Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. М. Марченко, Н. П. Можей, Е. А. Шинкевич

ЭКОНОМЕТРИКА И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов учреждений высшего образования по экономическим специальностям

В 2-х частях

Часть 2. Экономико-математические методы и модели

Минск 2012

УДК 519.2:330.46(075.8)
ББК 22.172
М30

Рецензенты:
доктор экономических наук, профессор, проректор
по научной работе и инновациям Гродненского государственного
университета им. Янки Купалы *Г. А. Хацкевич*;
кафедра высшей математики белорусского государственного
экономического университета (доктор физико-математических
наук, профессор, заведующий кафедрой *М. П. Дымков*)

Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или ее части не может быть осуществлено без разрешения учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет».

Марченко, В. М.

М30 Эконометрика и экономико-математические методы и модели. В 2 ч. Ч. 2. Экономико-математические методы и модели : учеб. пособие для студентов учреждений высшего образования по экономическим специальностям / В. М. Марченко, Н. П. Можей, Е. А. Шинкевич. – Минск : БГТУ, 2012. – 214 с.
ISBN 978-985-530-124-1.

Предлагаемое учебное пособие – вторая часть (первая часть издана в 2011 году) учебно-методического комплекса по курсу «Эконометрика и экономико-математические методы и модели (ЭиЭММ)», написанного в соответствии с уровневой методологией преподавания математических дисциплин.

Содержит программу курса ЭиЭММ, конспект лекций, практикум, лабораторный практикум, теоретический и практический минимум с примерами решения типовых задач, задания для самоконтроля, образцы контрольных работ и тестов по экономико-математическим методам и моделям.

Предназначено для студентов экономических специальностей. Будет полезно всем, кто интересуется ЭиЭММ.

УДК 519.2:330.46(075.8)
ББК 22.172

ISBN 978-985-530-124-1 (Ч. 2)
ISBN 978-985-530-122-7

© УО «Белорусский государственный технологический университет», 2012
© Марченко В. М., Можей Н. П., Шинкевич Е. А., 2012

ВВЕДЕНИЕ

Изучение курса «Эконометрика и экономико-математические методы и модели» основывается на понятии модели.

Модель – это образ (в том числе условный, мысленный, изображение, описание, схема, чертеж, график) или образец какого-либо объекта (оригинала), приближенно воссоздающий этот объект, т. е. модель – образ, используемый в качестве заменителя или представителя оригинала. Модель отражает, воспроизводит или замещает оригинал в его основных чертах таким образом, что ее изучение дает новую информацию об объекте или совокупности объектов. Главное свойство модели состоит в том, что она всегда аналогична (подобна) исследуемому объекту.

Моделирование – это исследование реальных явлений по их моделям. Процесс моделирования состоит из следующих этапов:

1) конструирование модели на основе предварительного изучения объекта;
2) выделение его существенных характеристик;
3) экспериментальный и теоретический анализ модели;
4) сопоставление результатов с данными об объекте;
5) корректировка модели и т. д.

Математическая модель объекта является формализованным описанием на языке математики (в виде функций, уравнений, неравенств, цифр и т. д.) процессов, протекающих в исследуемом объекте. Таким образом, под математическим моделированием понимается исследование реальных явлений по их математическим моделям.

Экономико-математическая модель – это математическая модель исследуемой социально-экономической системы или объекта (процесса). Экономико-математическое моделирование – это исследование математическими средствами экономико-математических моделей. Задачи экономико-математического моделирования: анализ экономических объектов и процессов; экономическое прогнозирование, предвидение развития экономических процессов; выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии.

Отметим, однако, что не всегда данные, полученные в результате экономико-математического моделирования, могут использоваться непосредственно, как готовые управленческие решения. Скорее, они носят «консультативный» характер. Окончательное решение должен принимать человек.

1. УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА

1.1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН КУРСА

Курс «Эконометрика и экономико-математические методы и модели» базируется на программах курсов высшей математики, статистики, экономической теории. Весь материал классифицирован по трем уровням глубины – базовый (без звездочек), дополнительный * (одна звездочка) и углубленный ** (две звездочки). Материал, отмеченный **, является необязательным.

На изучение курса эконометрики и экономико-математических методов и моделей учебным планом специальностей 1-25 01 07 «Экономика и управление на предприятии», 1-25 01 08 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», 1-26 02 03 «Маркетинг» предусмотрено 26 часов лекций, 17 часов практических и 8 часов лабораторных занятий.

В табл. 1 приводится примерный тематический план курса «Эконометрика и экономико-математические методы и модели» с распределением изучаемого материала по лекциям, практическим и лабораторным занятиям.

Таблица 1

Примерный тематический план курса ЭиЭММ

Тема	Количество аудиторных часов		
	Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы
1	2	3	4
Введение	**1**	–	–
Раздел 1. Эконометрика	**11**	**7**	**4**
1.1. Основные понятия эконометрики	1	–	–
1.2. Элементы корреляционно-регрессионного анализа	4	3	2
1.3. Эконометрический анализ при нарушении классических предположений. Временные ряды	4	2	2
1.4. Системы одновременных уравнений	2	2	–
Раздел 2. Экономико-математические методы и модели	**14**	**10**	**4**
2.1. Модели оптимального планирования	2	–	2

Окончание табл. 1

1	2	3	4
2.2. Модели межотраслевого баланса	3	2	2 (БУ)
2.3. Методы и модели массового обслуживания	2	2	–
2.4. Элементы теории игр	3	2	2 (МК)
2.5. Модели управления запасами	2	2	–
2.6. Сетевое планирование и управление. Инвестиционные модели	2	2	2 (ЭУП)
Итого	26	17	8

Примечание. Лабораторные работы, выполняемые студентами разных специальностей, могут отличаться.

Примерная тематика практических занятий

1. Элементы корреляционно-регрессионного анализа.
2. Эконометрический анализ при нарушении классических предположений. Временные ряды.
3. Системы одновременных уравнений.
4. Модели межотраслевого баланса.
5. Методы и модели систем массового обслуживания.
6. Элементы теории игр.
7. Модели управления запасами.
8. Сетевое планирование и управление.

Примерная тематика лабораторных занятий

1. Построение и анализ уравнения парной линейной регрессии.
2. Построение и анализ уравнения множественной регрессии.
3. Выбор вида зависимости, построение уравнения регрессии, его анализ.
4. Модели оптимального планирования.
5. Модели межотраслевого баланса. Построение и анализ межотраслевого баланса.
6. Системы массового обслуживания. Расчет основных параметров.
7. Теория игр. Нахождение оптимальных стратегий.
8. Сетевое планирование и управление. Расчет временных параметров сетевого графика. Построение графика Ганта.

1.2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Введение

Основные понятия, предмет и область применения эконометрики и экономико-математического моделирования. *Теоретические основы экономико-математического моделирования.**

Раздел 1. Эконометрика

Основные понятия эконометрики

Предмет и методы эконометрики. Понятие эконометрической модели, классификация моделей. Основные этапы построения эконометрической модели.

Элементы корреляционно-регрессионного анализа

Виды функциональной и корреляционной зависимости. *Задачи построения качественного уравнения регрессии.** Линейная регрессия. Метод наименьших квадратов. *Основные положения регрессионного анализа.** Оценки параметров регрессионной модели и их свойства. *Интервальная оценка функции регрессии.** Коэффициент детерминации. Модель множественной регрессии. *Спецификация эконометрической модели.* Методы выбора экзогенных переменных.** Методы выбора вида зависимости, нелинейная регрессия. *Модели с качественными переменными.***

Эконометрический анализ при нарушении классических предположений. Временные ряды

Эконометрический анализ при нарушении классических предположений. Мультиколлинеарность, ее обнаружение и устранение. Гетероскедастичность и автокорреляция остатков модели: обнаружение, устранение и анализ последствий. *Модели и методы анализа стационарных* и нестационарных** временных рядов. Автокорреляционная функция.**

Системы одновременных уравнений

Системы одновременных уравнений. *Построение и анализ многомерных эконометрических моделей.**

Раздел 2. Экономико-математические методы и модели

Модели оптимального планирования

Экономико-математические методы и модели оптимального планирования в промышленности. Экономико-математические методы и модели оптимального планирования в АПК. Экономико-математические методы и модели финансов и кредита. Экономико-математические методы и модели в коммерческой деятельности. Экономико-математические методы и модели в управлении социально-культурной сферой.

Модели межотраслевого баланса

Модели межотраслевого баланса (МОБ), основные понятия, методы построения МОБ *и их использование в анализе.**

Методы и модели массового обслуживания

Методы и модели массового обслуживания, основные понятия и классификация систем массового обслуживания (СМО), графическое представление СМО, расчет основных характеристик. Уравнения Колмогорова. Финальные вероятности состояний СМО. СМО с отказами. *СМО с неограниченной очередью.**

Элементы теории игр

Моделирование конфликтных ситуаций с помощью теории игр, основные понятия и классификация. Матричные игры с нулевой суммой. Решение матричных игр в чистых стратегиях. Игры с «природой». Критерии Байеса, Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица. *Решение матричных игр в смешанных стратегиях.**

Модели управления запасами

Задачи и модели управления запасами и сбытом готовой продукции. Модель Уилсона. *Модель производственных поставок.**

Сетевое планирование и управление. Инвестиционные модели

Математические методы сетевого планирования и управления (СПУ). Основные понятия СПУ. *Правила построения сетевых графиков.** Расчет основных параметров сетевого графика. Построение календарного графика. *Инвестиционные модели.***

2. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Лекция 7

2.1. МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

2.1.1. Задачи и этапы экономико-математического моделирования

2А1 (*Экономико-математическая модель*). Под *экономико-математической моделью* исследуемого экономического объекта (или процесса) будем понимать его математическое описание. *Экономико-математическое моделирование* – это исследование экономических объектов посредством их математических моделей.

Экономические процессы, как правило, *управляемы*, т. е. могут осуществляться различными способами, в зависимости от принятой стратегии их реализации. В связи с этим возникает задача нахождения наилучшей (в некотором смысле) из всех возможных стратегий управления этим процессом. Такую стратегию называют *оптимальным* (в заданном смысле) *управлением*, а саму задачу – *оптимизационной*.

2А+Б2 (*Экономико-математическая оптимизационная модель*). Каждая экономико-математическая оптимизационная задача (модель) обязательно включает следующие принципиальные моменты:

2.1) математическое описание исследуемого экономического объекта и/или соответствующих экономических процессов, т. е. входных (*экзогенных*) и выходных (*эндогенных*) переменных, переменных текущего *состояния* объекта и переменных, которыми можно управлять, – *управлений*, а также существующих между переменными зависимостей;

2.2) *ограничения на управления* – описание множества возможных управляющих воздействий – *класс допустимых управлений*;

2.3) *ограничения на переменные* (планы, реализации, фазовые траектории), вытекающие из экономического смысла задачи;

2.4) цель управления – *критерий качества* – выбранный количественный показатель эффективности управления, обычно представляющий собой функцию (*целевую*) экзогенных переменных.

2А3 (*Задачи экономико-математического моделирования*). В экономико-математическом моделировании рассматриваются следующие основные задачи:

3.1) анализ экономических объектов и процессов;

3.2) экономическое прогнозирование развития экономических процессов;

3.3) выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии.

2А+Б4 (*Этапы экономико-математического моделирования*). Обычно экономико-математическое моделирование реализуется в несколько этапов:

4.1) анализ законов, описывающих связи основных объектов (переменных) модели;

4.2) теоретическое исследование построенной математической модели – решение *прямой задачи* и, как следствие, исследование свойств эндогенных переменных и их сопоставление с реальными наблюдениями изучаемых явлений;

4.3) проверка *адекватности* модели, т. е. выяснение того, удовлетворяет (*согласуется*) ли гипотетическая математическая модель моделируемому экономическому процессу;

4.4) последующий анализ и уточнение (модернизация) математической модели с учетом накопленных данных об изучаемом экономическом процессе.

На промышленных предприятиях накоплен немалый опыт решения экономико-математических задач, результаты которых успешно используются на отдельных предприятиях. К ним можно отнести модели формирования производственной программы предприятия, оптимального использования производственных мощностей, оптимизации состава промышленных смесей и раскроя материалов и др.

2.1.2. Модели оптимального планирования в промышленности и АПК

2А+Б5 (*Виды критериев оптимальности предприятия*). В современных экономических условиях критериями эффективности использования трудовых, материальных и финансовых ресурсов, а также критериями оценки хозяйственной деятельности предприятия могут служить:

5.1) *чистый доход*, понимаемый как разность между стоимостью продаваемой продукции и затратами на ее производство;

5.2) *показатель прибыли*;

5.3) *рентабельность*, определяемая как отношение прибыли к среднегодовой стоимости производственных фондов; ее величина показывает не только величину чистого дохода, полученного предприятием, но и степень использования предоставленных в его распоряжение производственных фондов;

5.4) *показатель реализованной продукции*;

5.5) *производительность труда*, определяемая как выпуск товарной продукции, приходящийся на одного работника;

5.6) *показатель загрузки оборудования*, его имеет смысл применять лишь тогда, когда на предприятии установлено дорогостоящее оборудование и простои его нежелательны.

Система ограничений экономико-математической модели задачи определения производственного плана предприятия должна учитывать производственные ресурсы и специфические условия работы предприятия, народнохозяйственные потребности в его продукции.

2А+Б6 (*Виды оптимизационных моделей*). В зависимости от вида целевой функции и ограничений соответствующая оптимизационная задача называется:

6.1) *линейной*, если ограничения и целевая функция линейны относительно переменных, и *нелинейной* в противном случае;

6.2) *задачей целочисленного программирования*, если параметры управления могут принимать лишь целые значения;

6.3) *задачей параметрического программирования*, если исходные параметры задачи могут изменяться в заданных пределах;

6.4) *задачей динамического программирования*, если процесс выработки решения развертывается во времени или имеет многошаговый характер. Методами динамического программирования могут решаться задачи планирования, управления производством, поставками и запасами в условиях изменяющегося спроса, распределения ограниченных ресурсов, в частности, размещения капитальных вложений, замены оборудования, обновления и восстановления элементов сложных систем и т. д.

