

УДК 517.935.2+519.71

И. М. Борковская, О. Н. Пыжкова

Белорусский государственный технологический университет

ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯТОРОВ ПО ТИПУ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТАБИЛИЗАЦИИ И УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Применение линейной обратной связи позволяет проводить исследования таких качественных свойств систем управления, как стабилизируемость, модальная управляемость, реконструируемость, расцепимость. В работе рассмотрены виды регуляторов, построение которых основано на принципе обратной связи. Они применяются при решении задач стабилизации, модального управления для систем, которые описывают процессы, носящие неоднородный характер. В частности, приведены примеры построения регуляторов, стабилизирующих системы с запаздыванием, дескрипторные системы, дискретно-непрерывные системы. Представлен расчет стабилизирующего регулятора разностного типа для реальной системы. Результаты могут быть полезны при синтезе управляющих воздействий в системах управления.

Ключевые слова: регуляторы по типу обратной связи, стабилизация, модальное управление, системы с запаздыванием, дискретно-непрерывные системы.

I. M. Borkovskaya, O. N. Pyzhkova

Belarusian State Technological University

THE CONSTRUCTION OF REGULATORS ON TYPE OF FEEDBACK FOR SOLVING THE PROBLEMS OF STABILIZATION AND CONTROLLABILITY OF DYNAMIC SYSTEMS

The use of linear feedback allows one to study such qualitative properties of control systems as stabilizability, modal controllability, reconstructibility, and decoupling. The paper considers the types of regulators, the construction of which is based on the principle of feedback, used in solving problems of stabilization, modal control for systems describing processes that are heterogeneous in nature. In particular, examples of constructing regulators stabilizing systems with delay, descriptor systems, discrete-continuous systems are considered. The calculation of a stabilizing regulator of a difference type for a real system is presented. The results can be useful in the synthesis of control actions in the control systems.

Key words: regulators on type of feedback, stabilization, modal control, delay systems, discrete-continuous systems.

Введение. Важную роль в качественной теории управления играет принцип обратной связи, когда управление формируется в виде $u(x), x \in R^n$, функции от текущего состояния $x^*(t), t \in T$, объекта исследуемого процесса. Принцип обратной связи, по словам Р. Калмана [1], составляет «основу всей автоматики» и включает «наиболее важную идею теории управления». Принцип обратной связи пропа-

гандировал Р. Беллман [2]. Следует отметить работы А. М. Летова по аналитическому конструированию регуляторов [3].

Обратная связь – основа основ современной техники. Трудно назвать какую-либо ее область, где бы не нашла применения обратная связь. Регуляторы температуры поддерживают нужную температуру, регуляторы давления – заданное давление, регуляторы скорости – требуемое чис-

ло оборотов вала, регуляторы напряжения – постоянство напряжения в электросети.

Обратная связь используется для стабилизации и управления положением движущихся в пространстве объектов. Ее применение позволило расширить исследования в области таких качественных свойств систем управления, как модальная управляемость, реконструируемость, расцепимость.

Система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t > 0,$$

где A – постоянная $n \times n$ -матрица; $x(t)$ – n -вектор состояния системы; B – постоянная $n \times r$ -матрица; $u(t)$ – r -вектор управления, называется стабилизируемой обратной связью по состоянию, если существует такой регулятор вида $u(t) = Qx(t)$ (Q – постоянная $r \times n$ -матрица), при которой замкнутая система

$$\dot{x}(t) = (A + BQ)x(t)$$

асимптотически устойчива. Критерий стабилизируемости системы состоит в следующем: система стабилизируема тогда и только тогда, когда неустойчивые движения принадлежат управляемой части, что эквивалентно требованию

$$\text{rank}[\lambda I - A, B] = n$$

для любых комплексных чисел λ , $\text{Re } \lambda \geq 0$ (I – единичная матрица размера $n \times n$).

