniya zadach s pogranichnym sloyem* [Uniform numerical methods for solving problems with initial and boundary layer]. Moscow, Mir Publ., 1983. 186 p.
4. Holl Dzh., Uatt Dzh. *Sovremennyye chislennyye metody resheniya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Modern numerical methods for solving ordinary differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1979. 312 p.
5. Dekker K., Verver Ya. *Ustoychivost' metodov Runge – Kutta dlya zhestkikh nelineynykh differentsial'nykh uravneniy* [Stability of Runge – Kutta methods for stiff nonlinear differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1983. 200 p.

Информация об авторе

Соловьева Ирина Федоровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ira1234568@tut.by

Information about the author

Solov'yeva Irina Fedorovna – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ira1234568@tut.by

Поступила 27.04.2019