После построения модели осуществляется поиск оптимального решения. В зависимости от вида оптимизационной модели используются различные методы математического программирования.

2А7 (*Задача оптимизации производственной программы предприятия*). Предприятие выпускает несколько видов продукции $П_j$, $j=\overline{1,\ n}$, имея ограниченный запас ресурсов $Р_i$, $i=\overline{1,\ m}$. Известны нормы затрат ресурса $Р_i$ на производство единицы продукции $\Pi_j - a_{ij}$. Требуется найти такой план производства продукции, который обеспечивает максимум эффекта от выпуска (максимум выручки от реализации, минимум затрат), если c_j – эффективность единицы продукции (например, цена).

2А8 (*Математическая модель задачи оптимизации производственной программы предприятия*). Сформулируем математическую модель задачи. Определим переменные модели: x_j – объем производства продукции *j*-го вида, $j = \overline{1, n}$.

В этих обозначениях задача оптимизации производственной программы запишется в следующем виде (максимизируется выручка от реализации):

$$z(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \max$$

при ограничениях на запас *i*-го ресурса:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = \overline{1, m}$$

и условии неотрицательности переменных:

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, n}.$$

Сформулированная модель является задачей линейного программирования, которая может быть решена симплекс-методом (см. с. 43 учебника [2]). Если необходимо найти целочисленное решение, используется метод Гомори (см. с. 210 учебника [2]) либо метод ветвей и границ (см. с. 218 учебника [2]). Компьютерные технологии позволяют осуществлять решение задачи с использованием пакетов прикладных программ (см. с. 112 издания [4]).

2.1.3. Модели финансов и кредита. Модели в коммерческой деятельности

2Б9 (*Задача оптимизации структуры портфеля ценных бумаг*). Для того чтобы сформулировать задачу оптимизации структуры портфеля ценных бумаг, введем некоторые понятия.

Ценная бумага имеет две характеристики: ожидаемую доходность и риск, которые оцениваются как:

• *математическое ожидание доходности*

$$\overline{R} = M(R_i);$$

• *вариация доходности*

$$V_i = M\{(R_i - \overline{R})^2\},$$

где R_i – случайная величина, выражающая доходность ценной бумаги i-го вида.

Риск может оцениваться через σ_i – среднеквадратическое отклонение доходности ценной бумаги от ожидаемого значения:

$$\sigma_i = \sqrt{V_i}.$$

Зависимость доходностей двух ценных бумаг выражается их ковариацией. Обозначим через R_i и R_j доходности ценных бумаг i-го и j-го видов соответственно, а через V_{ij} – их ковариацию:

$$V_{ij} = M\left\{(R_i - \overline{R}_i)(R_j - \overline{R}_j)\right\}.$$

Если $V_{ij} > 0$, то зависимость между доходностями ценных бумаг i-го и j-го видов будет прямая, если $V_{ij} < 0$, то зависимость обратная, при $V_{ij} = 0$ доходности ценных бумаг являются некоррелированными (практически независимыми) случайными величинами.

Обычно для анализа ценных бумаг используют не характеристики, а их статистические оценки, основанные на данных предыдущих периодов.

Обозначим через R_{it} доходность ценной бумаги i-го вида в периоде $t = \overline{1, T}$ (T – число периодов наблюдения). Тогда статистическая оценка ожидаемой доходности i-й ценной бумаги будет рассчитываться по формуле (см. с. 368 учебного пособия [16]):

$$\overline{R}_i = \frac{\sum_{t=1}^{T} R_{it}}{T},$$

статистическая оценка вариации ее доходности – по формуле:

$$V_i = \frac{\sum_{t=1}^{T} (R_{it} - \overline{R}_i)^2}{T},$$

а статистическая оценка ковариации доходностей i-й и j-й ценных бумаг – по формуле:

$$V_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - \overline{R}_i)(R_{jt} - \overline{R}_j)}{T}.$$

Портфелем ценных бумаг инвестора называют совокупность ценных бумаг, принадлежащих инвестору. Портфель p ценных бумаг имеет такие же характеристики, как и ценные бумаги: ожидаемую доходность $(\overline{R}_p)$ и риск, выраженный вариацией доходности (V_p) или среднеквадратическим отклонением (σ_p). *Эффективным портфелем* называют портфель, имеющий минимальный уровень риска при заданном инвестором уровне ожидаемой доходности (либо максимальный уровень ожидаемой доходности при заданном уровне риска). Для случая n = 3 характеристики ценных бумаг рассчитываются по следующим формулам (см. с. 371 учебного пособия [16]):

$$\overline{R}_p = \overline{R}_1 x_1 + \overline{R}_2 x_2 + \overline{R}_3 x_3;$$

$$V_p = V_1 x_1^2 + V_2 x_2^2 + V_3 x_3^2 + 2V_{12} x_1 x_2 + 2V_{13} x_1 x_3 + 2V_{23} x_2 x_3;$$

$$\sigma_p = \sqrt{V_p},$$

где x_j, $j = \overline{1,\ 3}$, – доля капитала, вложенная инвестором в ценную бумагу j-го вида.

Задача оптимизации структуры портфеля ценных бумаг состоит в следующем. Инвестор имеет совокупность ценных бумаг $j = \overline{1,\ n}$ с ожидаемыми доходностями $\overline{R}_j$ и оцениваемым риском в виде вариации доходности V_j. Зависимости доходностей по различным видам ценных бумаг определяются в виде ковариации доходностей V_{ij}. Требуется определить такую структуру портфеля ценных бумаг (структуру эффективного портфеля), с помощью которой обеспечивается минимальный риск портфеля при заданном уровне ожидаемой доходности $\overline{R}_p^*$ или максимальная ожидаемая доходность при заданном уровне риска. Модель минимального риска при заданном уровне ожидаемой доходности имеет вид:

$$V_p = V_1 x_1^2 + V_2 x_2^2 + V_3 x_3^2 + 2V_{12} x_1 x_2 + 2V_{13} x_1 x_3 + 2V_{23} x_2 x_3 \to \min;$$

$$\overline{R}_1 x_1 + \overline{R}_2 x_2 + \overline{R}_3 x_3 = \overline{R}_p^*;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Данную модель называют *моделью Марковица* (см. с. 372 учебного пособия [16]).

Модель максимальной ожидаемой доходности при заданном уровне риска:

$$\overline{R}_p = \overline{R}_1 x_1 + \overline{R}_2 x_2 + \overline{R}_3 x_3 = \overline{R}_p^* \to \max;$$

$$V_1 x_1^2 + V_2 x_2^2 + V_3 x_3^2 + 2V_{12} x_1 x_2 + 2V_{13} x_1 x_3 + 2V_{23} x_2 x_3 = V_p^*;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

По математической структуре сформулированные модели относятся к задачам нелинейного программирования. Для решения этих моделей используются градиентные методы, методы множителей Лагранжа. Реализация этих методов возможна на компьютере в среде MS Excel с помощью функции *Поиск решения*.

Лекция 8

2.2. МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

2.2.1. Основные понятия

2А10 (*Балансовая модель, балансовый метод*). Под *балансовой моделью* понимается система уравнений, каждое из которых выражает требование баланса между производимым отдельными экономическими объектами количеством продукции и совокупной потребностью в этой продукции. При таком подходе рассматриваемая система состоит из экономических объектов, каждый из которых выпускает некоторый продукт, часть которого потребляется другими объектами системы, а часть выводится за пределы системы в качестве конечного продукта. Балансовые модели, как статические, так и динамические, широко применяются при экономико-математическом моделировании экономических систем и процессов. В основе их создания лежит *балансовый метод*, т. е. метод взаимного сопоставления имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них.

Примерами балансовых соответствий могут быть: соответствие наличия рабочей силы и количества рабочих мест; платежеспособного спроса населения и предложения товаров и услуг и т. д. При этом соответствие понимается либо как равенство, либо (менее жестко) как достаточность ресурсов для покрытия потребности (следовательно, допускается наличие некоторого резерва).

Балансовый метод и создаваемые на его основе балансовые модели служат основным инструментом поддержания пропорций в народном хозяйстве. Однако необходимо отметить, что балансовые модели не содержат какого-либо механизма сравнения отдельных вариантов экономических решений и не предусматривают взаимозаменяемости ресурсов, что не позволяет сделать выбор оптимального варианта развития экономической системы.

Балансовые модели строятся в виде числовых матриц, поэтому они относятся к матричным экономико-математическим моделям.

2А+Б11 (*Виды балансовых моделей*). Некоторые виды балансовых моделей:

11.1) межотраслевые балансы;

11.2) частные материальные, трудовые и финансовые балансы для народного хозяйства и отдельных отраслей;

11.3) матричные финансовые планы предприятий и фирм.

Общий принцип построения и единство системы расчетов, а также аналогичность ряда экономических характеристик позволяют рассматривать структуру и основные зависимости матричных моделей на примере одной из них.

Межотраслевой баланс (МОБ) является каркасной моделью экономики – таблицей, отражающей многообразные натуральные и стоимостные связи в экономике. Анализ МОБ дает комплексную характеристику процесса формирования и использования совокупного общественного продукта страны в отраслевом разрезе.

2А12 (*Совокупный общественный продукт*). *Совокупный общественный продукт* – масса произведенных или планируемых к производству материально-вещественных благ и услуг. В стоимостном выражении совокупный общественный продукт делится на перенесенную стоимость (износ средств труда и расход предметов труда) и вновь созданную стоимость, т. е. национальный доход.

2А13 (*Натуральный МОБ*). В *натуральном МОБ* отражается движение совокупного общественного продукта по его материально-вещественному составу. В этом заключается главная особенность и важность данного вида баланса, поскольку отображение в МОБ движения продукции в натуральных показателях позволяет определить затраты конкретных видов ресурсов на производство продукции и на этой основе найти общественные потребности в ассортименте и объемах продукции, определить целесообразные темпы и пропорции развития отдельных отраслей.

2А14 (*Чистые (технологические) отрасли*). *Чистые* (*технологические*) *отрасли* – это некоторые условные отрасли, которые объединяют все производство данного вида продукта независимо от ведомственной подчиненности субъектов хозяйствования, его производящих. Чистые отрасли – это своего рода абстракция, т. к. в реальной жизни чистых отраслей не существует, и многие продукты одновременно производятся разными субъектами хозяйствования, подчиненными различным ведомствам.

Переход от хозяйственных отраслей к чистым отраслям требует специального преобразования реальных данных хозяйственных объектов, например агрегирования отраслей, исключения внутриотраслевого оборота и т. д.

2А+Б15 (*Основные предположения*). МОБ строится на основе следующих предположений:

15.1) каждая отрасль производит только один продукт, т. е. выделение отраслей осуществляется не по принципу однородности предприятий, а по принципу однородности продукта. По этой причине межотраслевые балансы иногда еще называют *межпродуктовыми балансами*;

15.2) каждая отрасль имеет только одну технологию производства продукции, которая характеризуется средневзвешенными коэффициентами затрат. Эти коэффициенты затрат отражают взаимосвязь между отраслями и являются отраслевыми нормативами затрат.

2А16 (*Разделы МОБ*). В общем виде МОБ состоит из четырех разделов, которые называются квадрантами (кв.):

I	II
III	IV

Основным является I кв., т. к. его данные используются во всех расчетах и являются их основой. Во II кв. характеризуется непроизводственная сфера. В I и III кв. показываются текущие затраты материального производства; во II и IV кв. – использование продукции за пределами текущего производственного цикла: процессы накопления, непроизводственного потребления и вывода продукции за пределы региона, что в целом называется *конечным потреблением*.

При записи соотношений могут использоваться как натуральные (тонны, штуки, киловатт-часы и т. п.), так и стоимостные единицы измерения указанных величин, поэтому различают натуральный и стоимостной балансы.

2.2.2. Стоимостной межотраслевой баланс

2А17 (*Состав стоимостного межотраслевого баланса*). *Стоимостной межотраслевой баланс* (*СМОБ*), или *МОБ производства и распределения в денежном выражении*, состоит из четырех квадрантов, по каждому из которых показатели баланса рассчитываются в стоимостном выражении. Основное назначение СМОБ состоит в сопоставлении затрат с доходами (по стране в целом или по тому или иному региону).

2А18 (*Виды СМОБ*). Различают два вида стоимостных межотраслевых балансов:

18.1) *отчетный баланс*. На основе отчетного СМОБ проверяется, в какой мере затраты компенсированы доходами;

18.2) *плановый баланс*. Плановый СМОБ позволяет сопоставить планируемые затраты с возможными доходами.

2А19 (*Основные понятия*). Основные понятия, которые используются при рассмотрении СМОБ:

19.1) *валовая продукция* – объем произведенной продукции в денежном выражении. Для отрасли это ценностный объем произведенной или планируемой к выпуску продукции. Для страны или региона это валовой внутренний продукт, который равен сумме валовых продуктов отраслей;

19.2) *промежуточный продукт отрасли* – это производственные затраты продукта этой отрасли в других отраслях экономики в качестве предметов труда в стоимостном выражении, т. е. стоимость текущих материальных затрат;

19.3) *конечный продукт отрасли* – это стоимость продукции отрасли, направляемой на накопление и потребление, т. е. совокупность фондов накопления и потребления по отрасли;

19.4) *чистая продукция отрасли* – это стоимость созданной в процессе производства или планируемой к производству продукции данной отрасли. Чистая продукция отрасли состоит из оплаты труда и чистого дохода (прибыли) отрасли.

2А+Б20 (*Единая система цен*). Для построения СМОБ используется *единая система цен*. Это делает возможным построение уравнений этого баланса и по строкам, и по столбцам. При разработке СМОБ могут быть использованы следующие цены:

20.1) *фактические цены производителя*, которые показывают, сколько стоит продукт в месте его производства. При этом не учитываются транспортно-заготовительные расходы. В ценах производителей рекомендуется строить плановые стоимостные балансы;

20.2) *фактические цены конечного потребления*, которые включают затраты, связанные с реализацией продукции, и отражают стоимость продукта в месте его потребления. Они выше цен производителя на торгово-транспортные расходы; эти цены зависят от того, где потребляется продукт, т. к. цена на продукт меняется от места его реализации. В ценах конечного потребления строятся отчетные СМОБ;

20.3) *расчетные цены*, соответствующие действительным издержкам производства продукции каждой отрасли. СМОБ в этих ценах имеют большое значение для построения рациональной системы цен и анализа эффективности общественного производства.