Так как решение задачи стабилизации не единственно, то на линейную обратную связь по состоянию можно накладывать дополнительные ограничения, например, требовать ее оптимальность по заданному критерию качества. Задача возможности стабилизации системы при воздействии дискретных регуляторов подробно изучалась В. И. Зубовым [4]. Исследовалась также стабилизируемость математических моделей (с малым параметром) конкретных физических процессов, а также изучалась задача построения стабилизирующих регуляторов по выходу для систем с неполной информацией.

Проблема модального управления или управления спектром является обобщением задачи стабилизации. Теория модального управления имеет множество практических приложений. Она развивалась совместно с другими разделами, например, с теорией аналитического конструирования регуляторов. Система называется модальной управляемой (управляемой спектром), если для произвольного наперед заданного допустимого набора комплексных чисел существует такая линейная обратная связь, что спектр замкнутой системы совпадает с этим набором. Истоки проблемы модального управления лежат в классической теории регулирования. Современная история этой задачи начи-

нается с первой ее строгой постановки и обоснования Уонэмом [5]. Задача была решена для систем обыкновенных дифференциальных уравнений при наличии полной информации о состоянии.

Для систем с неполной информацией о состоянии были предложены различные способы построения регуляторов, обеспечивающих требуемый спектр в замкнутой системе.

В литературе получены необходимые и достаточные условия существования интегрального регулятора, решающего задачу модального управления при наличии возмущений. Исследовались различные аспекты построения динамических регуляторов: регуляторы минимального порядка, чувствительность, дискретные регуляторы, регуляторы в частотной области. Рассматривалась задача частичного модального управления, когда задается область расположения желаемого спектра. Исследовались дифференциально-разностные системы с точки зрения их модальной управляемости дифференциально-разностными регуляторами по типу обратной связи.

В данной работе изучены виды регуляторов, построение которых основано на принципе обратной связи. Они решают задачи стабилизации, модального управления для систем с запаздыванием, дескрипторных систем и в общем для систем, описывающих процессы, носящие неоднородный характер, – гибридных динамических систем.

Основная часть. Рассмотрим виды обратной связи, использующиеся при исследовании различных свойств систем с последствием.

В связи с проблемами стабилизации и модального управления системы с запаздывающим аргументом вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + bu(t), \quad t > 0, \\ u(t) &\in R, x(t) \in R^n, \quad b \in R^n, A_i \in R^{n \times n}, \quad i = 0, 1, \end{aligned} \quad (1)$$

где h – постоянное запаздывание, исследовалась интегральная обратная связь в форме

$$u(t) = \int_{-h}^0 [dQ(s)]x(t+s), \quad t > 0,$$

где $Q(s)$ – $(1 \times n)$ -матрица-функция, компонентами которой являются функции ограниченной вариации на интервале $[-h, 0]$, а также более общая обратная связь

$$u(t) = \int_{-\theta}^0 [dQ(s)]x(t+s), \quad t > 0,$$

где $\theta \geq h$ подлежит определению. В случае, когда мера Стильеса является дискретной и сосредоточена в точках $-jh, j = 0, \dots, N$, при-

ходим к линейной обратной связи в виде разностного регулятора

$$u(t) = \sum_{j=0}^N q'_j x(t-jh).$$

Такой регулятор более удобен с точки зрения его практической реализации. Частным случаем указанного выше регулятора является регулятор вида

$$u(t) = q'_0 x(t) + q'_1 x(t-h), \quad (2)$$

$$q_0, q_1 \in R^n,$$

не выводивший систему за пределы рассматриваемого класса.

Также для решения задач стабилизации систем с последействием находит применение регулятор вида

$$\sum_{j=0}^N p_j u(t-jh) = \sum_{j=0}^N q'_j x(t-jh)$$

и обобщающий его интегральный регулятор.

В статье [6] рассматривается возможность стабилизации двумерных динамических систем с запаздывающим аргументом с помощью регуляторов разностного типа, реализация которых существенно проще регуляторов интегрального типа. Представлены конструктивные алгоритмы построения регуляторов разностного типа, не требующие знания характеристических значений. В случае, когда вопрос о существовании разностного регулятора, стабилизирующего исходную систему, остается открытым, предлагается метод построения интегрального регулятора, основанный на теореме Винера – Пэли из теории целых функций конечной степени. Таким образом, показано, что в случае разрешимости системы относительно производной для $n=2$ и при условии выполнения представленных достаточных условий стабилизируемости, можно осуществить стабилизацию системы регуляторами разностного типа.

Рассмотрим систему с запаздывающим аргументом (1) и присоединим к системе регулятор типа обратной связи вида (2), не выводивший систему за пределы заданного класса. Систему назовем стабилизируемой, если существует регулятор вида (2) такой, что корни характеристического уравнения замкнутой системы имеют отрицательные действительные части. Исследуем систему (1) при $n=2$. Необходимое для стабилизации системы (1) условие

$$\text{rank}[\lambda I - A_0 - e^{-\lambda h} A_1, b] = n,$$

$$\forall \lambda \in C, \text{Re} \lambda \geq 0,$$

будем предполагать выполненным.

В случае $\det[b, A_1 b] = 0$ преобразование $x = Ty$, $T = [d, b]$ с произвольным вектором d таким, что $\det T \neq 0$, приводит систему к следующему виду:

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} y(t) +$$

$$+ \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & 0 \\ \alpha_{21}^1 & \alpha_{22}^1 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

где α_{11} , α_{21} , α_{22} , α_{11}^1 , α_{21}^1 , α_{22}^1 – некоторые действительные числа.

Если $\det[b, A_1 b] = 0$, $\det[b, A_0 b] = 0$, то система (1) стабилизируема регулятором (2) тогда и только тогда, когда точка $(-\alpha_{11}, -\alpha_{11}^1)$ принадлежит области устойчивости Ω , граница которой описывается линиями

$$\beta = -\alpha \quad \text{и} \quad \begin{cases} \alpha + \beta \cos(hg) = 0, \\ g - \beta \sin(hg) = 0, \end{cases} \quad 0 < g < \frac{\pi}{h}.$$

Если $\det[b, A_1 b] = 0$, $\det[b, A_0 b] \neq 0$, то возможно дальнейшее упрощение системы

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) +$$

$$+ \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t).$$

Тогда система (1) стабилизируема обратной связью (2) при любом запаздывании h , $h > 0$.

В случае $\det[b, A_1 b] \neq 0$ после преобразования системы получаем:

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t).$$

Тогда система (1) стабилизируема регулятором (2), если точка $(\alpha_{11}, \alpha_{12})$ принадлежит области, которая ограничена линиями $\alpha_{12} = 1$, $\alpha_{12} = -1$, $\alpha_{12} = \alpha_{11}h - 1$. Если точка $(\alpha_{11}, \alpha_{12})$ не принадлежит указанной области, то вопрос о стабилизируемости системы остается открытым. Но если $e^{-\alpha_{11}h} + \alpha_{12} \neq 0$ для $\alpha_{11} > 0$, то существует интегральный регулятор, решающий проблему стабилизации. В силу теоремы Винера – Пэли с учетом вида

регулятора его коэффициенты в операторной форме достаточно искать в классе линейных комбинаций многочленов первой степени по отношению к e^{-ph} и целых функций, квадратично интегрируемых вдоль мнимой оси. Тогда, возвращаясь к оригиналам, получим искомым регулятор. Стабилизирующий регулятор имеет вид

$$v(t) = \frac{-\alpha_{11}r_1 - \alpha_{11} - r_2}{\alpha_{12} + e^{-\alpha_{11}h}} y_1(t) - (r_1 + \alpha_{11})y_2(t) + \int_{-h}^0 q_2(-\mu)y_2(t+\mu)d\mu.$$

Рассмотрим дискретно-непрерывную систему [7]:

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(kh), \quad t \in [kh, (k+1)h); \quad (3)$$

$$y(kh+h) = A_{21}x(kh) + A_{22}y(kh) + Bu(kh), \quad (4)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