При использовании СМОБ удобно агрегировать различные виды продукции, при этом отрасли необязательно рассматривать как однопродуктовые, можно говорить о стоимостном вкладе продукции одной отрасли в выпуск единицы стоимости продукции другой отрасли, например, выделить удельный вес стоимости энергоресурсов в стоимости продукции как промышленности, так и сельского хозяйства. Однако для правильного планирования такие расчеты должны дополняться балансами по отдельным видам продукции (например, равные по стоимости количества бензина и дизельного топлива не могут заменить друг друга).

2А+Б21 (*Схема СМОБ*). СМОБ состоит из четырех квадрантов, каждый из которых характеризует отдельные стороны или процессы расширенного производства. Важнейшей частью СМОБ является I кв., поскольку он характеризует межотраслевые связи в сфере материального производства.

Первый квадрант – это таблица размерности $n \times n$, наименования строк и столбцов которой соответствуют чистым технологическим отраслям материального производства. В строках и столбцах в одинаковом порядке перечислены одни и те же отрасли материального производства (табл. 2).

Таблица 2

Схема СМОБ

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Промежуточное потребление	Конечное использование				Валовой продукт
	1	2	…	n		Конечное потребление	Валовое накопление	Сальдо экспорта-импорта	Итого	
I кв.						II кв.				
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$	y_{11}	y_{12}	…	Y_1	$X_1 = \sum_{j=1}^{n} x_{1j} + Y_1$
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{2j}$	y_{21}	y_{22}	…	Y_2	$X_2 = \sum_{j=1}^{n} x_{2j} + Y_2$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$	y_{n1}	y_{n2}	…	Y_n	$X_n = \sum_{j=1}^{n} x_{nj} + Y_n$
Промежуточные затраты	$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} x_{i2}$	…	$\sum_{i=1}^{n} x_{in}$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	–	–	–	–	–
III кв.						IV кв.				
Амортизация	c_1	c_2	…	c_n	–	–	–	…	–	–
Оплата труда	v_1	v_2		v_n	–	–	–	…	–	–
Чистый доход	m_1	m_2	…	m_n	–	–	–	…	–	–
Условно чистая продукция	Z_1	Z_2	…	Z_n	–	–	–	…	$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i$	–
Валовой продукт	X_1	X_2	…	X_n	–	–	–	…	–	$\sum_{i=1}^{n} X_i$

Введем следующие обозначения:

• X_i – *валовой выпуск* продукции i-й отрасли за рассматриваемый промежуток времени;

• x_{ij} – *межотраслевые потоки* продукции от i-й отрасли к j-й отрасли, т. е. объем продукции отрасли i, расходуемый отраслью j (производственное потребление);

• x_{ii} – главная диагональ СМОБ; ее элементы стоят на пересечении строк и столбцов одноименных отраслей и характеризуют внутреннее потребление каждой отраслью своей же продукции;

• Y_i – объем продукции отрасли i, потребляемый в непроизводственной сфере, – *конечное потребление*. В него входят личное потребление, обеспечение общественных потребностей (образование, здравоохранение, развитие инфраструктуры и т. д.), поставки на экспорт.

Одноименные строки и столбцы характеризуют отрасль с различных сторон. Строки I кв. СМОБ отражают использование продукции данной отрасли другими отраслями, включая расходы и на собственные нужды отрасли, т. е. строки I кв. отражают межотраслевые поставки сырья, материалов, топлива, энергии и т. д. отраслям материального производства в денежном выражении. Столбцы I кв. СМОБ характеризуют состав материальных затрат в денежном выражении на производство продукции отдельных отраслей.

Имеем: $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \neq \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, но общая величина стоимости продукции всех отраслей, потребленной в сфере материального производства, совпадает со стоимостью материальных затрат на всю продукцию:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}.$$

Во II кв. СМОБ характеризуется конечное потребление каждого вида продукции, т. е. показывается, какое количество продукции отраслей материального производства поступает на цели личного и общественного потребления, на накопление основных и оборотных средств, на возмещение выбывших основных средств, а также на покрытие сальдо между ввозом и вывозом продукции. Этот квадрант можно рассматривать как распределение национального дохода на фонд накопления и фонд потребления по отраслям.

В III кв. СМОБ характеризуются затраты живого труда и основных производственных фондов, участвующих в производстве каждого вида продукции отраслей.

Чистая продукция – это сумма оплаты труда v_j, $j=\overline{1,\ n}$, и чистого дохода отраслей m_j, $j=\overline{1,\ n}$. Сумму амортизации c_j, $j=\overline{1,\ n}$, и чистой продукции некоторой j-й отрасли называют *условно чистой продукцией* и обозначают $Z_j=c_j+v_j+m_j,\ j=\overline{1,\ n}$.

Общая стоимость валовой продукции j-й отрасли равна: $X_j=\sum\limits_{i=1}^{n}x_{ij}+Z_j,\ j=\overline{1,\ n}$.

Четвертый квадрант баланса находится на пересечении столбцов II кв. (конечной продукции) и строк III кв. (условно чистой продукции). Этим определяется его содержание: отражение конечного распределения и использования национального дохода. По строкам: заработная плата работников непроизводственной сферы; прибыль предприятий непроизводственной сферы; амортизация основных средств организаций непроизводственной сферы.

Данные IV кв. важны для отражения в модели межотраслевого баланса доходов и расходов населения, источников финансирования и капиталовложений, текущих затрат непроизводственной сферы; для анализа общей структуры конечных доходов по группам потребителей.

Отметим также, что валовой продукт отраслей представлен на схеме СМОБ в двух местах: в столбце и в строке. Эти строка и столбец играют важную роль для проверки правильности заполнения квадрантов (т. е. проверки баланса) и для разработки экономико-математической модели межотраслевого баланса.

2А+Б22 (*Основные соотношения МОБ*). Основные соотношения МОБ отражают сущность МОБ и являются основой его экономико-математической модели.

Рассматривая схему баланса по столбцам, получаем, что сумма материальных затрат любой потребляющей отрасли и ее условно чистой продукции равна валовому продукту этой отрасли:

$$X_j=\sum_{i=1}^{n}x_{ij}+Z_j,\ j=\overline{1,\ n}.$$

Данное соотношение состоит из уравнений, отражающих стоимостной состав продукции всех отраслей материальной сферы.

Рассматривая схему МОБ по строкам, для каждой производящей отрасли получаем, что валовой продукт отрасли равен сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i,\ i = \overline{1,\ n}.$$

Данное соотношение состоит из уравнений, которые называются *уравнениями распределения продукции отраслей материального производства по направлениям использования*. Просуммировав по всем отраслям первое и второе соотношения, получим:

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} Z_j; \quad \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Левые части выражений равны, т. к. представляют собой весь валовой общественный продукт. Правые части также равны. Следовательно, справедливо соотношение:

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Равенство $\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ показывает, что в МОБ соблюдается важнейший принцип единства материального и стоимостного составов национального дохода. Таким образом, все четыре раздела СМОБ производства и распределения продукции взаимосвязаны и дают развернутую характеристику расширенного воспроизводства экономики в целом.

Лекция 9

2.2.3. Экономико-математическая модель МОБ

2А23 (*Коэффициент прямых затрат*). *Коэффициент прямых затрат* (*коэффициент материалоемкости*)

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j},\ i = \overline{1,\ n};\ j = \overline{1,\ n}$$

показывает, какое количество продукции i-й отрасли необходимо (с учетом только прямых затрат) для производства единицы *вало-*

вого продукта j-й отрасли. В стоимостном балансе это стоимость продукции i-й отрасли, используемой для производства единицы стоимости продукции j-й отрасли. Коэффициент прямых затрат не зависит от объема производства и является довольно стабильной величиной во времени.

Используя коэффициент прямых затрат, межотраслевые потоки продукции можно определить по формуле:

$$x_{ij} = a_{ij} X_j, \ i = \overline{1,\ n};\ j = \overline{1,\ n}.$$

Систему уравнений баланса можно записать в виде:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i, \ i = \overline{1,\ n},$$

или в матричной форме:

$$X = AX + Y,$$

где X – вектор-столбец валовой продукции; Y – вектор-столбец конечной продукции; $A = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$ – матрица коэффициентов прямых материальных затрат (технологическая матрица). С учетом экономического смысла задачи все коэффициенты матрицы A и компоненты векторов X и Y должны быть неотрицательны.

2А+Б24 (*Виды экономико-математических моделей МОБ*). Различают следующие математические модели МОБ:

24.1) *математическая модель отчетного МОБ*. Выражается в виде соотношений, которые описываются формулами:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j,\ j = \overline{1,\ n};$$

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i,\ i = \overline{1,\ n};$$

24.2) *математическая модель прогнозного МОБ*:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i, \ i = \overline{1,\ n},$$

или в матричной форме:

$$X = AX + Y.$$

Модель прогнозного межотраслевого баланса также называется *моделью В. Леонтьева*, *моделью «затраты – выпуск»*.

2А+Б25 (*Расчеты, выполняемые по модели МОБ*). По модели межотраслевого баланса могут выполняться следующие типы расчетов:

25.1) если в модели известны величины валовой продукции отрасли (X_i), то можно определить объем конечной продукции отрасли (Y_i) по формуле: $Y = (E - A)X$;

25.2) если в модели известны величины конечной продукции отраслей (Y_i), то можно определить величины валовой продукции каждой отрасли (X_i) по формуле: $X = (E - A)^{-1}Y$;

25.3) если для ряда отраслей известны величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей – объемы конечной продукции, то можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых.

В вышеприведенных формулах E – единичная матрица размерности $n \times n$, а $(E - A)^{-1}$ – матрица, обратная матрице $(E - A)$.

Рассмотренные модели являются статическими, т. е. такими, в которых все зависимости отнесены к одному моменту времени. Эти модели разрабатываются лишь для отдельно взятых периодов, причем в рамках данных моделей не устанавливается связь с предшествующими или последующими периодами. Таким образом, народнохозяйственная динамика отображается рядом независимо рассчитанных моделей, что вносит определенные упрощения и сужает возможности анализа модели. Так, в статических моделях не анализируется распределение, использование и производственная эффективность капитальных вложений. Капиталовложения вынесены из сферы производства в сферу конечного использования вместе с предметами потребления и непроизводственными затратами, т. е. включены в конечный продукт.

2А+Б26 (*Матрица коэффициентов полных затрат*). Обозначив обратную матрицу через B ($B = (E - A)^{-1}$), модель «затраты – выпуск» можно записать в виде: $X = BY$.

Матрица $B = \left[b_{ij} \right]_{n \times n}$ называется *матрицей коэффициентов полных затрат*. Коэффициенты полных затрат b_{ij} показывают, сколько всего нужно произвести продукции i-й отрасли для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции j-й отрасли.

Коэффициенты полных затрат можно применять тогда, когда необходимо определить, как скажется на валовом выпуске некоторой отрасли предполагаемое изменение объемов конечной продукции всех отраслей:

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \Delta Y_j,\ i = \overline{1,\ n},$$

где ΔX_i и ΔY_j – изменения (приросты) величин валовой и конечной продукции соответственно.

2А27 (*Определение*). Неотрицательную матрицу A называют *продуктивной*, если существует такой неотрицательный вектор $X \geq 0$, что $X > AX$.

2А+Б28 (*Свойства матрицы коэффициентов прямых материальных затрат*). Основные свойства матрицы коэффициентов прямых материальных затрат:

28.1) $A \geq 0$, т. к. по определению коэффициенты прямых материальных затрат являются неотрицательными;

28.2) диагональные элементы матрицы A меньше единицы ($a_{ii} < 1$), т. к. если бы для собственного воспроизводства в отрасли затрачивалось большее количество продукта, чем создавалось, то процесс воспроизводства нельзя было бы осуществлять;

28.3) матрица A должна быть продуктивной. Это условие означает существование положительного вектора конечной продукции $Y > 0$ для модели межотраслевого баланса. Соответственно, и модель Леонтьева, определяемая продуктивной матрицей A, тоже называется *продуктивной*.

2А+Б29 (*Условия продуктивности матрицы коэффициентов прямых материальных затрат*). Чтобы матрица прямых материальных затрат была продуктивной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

29.1) существует матрица $(E - A)^{-1} \geq 0$;

29.2) матричный ряд сходится: $E + A + A^2 + A^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$, причем его сумма равна $(E - A)^{-1}$;

29.3) все главные миноры матрицы $(E - A)$ порядка от 1 до n положительны.

Прямые затраты играют очень важную роль в составлении баланса, но не отражают в полной мере сложных количественных взаимосвязей, которые имеются в народном хозяйстве.

2Б30 (*Состав полных материальных затрат*). *Косвенные затраты* – это затраты, которые входят в данный продукт не непосредственно (как прямые затраты), а через затраты других отраслей. Обозначим *коэффициент косвенных материальных затрат k-го порядка* через $a_{ij}^{(k)}$. Тогда сумма прямых и косвенных материальных затрат продукции i-й отрасли для производства единицы продукции j-й отрасли:

$$c_{ij} = a_{ij} + a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \ldots + a_{ij}^{(k)} + \ldots,$$

или в матричном виде:

$$C = A + A^{(1)} + A^{(2)} + \ldots + A^{(k)} + \ldots$$

Используя содержательный смысл коэффициентов косвенных материальных затрат, можно записать следующие выражения: $A^{(1)} = AA = A^2$; $A^{(2)} = AA^{(1)} = A^3$ и т. д.

Тогда

$$C = A + A^{(1)} + A^{(2)} + \ldots + A^{(k)} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} A^k;$$

$$C \approx A + A^{(1)} + A^{(2)} + \ldots + A^{(k)}.$$

Если матрица A является продуктивной, то существует матрица $B = (E - A)^{-1}$, которая является суммой сходящегося матричного ряда:

$$B = (E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \Rightarrow B = E + C.$$

Таким образом, $b_{ii} \geq 1$, $i = \overline{1, n}$, – коэффициенты матрицы B, учитывающие затраты на производство продукции и саму единицу продукции, которая выходит за сферу производства. Кроме того, $b_{ij} \geq a_{ij}$, $\forall i, j$.