В формулах (3), (4) $x(t) \in R^n$, $y(kh) \in R^m$, $u(kh) \in R^r$, $h > 0$, A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} , B – постоянные матрицы соответствующих размеров с начальными условиями

$$x(0) = x(+0) = x_0; \quad y(0) = y_0.$$

Для ее стабилизации в работе [7] используется регулятор вида

$$u(kh) = Q_1 x(kh) + Q_2 y(kh), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где Q_1 и Q_2 – постоянные матрицы размеров $r \times n$ и $r \times m$ соответственно. Замкнутая система имеет вид

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(kh), \quad t \in [kh, (k+1)h);$$

$$y(kh+h) = (A_{21} + BQ_1)x(kh) + (A_{22} + BQ_2)y(kh).$$

Показано, что система (1), (2) является стабилизируемой указанным дискретным регулятором тогда и только тогда, когда

$$\text{rank}[\lambda I_{n+m} - \sum_h, \Delta] = n + m$$

для всех комплексных чисел λ , таких что $|\lambda| \geq 1$.

Рассмотрим теперь такой класс систем, как гибридные системы с многомерным (2D-мерным) временем [8, 9]:

$$\dot{x}_1(t, k) = A_{11}x_1(t, k) + A_{12}x_2(t, k) + B_1u(t, k), \quad (5)$$

$$t \in [0, +\infty);$$

$$x_2(t, k+1) = A_{21}x_1(t, k) + A_{22}x_2(t, k) + B_2u(t, k), \quad (6)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\dot{x}_1(t, k) = \frac{\partial x_1(t, k)}{\partial t}$; $x_1(t, k) \in R^{n_1}$; $x_2(t, k) \in R^{n_2}$;

$x_1(t, k)$, $x_2(t, k)$ – n_1 - и n_2 -векторы состояния системы; $u(t, k) \in R^r$ – вектор управляющего воздействия, $t \geq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$; A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} , B_1 , B_2 – постоянные матрицы соответствующих размеров с граничными (начальными) условиями

$$x_1(0, k) = x_1(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$x_2(t, 0) = x_2(t), \quad t \in [0, +\infty).$$

Присоединим к системе (5), (6) регулятор, не выводящий ее за пределы заданного класса:

$$u(t, k) = Q_1 x_1(t, k) + Q_2 x_2(t, k), \quad (7)$$

где Q_1 – матрица $r \times n_1$; Q_2 – матрица $r \times n_2$.

Систему (5), (6) назовем стабилизируемой (в смысле сильной асимптотической устойчивости) регулятором (7), если найдутся такие матрицы Q_1 , Q_2 , что замкнутая система (5), (6), (7) является сильно асимптотически устойчивой. Для того чтобы система (5), (6) в скалярном случае была стабилизируема (в смысле сильной асимптотической устойчивости) регулятором (7), достаточно [8], чтобы выполнялось хотя бы одно из условий

$$1) \left| a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1} \right| < 1;$$

$$2) a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} < 0.$$

Чтобы система (5), (6) в скалярном случае была стабилизируема (в смысле (α, γ) -устойчивости) регулятором (7), достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий

$$1) \left| a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1} \right| < \gamma,$$

$$2) a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} \leq -\alpha.$$

Отметим возможность построения стабилизирующих регуляторов в применении к такому важному классу систем управления, как дескрипторные системы с запаздывающим аргументом [6] вида

$$S\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + bu(t), \quad t > 0, \quad (8)$$

$$u(t) \in R, \quad x(t) \in R^n, \quad S, A_i \in R^{n \times n}, \quad i = 0, 1,$$

при воздействии линейной обратной связи

$$u(t) = q'_0 x(t) + q'_1 x(t-h), \quad (9)$$

$$q_0, q_1 \in R^n.$$

Такие системы достаточно достоверно описывают в физически реальных переменных работу систем автоматического управления и технологические процессы.

Систему (8), где $\det S = 0$, но S – ненулевая, назовем $Sx(t)$ -стабилизируемой регулятором вида (9), если существует регулятор (9) такой, что замкнутая система (8), (9) является $Sx(t)$ -асимптотически устойчивой.

Обратную связь (9) запишем в операторной форме

$$u(t) = [\beta_1(e^{-ph}); \beta_2(e^{-ph})]x(t);$$

$$\beta_1(e^{-ph}) = \beta_{10} + \beta_{11}e^{-ph};$$

$$\beta_2(e^{-ph}) = \beta_{20} + \beta_{21}e^{-ph};$$

$$[\beta_{10}, \beta_{20}] = q'_0; [\beta_{11}, \beta_{21}] = q'_1;$$

$$\beta_{ij} \in R, i = 1, 2, j = 0, 1,$$

где e^{-ph} – оператор запаздывания; $e^{-ph}x(t) = x(t-h)$, $p = d/dt$.

Используя канонические формы для систем с запаздывающим аргументом, проведем анализ возможности построения стабилизирующего регулятора в двумерном случае.

Пусть $\det[b, Sb] \neq 0$. Тогда найдется такая матрица D , $\det D \neq 0$, что преобразование $x = Dy$ приведет исходную систему (8) к виду

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) +$$

$$+ \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & \alpha_{12}^1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t). \quad (10)$$

Дальнейшее преобразование системы в случае $\alpha_{11} \neq 0$ приводит ее к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot{z}_2(t) = z_1(t) + \alpha_1 z_1(t-h) + \alpha_2 z_2(t-h), \\ 0 = \beta_{10} z_1(t) + \beta_{11} z_1(t-h) + \beta_{20} z_2(t) + \\ + \beta_{21} z_2(t-h). \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем:

$$z_1(t) = -\frac{1}{\beta_{10}}(\beta_{11} z_1(t-h) + \beta_{20} z_2(t) + \beta_{21} z_2(t-h)),$$

тогда

$$\dot{z}_2(t) = -\frac{1}{\beta_{10}}(\beta_{11} z_1(t-h) + \beta_{20} z_2(t) + \beta_{21} z_2(t-h)) + \alpha_1 z_1(t-h) + \alpha_2 z_2(t-h).$$

Выбирая β_{11}, β_{10} таким образом, чтобы $\beta_{11} = \beta_{10} \alpha_1$, имеем:

$$\dot{z}_2(t) = -\frac{\beta_{20}}{\beta_{10}} z_2(t) + \left(-\frac{\beta_{21}}{\beta_{10}} + \alpha_2 \right) z_2(t-h).$$

Для обеспечения асимптотической устойчивости последнего уравнения определим условия, при которых отрицательны действительные части корней характеристического уравнения

$$\lambda + \frac{\beta_{20}}{\beta_{10}} - \left(\alpha_2 - \frac{\beta_{21}}{\beta_{10}} \right) e^{-\lambda h} = 0. \quad (11)$$

Корни уравнения

$$\lambda + \alpha + \beta e^{-\lambda h} = 0$$

имеют только отрицательные действительные части в том и только в том случае, если точка (α, β) принадлежит области устойчивости Ω , описанной ранее. В случае, когда точка с координатами $(\beta_{20}/\beta_{10}, \beta_{21}/\beta_{10} - \alpha_2)$ принадлежит области устойчивости Ω , корни уравнения (11) будут иметь отрицательные действительные части. При соответствующем выборе коэффициентов регулятора всегда можно обеспечить попадание точки в требуемую область, а следовательно, и система (8) в этом случае является $Sx(t)$ -стабилизируемой.

Пусть $\alpha_{11} = 0$. Тогда система имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) +$$

$$+ \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & \alpha_{12}^1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t);$$

$$\begin{cases} \dot{y}_2(t) = \alpha_{12} y_2(t) + \alpha_{11}^1 y_1(t-h) + \alpha_{12}^1 y_2(t-h), \\ 0 = \beta_{10} y_1(t) + \beta_{11} y_1(t-h) + \beta_{20} y_2(t) + \beta_{21} y_2(t-h). \end{cases}$$

При $\alpha_{11}^1 = 0$ первое уравнение системы устойчиво тогда и только тогда, когда точка $(-\alpha_{12}, -\alpha_{12}^1)$ принадлежит вышеуказанной области устойчивости Ω .