2А+Б31 (*Пример*). Рассмотрим формирование затрат электроэнергии на выпуск стального проката по следующей технологической цепочке:

руда	$\rightarrow$	чугун	$\rightarrow$	сталь	$\rightarrow$	прокат
	косвенные затраты 2-го порядка		косвенные затраты 1-го порядка		прямые затраты	

Затраты электроэнергии при получении проката из стали будут называться прямыми затратами, те же затраты при получении стали из чугуна будут называться косвенными затратами 1-го порядка, а затраты электроэнергии при получении чугуна из руды будут называться косвенными затратами 2-го порядка на выпуск стального проката и т. д.

2.2.4. Динамические модели МОБ

2А+Б32 (*Динамические модели МОБ*). *Динамические модели* должны отражать не состояние, а процесс развития экономики, устанавливать непосредственную взаимосвязь между предыдущими и последующими этапами. В основе построения модели в виде динамической системы уравнений лежит математическая зависимость между величиной капитальных вложений и приростом продукции.

Уравнение распределения продукции вида

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i, \; i = \overline{1,\, n},$$

в динамическом балансе преобразуется следующим образом:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \Delta\Phi_{ij} + Y_i', \; i = \overline{1,\, n},$$

где $\left[x_{ij}\right]_{n\times n}$ – *матрица межотраслевых потоков текущих затрат*, элементы которой совпадают с соответствующими элементами статического баланса; $\left[\Delta\Phi_{ij}\right]_{n\times n}$ – *матрица межотраслевых потоков капитальных вложений*, элементы которой показывают, какое количество продукции i-й отрасли направлено в текущем периоде в j-ю отрасль в качестве производственных капитальных вложений в ее основные фонды. Материально это выражается в приросте в потребляющих отраслях производственного оборудования, сооружений, производственных площадей, транспортных средств и т. д.; Y_i' – продукция i-й отрасли, идущая в личное и общественное потребление, накопление непроизводственной сферы, прирост оборотных фондов, на экспорт.

Таким образом, *сумма потоков капиталовложений и конечного продукта динамической модели равна конечной продукции статического баланса*:

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta\Phi_{ij} + Y_i' = Y_i,\ i = \overline{1,\ n}.$$

Динамические модели решаются достаточно сложно и широкого применения пока не нашли. Это отчасти связано с тем, что система уравнений динамической модели является системой либо алгебраических, либо дифференциальных, либо разностных уравнений.

2.3. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

2.3.1. Основные понятия

2А33 (*Цель изучения систем массового обслуживания*). Очереди, т. е. ожидающие того или иного вида обслуживания заявки, являются частью повседневной жизни, и их математическое описание составляет предмет теории систем массового обслуживания (СМО). *Цель изучения* СМО – выработка рекомендаций по обеспечению качества обслуживания путем изучения зависимости между количеством обслуживаемых и обслуживающих единиц СМО и установления научно-обоснованных соотношений между ними.

2А+Б34 (*Основные элементы СМО*). Основными элементами СМО являются *источники заявок* на обслуживание (клиентов), их *входящий поток*, дисциплины обслуживания, *каналы обслуживания*, образующие *обслуживающую систему* (сервис), и *выходящий поток*. Если сервис свободен, то клиент сразу попадает на обслуживание, иначе возникает *очередь*. Появление клиентов (заявок на обслуживание) характеризуется *интервалом между их последовательными поступлениями*, а функционирование сервиса – *временем обслуживания*. Как правило, эти параметры являются случайными. В системах массового обслуживания выделяют два потока событий: *входящий поток* заявок на обслуживание и *выходящий поток* обслуженных заявок. Эти потоки характеризуются определенными законами распределения вероятностей, в результате их взаимодействия система оказывается в том или ином своем состоянии. Расчет вероятностных характеристик состояния системы (длины очереди, времени ожидания и т. д.) – это одна из главных задач теории массового обслуживания.

2А+Б35 (*Входящий поток*). На практике наиболее распространенным является *простейший входящий поток* заявок (требований), обладающий свойствами:

35.1) *стационарности*, т. е. вероятность поступления определенного количества заявок в течение некоторого промежутка времени зависит только от длины этого промежутка; вероятность поступления хотя бы одной заявки за малый промежуток времени Δt пропорциональна длине промежутка: $p(\Delta t) \approx \lambda \Delta t$;

35.2) *ординарности*, т. е. невозможности одновременного появления двух или более заявок;

35.3) *отсутствия последействия*, т. е. поступление заявки не зависит от того, когда и сколько заявок поступило до этого момента. В этом случае вероятность $P_k(t)$ поступления k заявок за промежуток времени t определяется по закону Пуассона:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

где $\lambda = \dfrac{1}{\tau}$ – *интенсивность потока заявок*, т. е. среднее число заявок, поступающих в единицу времени (чел./мин, руб./ч, кВт/ч); τ – среднее значение интервала времени между поступлением двух соседних заявок.

В большинстве систем массового обслуживания время между последовательными поступлениями заявок и время их обслуживания являются случайными величинами и описываются показательным распределением с плотностью

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ t \ge 0,$$

а средний интервал времени между последовательными заявками равен:

$$\int_0^\infty t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

2А+Б36 (*Выходящий поток*). Выходящий поток заявок связан с потоком обслуживания в канале, где длительность обслуживания $t_{\text{обсл}}$ является случайной величиной и часто подчиняется показательному закону распределения с плотностью

$$f(t) = \mu e^{-\mu t},$$

где $\mu = \dfrac{1}{t_{\text{обсл}}}$ – *интенсивность потока обслуживания*, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени (чел./мин, руб./день, кг/ч); $t_{\text{обсл}}$ – среднее время обслуживания.

2А37 (*Интенсивность нагрузки*). Важной характеристикой СМО, объединяющей λ и μ, является *интенсивность нагрузки* (*коэффициент загрузки*)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

2Б38 (*Дисциплина очереди*). Чтобы анализировать работу СМО, следует определить правила формирования и обслуживания очереди, которые называют *дисциплиной очереди*. Наиболее распространенный принцип ее построения основан на правиле «первым пришел – первым обслуживаешься» (часто обозначается аббревиатурой *FIFO* – от англ. *First-In-First-Out*). Второе правило – «последним пришел – первым обслуживаешься» (обозначается аббревиатурой *LIFO* – от англ. *Last-In-First-Out*). Может использоваться случайный отбор заявок, учет определенных приоритетов, а также вводиться ограничение на время пребывания заявки в очереди.

2А+Б39 (*Классификация СМО*). Обычно решение ждать обслуживания или отказаться от него определяется длиной очереди. Поэтому при моделировании учитывают максимально допустимое количество m заявок в очереди. Возможны следующие случаи:

39.1) $m = 0$ – без очереди, *системы с отказами*, в которых при занятости всех каналов обслуживания заявка не встает в очередь и покидает систему необслуженной;

39.2) $m = \infty$ – очередь не ограничена, *системы с неограниченным ожиданием*, в которых заявка встает в очередь, если в момент ее поступления все каналы были заняты;

39.3) $m > 0$ – с ограниченной очередью, *системы смешанного типа* с ожиданием и ограниченной длиной очереди: заявка получает отказ, если приходит в момент, когда все места в очереди заняты, а заявка, попавшая в очередь, обслуживается обязательно.

Считается, что заявки, которым не оказалось места в очереди, навсегда теряются.

2А+Б40 (*Виды СМО*). Часто система обслуживания содержит несколько обслуживающих каналов, которые можно выбирать. По числу каналов обслуживания СМО делятся на *одноканальные* и *многоканальные*. Примером могут служить рабочие места кассиров в супермаркетах. В зависимости от расположения источника заявок системы могут быть *разомкнутыми* (источник заявок находится вне системы) и *замкнутыми*.

2Б41 (*Обслуживание как марковский случайный процесс*). Случайный процесс называется *марковским*, если для любого момента времени вероятностные характеристики процесса зависят только от его состояния в данный момент, но не зависят от того, когда и как он пришел в это состояние. Тогда при прогнозировании будущего не требуется учитывать прошлое (подробнее см. в пособии [14]).

2А+Б42 (*Марковский процесс с дискретными состояниями*). На практике широко используются марковские процессы с дискретными состояниями, т. е. предполагается, что все возможные состояния системы можно перечислить. Считается, что переход процесса из одного состояния в другое происходит практически мгновенно и вероятности переходов известны. Рассмотрим процесс с дискретным шагом по времени. Пример такого процесса с тремя состояниями приведен на рис. 1.

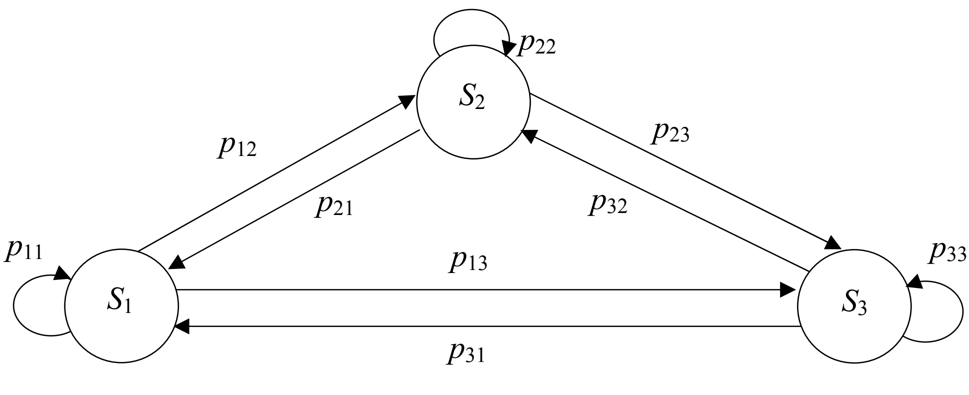


Рис. 1. Пример процесса с тремя состояниями

Для аналитического описания используется матрица вероятностей переходов

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix},$$

где p_{ij} – вероятность перехода процесса из i-го состояния в j-е состояние.

Лекция 10

2.3.2. Аналитический расчет характеристик СМО. Уравнения Колмогорова

2А+Б43 (*Важнейшие характеристики СМО*). Одной из важнейших характеристик СМО является *длина очереди*. Если она велика, то это ведет к потере потенциальных заявок (клиентов), а следовательно, к снижению конкурентоспособности. Длина очереди – это случайная величина, но ее математическое ожидание (среднюю длину) можно рассчитать, как и другие важные характеристики:

– вероятность отклонения заявки;

– вероятность обслуживания заявки;

– среднее число заявок, обслуживаемых за единицу времени;

– среднее время пребывания заявки в системе.

2А+Б44 (*Уравнения Колмогорова*). Вывод аналитических зависимостей основывается на *уравнениях Колмогорова* – дифференциальных уравнениях, в которых неизвестными функциями являются вероятности состояний системы.

Рассмотрим СМО с N возможными состояниями: S_1, S_2, …, S_N и простейшим входящим потоком заявок.

Тогда вероятность перехода системы из i-го состояния в j-е состояние за малый промежуток времени Δt определяется соотношением $p_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij}\Delta t,$ где λ_{ij} – плотность вероятности перехода системы из i-го состояния в j-е состояние.

Найдем вероятность $p_1(t+\Delta t)$ того, что в момент $(t+\Delta t)$ СМО будет находиться в состоянии S_1, при условии, что в момент t она с вероятностью $p_i(t),\ i=\overline{1,\ N},$ находится в состоянии S_i. Эта вероятность (на основании теорем сложения и умножения вероятностей) равна сумме произведений вероятностей $p_i(t)$ нахождения системы в i-м состоянии в момент времени t и условных вероятностей $p_{ij}(\Delta t)$ перехода СМО из i-го состояния в j-е состояние за время Δt, что с учетом $p_{11}(\Delta t)+\ldots+p_{1N}(\Delta t)=1$ (вероятность достоверного события) дает:

$$p_1\left(t+\Delta t\right) \approx p_1(t)\left(1-p_{12}(\Delta t)-\ldots-p_{1N}(\Delta t)\right)+$$
$$+p_2(t)p_{21}(\Delta t)+\ldots+p_N(t)p_{N1}(\Delta t).$$

Или, выразив вероятности переходов через интенсивности потоков, имеем:

$$p_1\left(t+\Delta t\right)-p_1(t)\approx \Delta t\left(p_2(t)\lambda_{21}+\ldots+p_N(t)\lambda_{N1}-p_1(t)\left(\lambda_{12}+\ldots+\lambda_{1N}\right)\right).$$

Записав аналогичные представления для $p_i(t),\ i=\overline{2,\ N},$ разделив полученные соотношения на Δt и устремив $\Delta t \to 0$, получим *систему дифференциальных уравнений* (или просто *систему уравнений*) *Колмогорова*:

$$\frac{dp_j(t)}{dt}=\left(\sum_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{n}\lambda_{ij}p_i(t)-p_j(t)\sum_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{n}\lambda_{ji}\right),\ j=\overline{1,\ N}.$$

Это уравнение выражает производную вероятности j-го состояния системы как разности двух сумм. Первая сумма – это скалярное произведение вектора состояний системы на вектор интенсивностей потоков, переводящих систему в j-е состояние. Из нее вычитается сумма интенсивностей всех потоков, выводящих систему из j-го состояния, умноженная на вероятность этого состояния. Полученную систему уравнений можно дополнить очевидным соотношением $\sum\limits_{j=1}^{N}p_j(t)=1$ и опустить одно из уравнений системы.

Задавая начальные условия (характеризующие исходное состояние СМО) и решая соответствующую задачу Коши для системы уравнений Колмогорова, определяем соответствующие вероятности $p_i(t),\ i=\overline{1,\ N},$ нахождения СМО в состояниях S_i в текущий момент времени.