Если $\alpha_{11}^1 \neq 0$, то перейдем при помощи невырожденного преобразования к системе вида

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t),$$

из которой получаем:

$$\begin{cases} \dot{z}_2(t) = \alpha_{12}z_2(t) + z_1(t-h), \\ 0 = \beta_{10}z_1(t) + \beta_{11}z_1(t-h) + \\ + \beta_{20}z_2(t) + \beta_{21}z_2(t-h). \end{cases}$$

Пусть $\beta_{10} = 0$, $\beta_{11} = 1$, тогда

$$0 = z_1(t-h) + \beta_{21}z_2(t-h) + \beta_{20}z_2(t).$$

Имеем:

$$\dot{z}_2(t) = (\alpha_{12} - \beta_{20})z_2(t) - \beta_{21}z_2(t-h). \quad (12)$$

Выбирая β_{20}, β_{21} так, чтобы точка $(-\alpha_{12} + \beta_{20}, \beta_{21})$ попадала в область устойчивости Ω , обеспечим асимптотическую устойчивость уравнения (12). Исходная система является $Sx(t)$ -стабилизируемой.

Таким образом, для $Sx(t)$ -стабилизируемости системы (8) регулятором вида (9) достаточно, чтобы выполнялось условие $\det[b, Sb] \neq 0$ и при этом α_{11} из (10) было отлично от нуля. В случае $\det[b, Sb] \neq 0$, $\alpha_{11} = 0$ систему можно стабилизировать либо если $\alpha_{11}^1 = 0$ и точка $(-\alpha_{12}, -\alpha_{12}^1) \in \Omega$, либо если $\alpha_{11}^1 \neq 0$. В процессе обоснования утверждения получены коэффициенты стабилизирующего регулятора.

Проиллюстрируем построение стабилизирующего регулятора на примере реальной системы. Рассмотрим систему управления числом Маха в аэродинамической трубе [10]. Линеаризованная модель управления числом Маха представляет собой систему трех уравнений с запаздыванием в одной из переменных состояния. В установившемся режиме (постоянной скорости вентилятора, степени впрыска жидкого азота, степени входа газового азота) отклик отклонения числа Маха δM на малое изменение угла поворота привода $\delta\theta_A$ описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \tau \delta \dot{M}(t) + \delta M(t) &= k \delta \theta(t-h); \\ \delta \dot{\theta}(t) + 2\psi \omega \delta \theta(t) &= \omega^2 \delta \theta_A(t), \end{aligned}$$

где $\delta\theta(t)$ – угол поворота привода; τ, k, h, ψ, ω – параметры, предполагаемые постоянными, когда отклонения $\delta M, \delta\theta, \delta\theta_A$ малы. Уравнения могут быть записаны в форме с переменными состояния:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 + kax_2(t-h); \\ \dot{x}_2 &= x_3; \\ \dot{x}_3 &= -\omega^2 x_2 - 2\psi\omega x_3 + \omega^2 u, \end{aligned}$$

где $a = 1/\tau$, $x_1 = \delta M$, $x_2 = \delta\theta$, $x_3 = \delta\dot{\theta}$, $u = \delta\theta_A$.

Введем управление по типу обратной связи:

$$u(t) = q'x(t) = [q_1, q_2, q_3]x(t).$$

Присоединим его к системе и рассмотрим задачу стабилизации исходной системы управления. Система станет асимптотически устойчивой, если действительные части корней ее характеристического уравнения будут отрицательны. Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + a & \lambda - kae^{-\lambda h} & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -q_1 & -q_2 + \omega^2 & \lambda - q_3 + 2\psi\omega \end{bmatrix} =$$

$$= (\lambda + a)\lambda(\lambda - q_3 + 2\psi\omega) + q_1(\lambda - kae^{-\lambda h}) + (-q_2 + \omega^2)(\lambda + a) = 0.$$

Положим $q_1 = 0$. Имеем:

$$(\lambda + a)(\lambda(\lambda - q_3 + 2\psi\omega) + (-q_2 + \omega^2)) = 0.$$

Корень $\lambda = -a$ лежит в левой полуплоскости. Пусть $\lambda^2 + \lambda(2\psi\omega - q_3) + (\omega^2 - q_2) = 0$.

Решая систему

$$\begin{aligned} 2\psi\omega - q_3 &= 2a, \\ \omega^2 - q_2 &= a^2, \end{aligned}$$

получаем:

$$\begin{aligned} q_2 &= \omega^2 - a^2, \\ q_3 &= 2\psi\omega - 2a. \end{aligned}$$

Тогда характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$(\lambda + a)(\lambda + a)^2 = 0,$$

где $a > 0$. Таким образом, при помощи разностного регулятора удалось решить задачу стабилизации.

Заключение. В работе проведен анализ возможностей применения регуляторов, построенных по типу обратной связи, для решения задач качественной теории управления для систем, описывающих процессы, носящие неоднородный характер. В частности, рассмотрены примеры построения регуляторов, стабилизирующих системы с запаздыванием, дискретно-непрерывные системы. Результаты могут быть полезны при синтезе управляющих воздействий в реальных системах управления.

Литература

1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
2. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

3. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов // *АиТ*. 1961. № 4. С. 425–435.
4. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495 с.
5. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable linear systems // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1967. Vol. AC-12. P. 660–665.
6. Борковская И. М. Достаточные условия стабилизируемости дескрипторных систем с запаздыванием в двумерном случае // *Труды БГТУ*. 2010. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 27–30.
7. Марченко В. М., Борковская И. М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем // *Труды БГТУ*. 2012. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 7–10.
8. Борковская И. М., Пыжкова О. Н. О стабилизации некоторых видов гибридных динамических систем // *Труды БГТУ*. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 2. С. 5–10.
9. Борковская И. М., Пыжкова О. Н. Задачи управления и стабилизации для гибридных динамических систем // *Труды БГТУ*. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2018. № 2. С. 5–9.
10. Manitius A. Z. Feedback controllers for a wind tunnel model involving a delay: analytical design and numerical simulation // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1984. Vol. AC-29. P. 1058–1068.

References

1. Kalman R., Falb P., Arbib M. *Ocherki po matematicheskoy teorii system* [Essays on the mathematical theory of systems]. Moscow, Mir Publ., 1971. 400 p.
2. Bellman R., Kuk K. L. *Differentsial'no-raznostnyye uravneniya* [Differential-difference equations]. Moscow, Mir Publ., 1967. 548 p.
3. Letov A. M. Analytical Design of Regulators. *AiT* [Automation and Remote Control], 1961, no. 4, pp. 425–435 (In Russian).
4. Zubov V. I. *Leksii po teorii upravleniya* [Lectures on control theory]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 495 p.
5. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable linear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1967, vol. AC-12, pp. 660–665.
6. Borkovskaya I. M. Sufficient conditions for the stabilization of descriptor systems with a delay in the two-dimensional case. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2010, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 27–30 (In Russian).
7. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M. Stability and stabilization of the linear hybrid discrete-continues stationary systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2012, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 7–10 (In Russian).
8. Borkovskaya I. M., Pyzhkova O. N. On the stabilization of some kinds of hybrid dynamic systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 2, pp. 5–10 (In Russian).
9. Borkovskaya I. M., Pyzhkova O. N. The problems of control and stabilization for hybrid dynamic systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 2, pp. 5–9 (In Russian).
10. Manitius A. Z. Feedback controllers for a wind tunnel model involving a delay: analytical design and numerical simulation. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1984, vol. AC-29, pp. 1058–1068.

Информация об авторах

Борковская Инна Мечиславовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: borkovskaia@gmail.com

Пыжкова Ольга Николаевна – кандидат физико-математических наук, заведующая кафедрой высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: olga.pyzhkova@gmail.com

Information about the authors

Borkovskaya Inna Mechislavovna – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: borkovskaia@gmail.com

Pyzhkova Olga Nikolaevna – PhD (Physics and Mathematics), Head of the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: olga.pyzhkova@gmail.com

Поступила 10.05.2019