2А+С45 (*Финальные вероятности состояний СМО*). Анализ решения задачи Коши для системы уравнений Колмогорова показывает, что для достаточно больших значений t, независимо от начальных условий, это решение стабилизируется и практически не зависит от времени. Таким образом, с течением времени функционирование СМО переходит в стационарный (установившийся) режим, т. е. существуют

$$\lim_{t\to+\infty}p_i(t)=\mathrm{const}=p_i,\ i=\overline{1,\ N}.$$

Значения $p_i,\ i=\overline{1,\ N},$ вероятностей состояний, соответствующие стационарному режиму работы СМО, называются *финальными* *вероятностями.* Полагая в системе дифференциальных уравнений $\frac{dp_i(t)}{dt} = 0$, получаем систему алгебраических уравнений для определения финальных вероятностей p_i, $i = \overline{1, N}$. Аналогично осуществляется аналитический расчет и других СМО.

2.3.3. СМО с отказами

2А+Б46 (*Задача Эрланга*). Рассмотрим n-канальную СМО с отказами (заявка не обслуживается, если все каналы заняты). Для такой системы состояния S_1, S_2, …, S_n соответствуют числу занятых каналов, состояние S_0 означает отсутствие заявок. Предполагается, что все каналы в равной степени доступны всем заявкам, поток заявок является простейшим с интенсивностью λ, время $t_{обсл}$ обслуживания одной заявки распределено по показательному закону с интенсивностью μ освобождения каждого канала СМО. Требуется произвести аналитический расчет основных характеристик СМО.

2Б+С47 (*Система уравнений Эрланга*). Обозначим через $p_i(t)$, $i = \overline{0, n}$, вероятность нахождения СМО в состоянии S_i в момент времени t. Учитывая, что за малый промежуток времени Δt переход СМО в i-е состояние возможен только из состояний S_{i-1} или S_{i+1} (отметим, что существует $(i + 1)$ возможность перейти из состояния S_{i+1} в состояние S_i (в зависимости от того, какой из занятых $(i + 1)$ каналов освободится) либо остаться в состоянии S_i в течение времени Δt (кроме состояний S_0 и S_n, где возможен переход из S_1 и S_{n-1} соответственно)), по аналогии с п. 2.3.2 получаем систему *уравнений Эрланга*:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t); \\ \dfrac{dp_k(t)}{dt} = -(\lambda + k\mu) p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t), \; k = \overline{1, \; n-1}; \\ \dfrac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - n\mu p_n(t); \\ \sum\limits_{k=1}^{n} p_k(t) = 1 \end{cases}$$

с начальными условиями (задача Коши) вида $p_0(0) = 1$; $p_k(0) = 0$, $k=\overline{1,\ n}$ (в начальный момент все каналы свободны).

Для нахождения финальных вероятностей $p_k = \lim\limits_{t\to+\infty} p_k(t)$, $k=\overline{1,\ n}$, полагаем в системе Эрланга $\dfrac{dp_k(t)}{dt}=0$, $p_k(t)$ заменяем на p_k, в результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений:

$$p_k=\frac{\lambda^k}{k!\mu^k}p_0=\frac{\rho^k}{k!}p_0,\ k=\overline{1,\ n};\ \rho=\frac{\lambda}{\mu}.$$

С учетом $\sum\limits_{k=1}^{n}p_k=1$, что равносильно $p_0=\dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\rho^k}{k!}}$, получаем формулы для расчета установившегося режима.

2А+Б48 (*Формулы для расчета установившегося режима*). Формулы для расчета установившегося режима:

48.1) вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок ($k = 0$):

$$p_0=\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^j}{j!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1},\ \rho=\frac{\lambda}{\mu};$$

48.2) вероятность отказа в обслуживании, когда поступившая на обслуживание заявка найдет все каналы занятыми ($k = n$):

$$p_{\text{отк}}=p_n=\frac{p_0\rho^n}{n!};$$

48.3) вероятность обслуживания:

$$p_{\text{обсл}} = 1 - p_{\text{отк}};$$

48.4) среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$n_{\text{з}} = \rho p_{\text{обсл}};$$

48.5) доля каналов, занятых обслуживанием:

$$k_{\text{з}}=\frac{n_{\text{з}}}{n};$$

48.6) абсолютная пропускная способность СМО, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени:

$$A = \lambda p_{\text{обсл}}.$$

2.3.4. СМО с неограниченным ожиданием

2Б49 (*Формулы для установившегося режима*). Заявка, поступившая в систему с неограниченным ожиданием (см. с. 151 учебного пособия [9]) и нашедшая все каналы занятыми, становится в очередь, ожидая освобождения одного из каналов. Основной характеристикой качества обслуживания является время ожидания (время пребывания заявки в очереди). Для таких систем характерно отсутствие отказа в обслуживании, т. е. $p_{\text{обсл}} = 1$; $p_{\text{отк}} = 0$.

Формулы для расчета установившегося режима:

49.1) вероятность простоя каналов, когда нет заявок ($k = 0$):

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}}.$$

Предполагается, что $\frac{\rho}{n} < 1$. В противном случае очередь становится бесконечной;

49.2) вероятность занятости обслуживанием k заявок:

$$p_k = \frac{\rho^k p_0}{k!}, \ 1 \le k \le n;$$

49.3) вероятность занятости обслуживанием всех каналов:

$$p_n = \frac{\rho^n p_0}{n!};$$

49.4) вероятность того, что заявка окажется в очереди:

$$p_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0;$$

49.5) среднее число заявок в очереди:

$$L_{\text{оч}} = p_0 \frac{\rho^{n+1}}{n! n \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2} p_0;$$

49.6) среднее время ожидания заявки в очереди:

$$t_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda};$$

49.7) среднее время пребывания заявки в СМО:

$$t_{\text{СМО}} = t_{\text{оч}} + t_{\text{обсл}};$$

49.8) среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$n_{\text{з}} = \rho;$$

49.9) среднее число свободных каналов:

$$n_{\text{св}} = n - n_{\text{з}};$$

49.10) коэффициент занятости каналов обслуживания:

$$k_{\text{з}} = \frac{n_{\text{з}}}{n};$$

49.11) среднее число заявок в СМО:

$$\overline{z} = L_{\text{оч}} + n_{\text{з}}.$$

2.3.5. СМО с ожиданием и с ограниченной длиной очереди

2Б50 (*Формулы для установившегося режима*). Заявка, поступившая в систему с ожиданием и с ограниченной длиной очереди (см. с. 200 учебника [1]) и нашедшая все каналы и ограниченную очередь занятыми, покидает систему необслуженной. Основной характеристикой качества системы является отказ заявке в обслуживании.

Ограничения на длину очереди могут быть вызваны:

1) ограничением сверху времени пребывания заявки в очереди;

2) ограничением сверху длины очереди;

3) ограничением общего времени пребывания заявки в системе.

Формулы для расчета установившегося режима:

50.1) вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок ($k = 0$):

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)};$$

50.2) вероятность отказа в обслуживании:

$$p_{\text{отк}} = \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m} p_0;$$

50.3) вероятность обслуживания:

$$p_{\text{обсл}} = 1 - p_{\text{отк}};$$

50.4) абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda p_{\text{обсл}};$$

50.5) среднее число занятых каналов:

$$n_{\text{з}} = \frac{A}{\mu};$$

50.6) среднее число заявок в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \frac{1-(\rho/n)^m (m+1-m\rho/n)}{(1-\rho/n)^2} p_0;$$

50.7) среднее время ожидания обслуживания:

$$t_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda};$$

50.8) среднее число заявок в системе:

$$\overline{z} = L_{\text{оч}} + n_{\text{з}};$$

50.9) среднее время пребывания в системе:

$$t_{\text{СМО}} = \frac{\overline{z}}{\lambda}.$$

2Б+С51 (*Метод имитационного моделирования*). Аналитические зависимости найдены для большого числа СМО, но они почти всегда предполагают марковский характер процесса и определяют только стационарное состояние системы. Поэтому широкое распространение получил *метод имитационного моделирования* СМО, который позволяет анализировать системы с любой структурой. Он основан на многократном «проигрывании» функционирования системы. При этом как момент поступления очередной заявки, так и продолжительность ее обслуживания (если она будет обслуживаться) задаются конкретными значениями, полученными с помощью датчиков псевдослучайных чисел. С малым шагом по времени рассчитываются последовательные состояния системы. Если накопить достаточное количество таких реализаций поведения системы, то стандартной статистической обработкой можно найти искомые характеристики системы с желаемой степенью точности. Для сложных систем метод статистического моделирования, как правило, оказывается проще аналитического подхода, а в ряде случаев ему просто нет альтернативы.

Существуют пакеты прикладных программ (подробнее см. учебное пособие [20]), которые позволяют задавать структуру моделируемой системы и устанавливать параметры потоков случайных событий. Если ограничиться использованием такой программы, как *MS Excel*, то посредством ее встроенных средств на отдельных листах можно получить реализации случайных потоков, но расчет их взаимодействия придется выполнять самостоятельно.

2.4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

2.4.1. Основные понятия

2А52 (*Понятие конфликта*). В процессе целенаправленной человеческой деятельности возникают ситуации, в которых интересы отдельных лиц (групп, сторон) либо прямо противоположны (антагонистичны), либо, не будучи непримиримыми, все же не совпадают. Такие ситуации называются *конфликтными*. Эффективность решений, принимаемых в ходе конфликта каждой из сторон, зависит от действий другой стороны. При этом ни одна из сторон не может полностью контролировать положение, т. к. и той и другой стороне решения приходится принимать в условиях неопределенности.

2А+Б53 (*Примеры*). Примерами конфликтных ситуаций являются спортивные игры, арбитражные споры, военные учения и т. д., когда каждая из конфликтующих сторон стремится добиться наилучшего для себя результата. Подобного рода ситуации встречаются и в различных сферах производственной деятельности.

2А54 (*Теория игр*). *Теория игр* – это математическая теория конфликтных ситуаций, разрабатывающая рекомендации по наиболее рациональному образу (стратегии) действий каждого из участников в ходе конфликтной ситуации (игры), т. е. таких действий, которые обеспечивали бы ему наилучший результат. Становление и систематическое изучение теории игр и ее приложений в экономике начинается с выходом в 1944 г. монографии Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение».

Игровую схему можно придать многим ситуациям в экономике. Здесь выигрышем могут быть эффективность использования ресурсов, производственных фондов, величина прибыли, себестоимость и т. д.

2А55 (*Игра*). *Игра* – это совокупность правил, определяющих возможные действия (*чистые стратегии*) участников игры (игроков). Суть игры в том, что каждый из участников принимает такие решения в развивающейся конфликтной ситуации, которые, как он полагает, обеспечивают ему наилучший результат (исход) игры. Игра – это упрощенная математическая модель конфликтной ситуации.

2А56 (*Стратегия, оптимальная стратегия*). *Стратегия* – это совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий игрока в каждой конкретной ситуации, складывающейся в процессе игры. *Оптимальной стратегией* называется стратегия, которая обеспечивает игроку наилучший исход игры при предположении, что противник использует наилучшую для себя стратегию.

2А57 (*Исход игры, партия*). *Исход* (*плата*) *игры* – это значение некоторой функции, которая называется *функцией выигрыша* (*платежной функцией*). Далее будем рассматривать только такие игры, в которых выигрыш выражается количественно: стоимостью, баллами и т. д. Величина выигрыша зависит от стратегии, применяемой игроками. Игроки – это участники игры с различными группами интересов. *Партией* называют каждый вариант реализации игры. В партии игроки совершают конкретные ходы.

2А58 (*Ход игрока*). *Ход* – это выбор и реализация игроком одного из допустимых вариантов поведения. Ходы бывают:

58.1) *личные*, когда игрок выбирает и реализует ту или иную свою конкретную чистую стратегию. Например, в шахматах каждый ход является личным;

58.2) *случайные*, когда выбор чистой стратегии производится с использованием какого-либо механизма случайного выбора (например, с применением таблицы случайных чисел).

2А+Б59 (*Классификация игр*). Игры можно классифицировать по разным признакам:

59.1) *по числу игроков*. Принципиальное значение при классификации по количеству игроков имеют три варианта: один, два и более двух игроков. Если при этом игроки объединяются, например, в две группы, преследующие противоположные цели, то имеет место игра двух «лиц» – *парная игра*;

59.2) *в зависимости от числа стратегий* игры делятся на *конечные* и *бесконечные*. Примером игры с бесконечным числом стратегий может служить ситуация «продавец – покупатель», когда как цена, так и количество товара могут быть названы любыми;

59.3) *в зависимости от числа исходов*: *игры качества* (конечное или счетное число исходов) и *игры степени* (континуум возможных исходов);

59.4) *в зависимости от взаимоотношений участников* различают игры *бескоалиционные*, или *некооперативные* (участники не имеют права заключать соглашения), и *коалиционные*, или *кооперативные*. Примером может служить ситуация, когда несколько производителей одного товара могут воздействовать на его рыночную цену, устанавливая ее либо независимо друг от друга, либо заключив между собой соглашение;

59.5) *по характеру выигрышей* игры делятся на игры *с нулевой суммой* и *ненулевой суммой*. В первых (игры двух лиц с нулевой суммой) общий капитал игроков не меняется, а лишь перераспределяется в ходе игры, в связи с чем сумма выигрышей равна нулю (проигрыш принимается как отрицательный выигрыш). Так как имеется прямой конфликт интересов, то их также называют *антагонистическими*. Однако если возникает новая стоимость, которую можно разделить между игроками, то это игра с ненулевой суммой, т. е. сумма выигрышей отлична от нуля. Например, при проведении лотереи часть взноса участников идет организатору лотереи;

59.6) *по виду функции выигрыша* игры делятся на *матричные*, *биматричные*, *непрерывные*, *выпуклые*, *сепарабельные* и др. В *матричных играх* (при двух участниках) выигрыши первого игрока задаются матрицей, в *биматричных* выигрыши каждого игрока задаются своей матрицей. Другие типы таких игр различаются видом аналитического выражения платежной функции;

59.7) *по количеству ходов* игры делятся на *одноходовые* (выигрыш распределяется после одного хода каждого игрока) и *многоходовые* (выигрыш распределяется после нескольких ходов). Многоходовые игры в свою очередь делятся на *позиционные*, *стохастические, дифференциальные* и др.;

59.8) *в зависимости от объема имеющейся информации* различают игры *с полной* и *неполной информацией*;

59.9) неопределенность может быть обусловлена как сознательным противодействием противника, так и неизвестными обстоятельствами (неопределенностью). Игры, в которых участники стремятся добиться для себя наилучшего результата, сознательно выбирая допустимые правилами игры способы действий, называют иногда *стратегическими*.

Игра с природой – это игра двух лиц, в которой один из участников безразличен к результату игры. Такие игры встречаются в экономической практике, когда приходится формализовать (моделировать) ситуации, придавая им игровую схему, в которой один из участников безразличен к результату игры. Под термином «природа» понимают всю совокупность внешних обстоятельств, в которых сознательному игроку (иногда его называют *статистиком*, а соответствующую игру – *статистической*) приходится принимать решение. Например, определение объема выпуска сезонной продукции в ожидании наиболее выгодного для ее реализации уровня спроса; формирование пакета ценных бумаг в расчете на высокие дивиденды и т. д. В таких играх в качестве второго игрока выступает: в первом случае – уровень спроса; во втором – размеры ожидаемой прибыли.

В играх с природой степень неопределенности для сознательного игрока (статистика) возрастает: если в стратегических играх каждый из участников постоянно ожидает наихудшего для себя ответного действия партнера, то в статистических играх природа, являясь безразличной в отношении выигрыша инстанцией, может предпринимать и такие ответные действия (будем говорить: реализовывать такие состояния), которые ей совершенно невыгодны, а выгодны сознательному игроку (статистику).

Лекция 11

2.4.2. Матричные игры с нулевой суммой

2А60 (*Платежная матрица*). Матричная игра $m \times n$ (с нулевой суммой) – это антагонистическая игра, в которой первый игрок A использует возможные стратегии A_1, A_2, …, A_m, а его противник (оппонент) B – стратегии B_1, B_2, …, B_n. Если игрок A применит стратегию A_i, а оппонент – стратегию B_j, то плата a_{ij} игры будет выигрышем игрока A (проигрышем противника B) для $a_{ij} > 0$. Таким образом, игра с нулевой суммой полностью описывается так называемой *платежной матрицей* игры (табл. 3).

Таблица 3

Платежная матрица

Стратегии игрока A	Стратегии игрока B				
	B_1	…	B_j	…	B_n
A_1	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
…	…	…	…	…	…
A_i	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}

Если игра состоит только из личных ходов, то выбор пары чистых стратегий (A_i; B_j) единственным образом определяет исход (результат) игры. Если же в игре используются случайные ходы, то исход игры определяется средним значением (математическим ожиданием) выигрыша. Платежная матрица является табличной записью функции выигрыша. В теории матричных игр всегда предполагается, что в платежной матрице записаны выигрыши игрока A.

2А61 (*Принцип гарантированного результата*). При поиске оптимальных стратегий игроки опираются на основной принцип теории игр – *принцип гарантированного результата* (*принцип максимина*), в соответствии с которым каждый игрок, считая партнера по игре разумным противником, выбирает свои действия в предположении, что соперник не упустит возможности использовать в своих интересах любую его ошибку.

При выборе своего хода игрок A анализирует платежную матрицу, определяя для каждой своей чистой стратегии A_i, $i = \overline{1, m}$, минимальное значение α_i ожидаемого выигрыша: $\alpha_i = \min_j a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$ (считая, что противник играет наилучшим образом), а затем из всех $X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j$ выбирает наибольшее $\alpha = \max_i \alpha_i$ и соответствующую ему чистую (максиминную) стратегию A_i. Игрок A гарантирует себе выигрыш не хуже α при любых стратегиях игрока B, и не существует чистой стратегии игрока A, которая давала бы ему больший выигрыш, чем α, при всех стратегиях игрока B.

2А62 (*Нижняя чистая цена игры*). Число $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$ называется *нижней чистой ценой игры* (*максимином*). Она выражает выигрыш игрока A при использовании максиминной стратегии независимо от действий игрока B.

2А63 (*Верхняя чистая цена игры*). Число β, определяемое по формуле

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij},$$

называется *верхней чистой ценой игры* (*минимаксом*). Она показывает, какой максимальный проигрыш (гарантированный результат) может быть у игрока B при подходящем выборе им своей чистой стратегии (независимо от действий игрока A). Соответствующая стратегия игрока B называется *минимаксной.*

2А+Б64 (*Теорема*). *В матричной игре нижняя чистая цена игры не превосходит верхней чистой цены игры*, т. е. $\alpha = \max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij} = \beta$.

2А65 (*Чистые стратегии*). Стратегии $A_i,\ i = \overline{1,\ m},$ первого игрока и стратегии $B_j,\ j = \overline{1,\ n},$ второго игрока (возможные их ходы) принято называть *чистыми стратегиями игроков.*

2А+Б66 (*Ситуация равновесия в чистых стратегиях*). Если для чистых стратегий A_i, B_j игроков A и B соответственно имеет место равенство $\alpha = \beta = a_{ij}$, то пару чистых стратегий $(A_i;\ B_j)$ называют *седловой точкой матричной игры*, элемент a_{ij} матрицы, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, – *седловым элементом платежной матрицы*, а число $v = \alpha = \beta$ – *чистой ценой игры*.

Ситуация, когда ни один из игроков не имеет разумных оснований для изменения своей стратегии, называется *ситуацией равновесия*.

Если матричная игра имеет седловую точку, т. е. в платежной матрице присутствует элемент, который является одновременно минимальным в строке и максимальным в столбце, то она решается в чистых стратегиях. Чистые стратегии $(A_i;\ B_j)$, образующие седловую точку, и будут оптимальными, а решением игры считается тройка объектов $\left\{A_i;\ B_j;\ v\right\}$.

Про игры с седловой точкой говорят, что они решаются в чистых стратегиях, т. к. последние полностью определяют рациональное поведение конфликтующих сторон. Платежная матрица может иметь несколько седловых точек.

2А+Б67 (*Смешанные стратегии*). *Смешанной стратегией p* первого (A) игрока называется вектор

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_m), \text{ где } p_i \geq 0,\ i = \overline{1,\ n},\ \text{и} \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Аналогично вектор q – смешанная стратегия игрока B:

$$q = (q_1, q_2, \ldots, q_n), \text{ где } q_j \geq 0,\ j = \overline{1,\ n},\ \text{и} \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Здесь p_i и q_j – вероятности, с которыми игроки A и B в ходе игры выбирают свои чистые стратегии A_i и B_j.

Чистая стратегия A_i игрока A может рассматриваться как частный случай смешанной стратегии, i-я компонента которой равна единице, а остальные – нулю. Аналогично для игрока B.

2А68 (*Пример*). Пусть первый игрок имеет m, а второй – n чистых стратегий, тогда каждую пару Y чистых стратегий первого и второго игроков можно представить в виде единичных векторов:

$$p_i = (0;\quad ...;\quad 0;\quad 1;\quad 0;\quad ...;\quad 0);$$

i-е место

$$q_j = (0;\quad ...;\quad 0;\quad 1;\quad 0;\quad ...;\quad 0).$$

j-е место

2А+Б69 (*Платежная функция*). Применяя смешанные стратегии, игроки выбирают свои чистые стратегии случайно и независимо друг от друга, и, таким образом, случайной становится величина выигрыша (проигрыша): $f(p;\ q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$ – *плата* (*платежная функция*) игры с платежной матрицей $\left[a_{ij}\right]_{m \times n}$.

2А+Б70 (*Оптимальные смешанные стратегии*). Смешанные стратегии $p^* = (p_1^*,\ p_2^*,\ ...,\ p_m^*);\ q^* = (q_1^*,\ q_2^*,\ ...,\ q_n^*)$ называются *оптимальными*, если для произвольных стратегий $p = (p_1,\ p_2,\ ...,\ p_m);\ q = (q_1,\ q_2,\ ...,\ q_n)$ выполняется условие:

$$f(p;\ q^*) \leq f(p^*;\ q^*) \leq f(p^*;\ q),$$

т. е. точка $(p^*;\ q^*)$ является седловой точкой функции $f(p;\ q)$.

Использование в игре оптимальных смешанных стратегий обеспечивает первому игроку выигрыш, не меньший, чем при использовании им любой другой стратегии p, второму игроку –

проигрыш, не больший, чем при использовании им любой другой стратегии q.

2А+Б71 (*Оптимальное решение*). Значение платежной функции при оптимальных стратегиях определяет цену игры v, т. е. $f(p^*;\, q^*) = v$, причем $\alpha \le v \le \beta$. Совокупность оптимальных стратегий и цены игры составляет *решение игры*.

2А+Б72 (*Теорема о минимаксе*) (см. с. 218 учебника [1]). В смешанных стратегиях любая конечная матричная игра имеет седловую точку, причем $\min\limits_{q}\max\limits_{p} f(p;\, q) = \max\limits_{p}\min\limits_{q} f(p;\, q) = f(p^*;\, q^*)$, где $p^*,\ q^*$ – оптимальные смешанные стратегии игроков A и B соответственно.

2Б73 (*Теорема*). Для того чтобы смешанные стратегии p^* и q^* были оптимальными для игроков A и B в матричной игре $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ с ценой v, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \ge v,\ j = \overline{1,\, n};\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \le v,\ i = \overline{1,\, m}.$$

Таким образом, если игрок A применяет оптимальную смешанную стратегию p^*, а игрок B – любую чистую стратегию, то выигрыш игрока A будет не меньше цены игры v; если игрок B использует оптимальную смешанную стратегию q^*, а игрок A – любую чистую стратегию, то проигрыш игрока B не превысит цены игры.

2А+Б74 (*Активные стратегии*). Чистые стратегии игрока, входящие в его оптимальную смешанную стратегию с вероятностями, отличными от нуля, называются *активными стратегиями* игрока.

2Б75 (*Теорема*) (см. с. 219 учебника [1]). Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то его выигрыш остается неизменным и равным цене игры независимо от того, какую стратегию применяет другой игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий.

2А+Б76 (*Доминирование стратегий*). Решение игры можно существенно упростить, если своевременно выявить имеющееся в платежной матрице доминирование одних стратегий над другими, т. к. это позволит предварительно сократить размеры матрицы.

Игрок A заинтересован в максимизации выигрыша. Поэтому в платежной матрице сравниваем элементы строк s и t, а именно элементы a_{sj} с элементами a_{tj} для всех $j = \overline{1, n}$. Если $a_{sj} \ge a_{tj}$, $j = \overline{1, n}$, то выигрыш игрока A при стратегии A_s будет больше, чем при стратегии A_t, какую бы чистую стратегию не применил игрок B. В этом случае стратегия A_s доминирует над стратегией A_t. Стратегию A_s называют *доминирующей*, а стратегию A_t – *доминируемой*.

Поскольку игрок B заинтересован в минимизации проигрыша, доминирующим будет столбец с наименьшими элементами. Например, сравниваем элементы r-го и l-го столбцов: если $a_{ir} \ge a_{il}$, $i = \overline{1, m}$, то игроку B выгодно выбрать стратегию B_l, которая доминирует над стратегией B_r. Стратегия B_l называется *доминирующей*, а стратегия B_r – *доминируемой*.

2Б77 (*Теорема*) (см. с. 221 учебника [1]). Пусть I − игра, в матрице которой стратегия A_k игрока A доминирует над стратегией A_s, а I' − игра, матрица которой получена из матрицы игры I исключением s-й строки. Тогда: а) цена игры I' равна цене игры I; б) оптимальная смешанная стратегия $q^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$ игрока B в игре I' является также его оптимальной смешанной стратегией и в игре I; в) если $p^* = (p_1^*, ..., p_{s-1}^*, p_{s+1}^*, ..., p_m^*)$ − оптимальная смешанная стратегия игрока A в игре I', то его смешанная стратегия $p = (p_1, ..., p_{s-1}, 0, p_{s+1}, ..., p_m)$ является оптимальной в игре I.

Таким образом, если стратегия A_s доминирует над стратегией A_t, то вероятность применения последней в оптимальной смешанной стратегии p^* игрока A равна нулю, а поэтому t-ю строку можно исключить из платежной матрицы. Если стратегия B_l игрока B доминирует над стратегией B_r, то r-й столбец можно исключить из платежной матрицы.

2А+Б78 (*Дублирование стратегий*). Если в матричной игре имеем строки (столбцы) с одними и теми же элементами, то такие строки (столбцы), а соответственно, и стратегии игроков A и B называются *дублирующими*.

В матричной игре доминируемые и дублирующие строки (столбцы) можно опускать, что не влияет на решение игры, но позволяет уменьшить размерность платежной матрицы.

2Б79 (*Теорема*) (см. с. 119 учебника [2]). Оптимальные смешанные стратегии p^* и q^* игроков A и B соответственно в матричной игре $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ с ценой v будут оптимальными и в матричной игре $\left[ba_{ij} + c\right]_{m\times n}$ с ценой $v' = bv + c$, где $b > 0$.

Поскольку оптимальные смешанные стратегии игроков в результате упрощений платежной матрицы не меняются, то все получаемые в процессе преобразований матрицы называют *эквивалентными*.

2.4.3. Решение матричных игр 2×2

2А+Б80 (*Сведение матричной игры к системе линейных алгебраических уравнений*). Игра 2×2 является наиболее простым случаем конечных матричных игр. В этой игре каждый из игроков обладает только двумя стратегиями.

Рассмотрим матричную игру 2×2 (табл. 4).

Таблица 4

Матричная игра 2×2

Стратегии A	Стратегии B	
	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Если игра 2×2 имеет седловую точку, то ее решение очевидно.

Предположим, что игра не имеет седловой точки, т. е. $\alpha \neq \beta$. Требуется найти оптимальные смешанные стратегии игроков $p^* = (p_1^*,\ p_2^*)$ и $q^* = (q_1^*,\ q_2^*)$, а также цену игры v.

Очевидно, что в игре 2×2, не имеющей седловой точки, обе стратегии игроков являются активными. Поэтому если игрок A будет применять свою оптимальную смешанную стратегию, то, независимо от действий игрока B, выигрыш его будет равен цене игры v (теорема 2Б75).

Игрок A будет применять стратегию A_1 с вероятностью p_1 и стратегию A_2 с вероятностью p_2. Если игрок B отвечает своей стратегией B_1, то выигрыш игрока A определяется из уравнения:

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v.$$

Если же игрок B будет применять стратегию B_2, то выигрыш игрока A не изменится и будет определяться равенством:

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v.$$

Учитывая условие $p_1 + p_2 = 1$, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем оптимальное решение для игрока A: $p^* = (p_1^*,\ p_2^*)$ и цену игры v.

Аналогично определяется оптимальная стратегия игрока B из системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{21}q_2 = v, \\ a_{12}q_1 + a_{22}q_2 = v, \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, матричная игра сведена к системе линейных уравнений.

2А+Б81 (*Графическое решение игр вида* (2×*n*) *и* (*m*×2)). Графический метод применим к играм, в которых хотя бы один игрок имеет только две стратегии. Рассмотрим игру $2\times n$ (табл. 5).

Таблица 5

Игра вида 2×*n*

Первый игрок (A)	Второй игрок (B)			
	q_1	q_2	...	q_n
$p_1 = p$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
$p_2 = 1 - p$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}

Предположим, что игра не имеет седловой точки. Введем обозначения: $p = p_1$ – вероятность применения первым игроком 1-й стратегии; p_2 – вероятность применения первым игроком 2-й стратегии, причем $p_2 = 1 - p$; q_1 – вероятность применения вторым игроком 1-й стратегии; q_2 – вероятность применения вторым игроком 2-й стратегии и т. д.; q_n – вероятность применения вторым игроком n-й стратегии.

Ожидаемый выигрыш первого игрока при применении вторым игроком 1-й стратегии составит:

$$v_1^p = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = a_{11}p + a_{21}(1-p) = (a_{11} - a_{21})p + a_{21}.$$

Аналогично найдем ожидаемые выигрыши первого игрока при применении вторым игроком 2, 3, ..., n-й стратегий. Полученные данные поместим в табл. 6.

Таблица 6

Ожидаемые выигрыши первого игрока

Чистые стратегии второго игрока	Ожидаемые выигрыши первого игрока
1	$v_1^p = (a_{11} - a_{21})p + a_{21}$
2	$v_2^p = (a_{12} - a_{22})p + a_{22}$
...	...
n	$v_n^p = (a_{1n} - a_{2n})p + a_{2n}$

Из табл. 6 видно, что ожидаемый выигрыш первого игрока линейно зависит от p_1. На плоскости Opv построим графики ожидаемых выигрышей первого игрока, которые представляют собой прямые, проходящие через точки (0; a_{2i}) и (1; a_{1i}), $i = \overline{1,\ n}$.

Первый игрок должен выбирать стратегии, позволяющие максимизировать его минимальный ожидаемый выигрыш. Поэтому оптимальная стратегия первого игрока определяется как точка пересечения прямых, максимизирующих его минимальный ожидаемый выигрыш. Поскольку игрок A может рассчитывать только на выигрыш $v = \overline{v}(p) = \min\{v_1(p),\ ...,\ v_n(p)\}$, то на плоскости Opv рисуем график зависимости $v = \overline{v}(p)$ и находим наивысшую точку $v = \overline{v}(p^*) = \max\limits_{p \in [0;1]} \overline{v}(p)$ на этом графике, ордината которой выражает цену игры v, а стратегия $(p^*,\ 1 - p^*)$ является оптимальной смешанной стратегией игрока A.

Аналогично определяется оптимальная стратегия второго игрока. Она находится как точка пересечения прямых, минимизирующих его максимальные ожидаемые проигрыши.

2.4.4. Статистические игры

2А+Б82 (*Статистическая игра*). Под *статистической игрой* (*игрой с природой*) будем понимать парную матричную игру, в которой один игрок заинтересован в наиболее выгодном для него исходе игры, а второй игрок (природа) безразличен к результату игры.

В отличие от матричных игр, в которых участвуют два игрока с противоположными интересами (один игрок старается максимизировать плату, а другой – минимизировать), в реальных задачах, приводящихся к игровым, зачастую имеется неопределенность, вызванная отсутствием информации об условиях, в которых осуществляется действие (погода, покупательский спрос и т. д.) и которые не зависят от сознательных действий другого игрока. Такие игры относят к играм с природой. Сознательный игрок в играх с природой старается действовать осмотрительно, второй игрок (природа, покупательский спрос и т. д.) действует случайно.

2А+Б83 (*Платежная матрица в статистической игре*). Предположим, что в игре с природой сознательный игрок A может использовать m чистых стратегий: $A_1, A_2, \ldots, A_m$, а природа П может реализовать n различных состояний: $П_1, П_2, \ldots, П_n$. Игроку A могут быть известны вероятности $q_1, q_2, \ldots, q_n$, с которыми природа реализует свои состояния, но он может и не знать их.

Действуя против природы, игрок A имеет возможность использовать как чистые стратегии A_i, так и смешанные стратегии. Если игрок A в состоянии оценить (величиной a_{ij}) последствия применения каждой своей чистой стратегии A_i при каждом состоянии $П_j$ природы, то игру можно задать матрицей:

$$A_{m\times n} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ \ldots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} П_1 & \ldots & П_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array},$$

которая называется *платежной*.

2А+Б84 (*Решение статистической игры*). Решение статистической игры состоит из следующих этапов:

84.1) выявление и отбрасывание дублирующих и доминируемых стратегий лица, играющего с природой; стратегии природы отбрасывать нельзя;

84.2) построение и исследование матрицы рисков;

84.3) оценка выигрыша при различных игровых ситуациях: критерии Вальда, Байеса, Сэвиджа и Гурвица и др.;

84.4) вывод о выборе наилучшей стратегии.

Игры с природой, хотя и являются частным случаем парных матричных игр, обладают и некоторыми особенностями. Например, при упрощении платежной матрицы отбрасывать те или иные состояния природы нельзя, т. к. она может реализовать любое состояние, независимо от того, выгодно оно игроку A или нет. Кроме того, решение достаточно найти только для игрока A, поскольку природа в «рекомендациях» не нуждается. Также в играх с природой смешанные стратегии имеют ограниченное значение: они приобретают смысл только при многократном повторении игры.

Таким образом, цель решения статистической игры заключается в определении такой стратегии сознательного игрока (чистой или смешанной), которая при ее применении обеспечила бы наибольший выигрыш.

2А+Б85 (*Матрица рисков*). *Риском* r_{ij} игрока A, когда он пользуется чистой стратегией A_i при состоянии $П_j$ природы, называется разность между максимальным выигрышем, который он мог бы получить, если бы точно знал, что природой будет реализовано именно состояние $П_j$, и тем выигрышем, который он получит, используя стратегию A_i:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij} \geq 0,$$

где $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$ − максимальный элемент j-го столбца платежной матрицы. Элементы матрицы рисков (табл. 7), соответствующие стратегиям A_i и $П_j$, характеризуют общую благоприятность или неблагоприятность для игрока A отдельных состояний природы.

Таблица 7

Матрица рисков

Стратегии A	Стратегии П			
	$П_1$	$П_2$	...	$П_n$
A_1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1n}
A_2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2n}
…	…	…	…	
A_m	r_{m1}	r_{m2}	…	r_{mn}

2А+Б86 (*Критерии для принятия решений в статистических играх*). Для принятия решений в статистических играх используются следующие критерии:

86.1) *критерий Байеса* − критерий, основанный на известных вероятностях условий. Если известны вероятности q_j состояний $П_j$ природы, то пользуются *критерием Байеса*, в соответствии с которым оптимальной считается чистая стратегия A_i, при которой максимизируется средний выигрыш $\overline{a} = \max_i \overline{a}_i = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$. Следует отметить, что в этом случае игроку A нет смысла пользоваться смешанными стратегиями. Применение в игре с природой любой смешанной стратегии p не увеличивает выигрыш игрока A, получаемый при оптимальной чистой стратегии;

86.2) *принцип недостаточного основания Лапласа*. Если объективные оценки состояний природы получить невозможно, то вероятности состояний природы могут быть оценены субъективно на основе *принципа недостаточного основания Лапласа*, согласно которому все состояния природы полагаются равновероятными, т. е. $q_1 = ... = q_n = 1/n$, и оптимальной считается чистая стратегия A_i, обеспечивающая максимальное среднее значение выигрыша:

$$\max_i \overline{a}_i = \frac{1}{n} \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij};$$

86.3) *максиминный критерий Вальда*. По этому критерию рекомендуется применять максиминную стратегию. Она выбирается из условия $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$, $i = \overline{1,\ m}$; $j = \overline{1,\ n}$. Критерий является пессимистическим: считается, что природа будет действовать наихудшим для сознательного игрока образом;

86.4) *критерий максимума*. Оптимальная стратегия выбирается из условия $m = \max_i \max_j a_{ij}$, $i = \overline{1,\ m}$; $j = \overline{1,\ n}$. Критерий является оптимистическим: считается, что природа будет играть наиболее благоприятно для сознательного игрока;

86.5) *критерий Гурвица*. Критерий рекомендует стратегию, определяемую по формуле $s = \max_i \left\{ \lambda \min_j a_{ij} + (1 - \lambda) \max_j a_{ij} \right\}$, $i = \overline{1,\ m}$; $j = \overline{1,\ n}$, где λ (степень оптимизма) изменяется в диапазоне [0; 1].

Критерий придерживается некоторой промежуточной позиции, учитывающей возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения природы. При $\lambda = 1$ критерий превращается в критерий Вальда; при $\lambda = 0$ – в критерий максимума. На величину λ оказывает влияние степень ответственности лица, принимающего решение по выбору стратегии. Чем хуже последствия ошибочных решений, больше желание подстраховаться, тем степень оптимизма λ

ближе к единице. В общем случае число λ выбирают из опыта или субъективных соображений;

86.6) *критерий Сэвиджа*. Суть критерия состоит в выборе стратегии, позволяющей не допустить чрезмерно высоких потерь, к которым она может привести. Согласно этому критерию, рекомендуется выбирать ту стратегию, при которой в наихудших условиях величина риска принимает наименьшее значение: $r = \min_i \max_j r_{ij}$ – оптимальная стратегия, где r_{ij} – элементы матрицы рисков.

Лекция 12

2.5. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

2.5.1. Основные понятия

2А87 (*Запасы предприятия*). Для нормального функционирования предприятия и фирмы обычно имеют различные запасы: сырье, основные и вспомогательные материалы, полуфабрикаты (комплектующие изделия, готовая продукция, предназначенная для продажи, и т. д.). Совокупность подобных материалов, представляющих временно не используемые экономические ресурсы, называют *запасами предприятия*. Другими словами, под запасом понимается все, на что имеется спрос и что временно выключено из производства.

Рассмотрим простейшие математические модели управления запасами. На рис. 2 представлены возможные графики изменения запаса Q, имеющегося на складе, во времени t, для которого рассматривается этот запас.

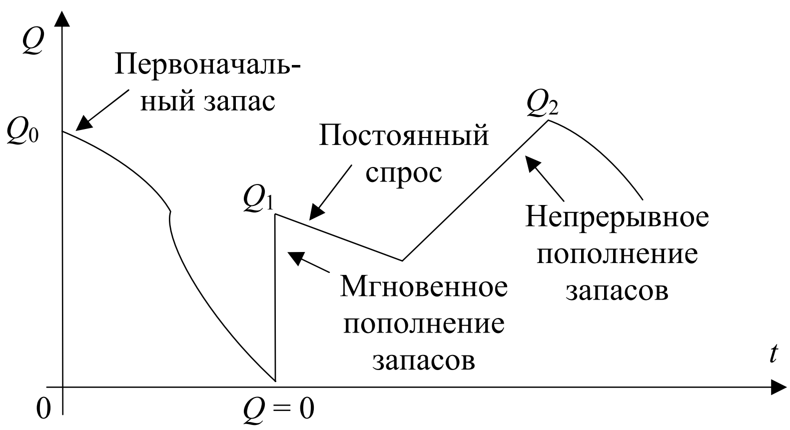


Рис. 2. График изменения запасов

Под Q будем понимать количество изделий или материалов (товаров) только одного вида. Если на изделие поступает заявка, то оно отпускается, и значение Q падает. Предположим, что величина спроса непрерывна во времени. Если $Q = 0$, то имеет место дефицит.

2А88 (*Виды издержек*). Любая математическая модель, которая применяется для изучения определенной ситуации в управлении запасами, должна учитывать факторы, связанные с издержками. Различают следующие виды издержек:

88.1) *организационные издержки* – расходы, связанные с оформлением и доставкой товаров;

88.2) *издержки содержания запасов* – затраты, связанные с хранением. Они возникают из-за амортизации в процессе хранения (изделия могут портиться, устаревать, их количество может уменьшаться и т. д.);

88.3) *издержки, связанные с дефицитом*: если поставка со склада не может быть выполнена, то возникают дополнительные издержки, связанные с отказом (денежный штраф или ущерб, не осязаемый непосредственно, например ухудшение бизнеса в будущем и потеря потребителей);

88.4) *издержки, связанные с приобретением запасов*. Их учитывают, если цена единицы продукции зависит от величины партии. Количество товара, поставляемое на склад, называют *размером партии*.

2Б+С89 (*Виды задач управления запасами*). Многообразием реальных ситуаций вызвана необходимость рассмотрения огромного числа вариантов задач управления запасами. В зависимости от числа периодов, на которые планируются операции, различают задачи:

89.1) *статические* – рассматривается один период времени;

89.2) *динамические* – рассматривается несколько периодов времени (см. с. 21 издания [19]).

2Б+С90 (*Виды спроса*). Спрос на предметы потребления может быть (см. с. 47, 212 издания [19]):

90.1) *стационарным* или *нестационарным*;

90.2) *детерминированным* или *стохастическим*;

90.3) *непрерывно распределенным* или *дискретным*;

90.4) *зависящим от спроса на другие товары* или *независимым*.

2Б+С91 (*Пополнение запасов*). Пополнение запасов, как правило, происходит с некоторой случайной задержкой относительно момента выдачи требования (подробнее см. с. 133 учебного издания [19]):

91.1) *мгновенная поставка*;

91.2) *задержка поставок на фиксированный срок*;

91.3) *задержка поставок на случайный интервал времени* (распределенный по известному вероятностному закону).

Задача управления запасами состоит в определении объемов поставок и периодичности заказов, при которых издержки (функция затрат) принимают минимальное значение.

2.5.2. Основная модель управления запасами

2А92 (*Обозначения*). Введем обозначения величин, необходимых для составления модели. Данные поместим в табл. 8.

Таблица 8

Основные обозначения

Величина	Обозначение	Единица измерения	Предположения
Интенсивность спроса	ν	Единиц товара в единицу времени	Спрос постоянен и непрерывен; весь спрос удовлетворяется
Организационные издержки	k	Денежных единиц за одну поставку	Издержки постоянны, не зависят от размера партии
Стоимость товара	s	Денежных единиц за единицу товара	Цена единицы товара постоянна; рассматривается один вид товара
Издержки содержания запасов	h	Денежных единиц за единицу товара в единицу времени	Стоимость хранения единицы товара в течение периода времени постоянна
Размер партии	q	Единиц товара в одной партии	Размер партии постоянен; поступление товара происходит мгновенно, как только уровень запаса равен нулю

2А93 (*График изменения запасов*). График изменения запасов представлен на рис. 3.

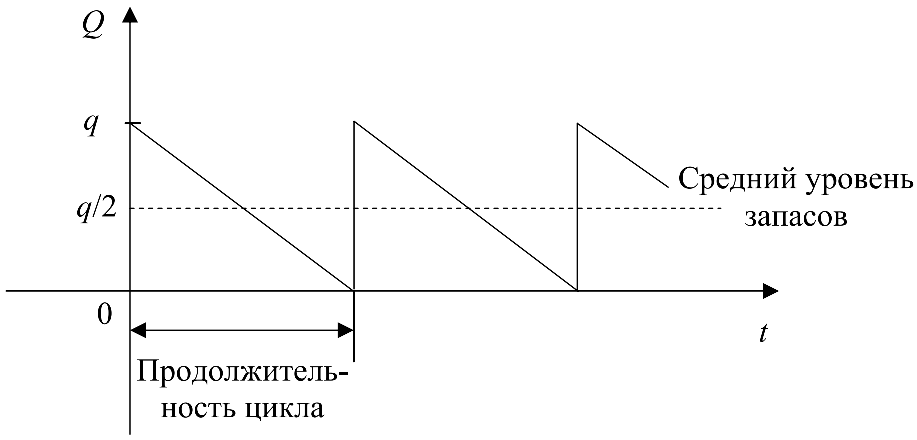


Рис. 3. График изменения запасов

2А+Б94 (*Уравнение издержек*). Чтобы полностью удовлетворить спрос ν при размере поставки q, необходимо обеспечить ν/q поставок или партий в единицу времени. Средний уровень запасов составляет $q/2$. Уравнение издержек имеет вид:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = \frac{k\nu}{q} + s\nu + \frac{hq}{2},$$

где L_1 – организационные издержки; L_2 – стоимость товаров; L_3 – издержки содержания запасов. За исключением q все величины в правой части постоянны и известны, т. е. $L = f(q)$. Для нахождения минимума L найдем производную $\frac{dL}{dq}$ и приравняем ее к нулю: $\frac{dL}{dq} = -\frac{k\nu}{q^2} + \frac{h}{2} = 0,$ откуда

$$q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2k\nu}{h}},$$

где $q_{\text{опт}}$ – оптимальный размер партии. Полученное равенство называется *формулой Уилсона*.

2.5.3. Модель производственных запасов

2А+Б95 (*Понятие о модели производственных запасов*). В основной модели предполагали, что поступление товаров на склад происходит мгновенно, например, в течение одного дня. Рассмотрим случай, когда готовые товары поступают на склад непосредственно с производственной линии. Будем считать, что поступление товаров происходит непрерывно в течение некоторого промежутка времени. Модель задачи в этом случае называют *моделью производственных поставок.* Обозначим через λ скорость поступающего на склад товара. Эта величина равна количеству товаров, выпускаемых производственной линией за единицу времени. Остальные обозначения и предположения те же, что и для основной модели управления запасами. График модели производственных запасов представлен на рис. 4.

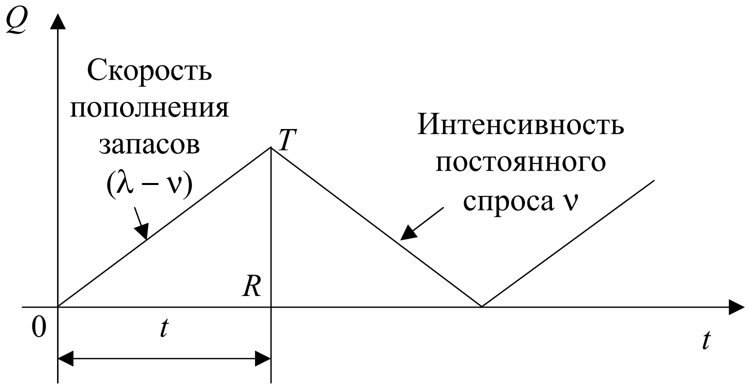


Рис. 4. График модели производственных запасов

2Б96 (*Уравнение издержек*). Определим оптимальный размер партии, минимизирующий общие затраты. Общие издержки в единицу времени, как и для основной модели, составляют:

$$L = L_1 + L_2 + L_3;$$

$$L_1 = \frac{k\nu}{q};\ L_2 = s\nu.$$

Для получения среднего уровня запасов следует учесть, что $RT = (\lambda - \nu)t$ − максимальный уровень запасов; $q = \lambda t$ − количество товаров в одной производственной поставке. Тогда средний уровень запасов составляет половину максимального:

$$\frac{(\lambda - \nu)q}{2\lambda}.$$

В итоге имеем:

$$L = \frac{k\nu}{q} + s\nu + \frac{(\lambda - \nu)}{2\lambda}qh.$$

Решив уравнение $\frac{dL}{dq} = 0,$ найдем оптимальный размер партии модели производственных поставок:

$$q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2\lambda k \nu}{(\lambda - \nu)h}}.$$

2.5.4. Модель запасов, включающая штрафы

2А+Б97 (*Понятие о модели запасов, включающей штрафы*). Рассмотрим основную модель, допускающую возможность существования периодов дефицита, который покрывается при последующих поставках, и штрафов за несвоевременную поставку. Пусть предприятие должно поставить q единиц товара в течение каждого промежутка времени T; за единицу времени поставляется ν единиц товара ($q = T\nu$).

Предположим, что в начале каждого периода T предприятие делает запас, равный S. Это означает, что в течение периода может наблюдаться дефицит товара, и некоторое время поставки могут не осуществляться. Невыполненные заявки будут накапливаться до максимальной величины $q - S$ и удовлетворятся, как только поступит следующая партия товаров в количестве q.

За то, что товары доставляются предприятием позже необходимого срока, на предприятие налагается штраф, который зависит от того, насколько была задержана поставка. Такая модель целесообразна, т. к. иногда выгоднее заплатить штраф, чем расходовать дополнительные средства на хранение запасов, превышающих величину S.

График изменения запасов модели представлен на рис. 5.

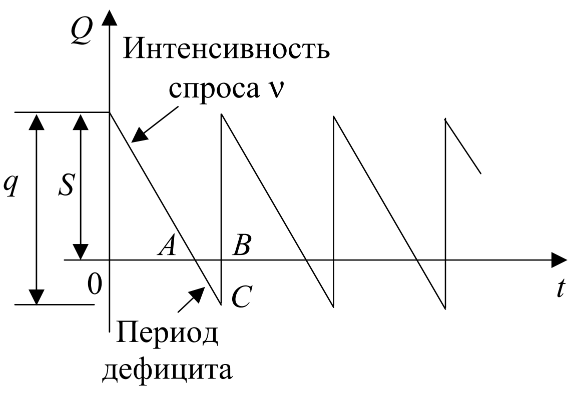


Рис. 5. График изменения запасов модели, включающей штрафы

2Б98 (*Уравнение издержек*). Задача управления запасами состоит в том, чтобы выбрать такое значение S, которое ведет к минимизации затрат, включая затраты на хранение и штрафы.

Для определения оптимального значения S введем обозначения: h – издержки хранения единицы товара за единицу времени; λ – затраты на штраф в расчете на единицу товара за один день отсрочки.

Найдем издержки одного цикла:

$$L = L_1 + L_2,$$

где L_1 – общие издержки содержания запасов; L_2 – общие затраты на штраф.

Так как товары находятся на складе в течение периода OA (см. рис. 5), средний уровень запасов за этот период равен $S/2$. Если продолжительность периода OA равна S/ν, то

$$L_1 = h\frac{S}{2}\frac{S}{\nu} = \frac{hS^2}{2\nu}.$$

Так как штраф выплачивается в течение периода $AB = \frac{q-S}{\nu}$, общее число дней, на которые налагается штраф, равно площади треугольника ABC:

$$\frac{(q-S)}{\nu}\frac{(q-S)}{2},$$

откуда

$$L_2 = \frac{\lambda(q-S)^2}{2\nu}.$$

Окончательно имеем:

$$L = \frac{hS^2}{2\nu} + \frac{\lambda(q-S)^2}{2\nu}.$$

Найдем $\frac{dL}{dS}$ и, решив уравнение $\frac{dL}{dS} = 0,$ получим оптимальное значение запаса:

$$S_{\text{опт}} = \frac{\lambda q}{(h+\lambda)}.$$

Взяв $S_{опт}$ в качестве уровня запасов в начале каждого цикла при условии, что невыполненные заявки будут удовлетворены, сведем суммарные расходы L к минимуму:

$$L_{\min} = \frac{q^2 h\lambda}{2\nu(h+\lambda)}.$$

2.5.5. Точка заказа

2А+Б99 (*Понятие о точке заказа*). В реальных задачах следует учитывать время выполнения заказа θ. Для бесперебойного снабжения заказ должен подаваться в момент, когда уровень запаса достаточен для удовлетворения потребности на время выполнения заказа. Этот уровень называется *точкой возобновления заказа* (*точкой заказа*) и обозначается r, т. е. точка заказа – это нижний уровень, по которому должны заказывать новую партию.

2Б100 (*Нахождение точки заказа*). Для систем, в которых дефицит не допускается, заказ должен размещаться в момент, когда величина наличного запаса равна:

$$r = \theta\nu - \left[\frac{\theta}{\tau^*_{опт}}\right] q_{опт},$$

где $\left[\frac{\theta}{\tau^*_{опт}}\right]$ – целая часть числа $\frac{\theta}{\tau^*_{опт}}$; $\tau^*_{опт}$ – оптимальный интервал между поставками.

Для бездефицитной работы системы нужно иметь начальный запас $I_0 = \theta\nu$. Если I – фактический запас, то для непрерывной работы необходимо, чтобы выполнялось неравенство $I \geq \theta\nu$. Время потребления фактического запаса $\frac{I}{\nu}$. Чтобы заказанная партия прибыла ко времени полного исчерпания, ее нужно размещать в момент $t_0 = \frac{I}{\nu} - \theta$, а все остальные заказы нужно размещать в моменты

$$t_k = \left(\frac{I}{\nu} - \theta\right) + k\tau_{опт},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Для систем с дефицитом точка заказа определяется по следующей формуле:

$$r = \theta\nu - \left[\frac{\theta}{\tau^*_{\text{опт}}}\right] q_{\text{опт}} - S_{\text{опт}}.$$

Лекция 13

2.6. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

2.6.1. Основные понятия

2А101 (*Понятие о сетевом планировании*). Современное сетевое планирование начинается с разбиения программы работ на операции. Далее определяются оценки продолжительности операций и строится сетевая модель (график). Построение сетевой модели позволяет проанализировать все операции и внести улучшения в структуру модели до начала ее реализации. Затем строится календарный график (план), определяющий начало и окончание каждой операции, а также взаимосвязи с другими операциями графика. Календарный график выявляет критические операции, которым надо уделять особое внимание, чтобы закончить все работы в директивный срок. Что касается некритических операций, то календарный план позволяет определить резервы времени, которые можно выгодно использовать при задержке выполнения работ, а также для эффективного применения как трудовых, так и финансовых ресурсов.

2А+Б102 (*Сетевая модель, сетевой график*). *Сетевая модель* – графическое изображение плана выполнения комплекса работ, состоящее из нитей (работ) и узлов (событий), которые отражают логическую взаимосвязь всех операций. В основе методов сетевого планирования и управления (СПУ) лежит графическое представление проекта в виде сетевого графика. Сетевой график можно рассматривать как совокупность G некоторых точек E_1, E_2, ..., E_n и связей $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ между этими точками, т. е. $G = (E; \vec{e})$. Объект G называется *графом*, точки $E_1, E_2, ..., E_n$ – его *вершинами*, связи между ними $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ – *ребрами* (*дугами*). Если в паре вершин $(E_i; E_j)$ указано направление связи, т. е. какая из них является первой, то соединяющий их отрезок называется *дугой*; если же ориентация не указана – *ребром*. Граф $G = (E; \vec{e})$ считается заданным, если заданы все его вершины и дуги. Ориентация дуг, т. е. указание «начала» и «конца» каждой из них, делает граф *ориентированным* (*орграфом*). Сетевой график – это ориентированный граф. Будем отождествлять вершины орграфа с событиями, а дуги – с работами. События и работы – основные понятия в СПУ. Исследование таких сетей проводится методами теории графов. Теория графов оперирует понятием пути, объединяющим последовательность взаимосвязанных ребер. Контур означает такой путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной.

2А103 (*Основные понятия сетевой модели*). *Работа* – это любые операции, трудовые процессы, сопровождающиеся затратами ресурсов или времени. Это активный процесс, требующий затрат ресурсов, либо пассивный (ожидание), приводящий к достижению намеченного результата. На сетевых графиках работы изображают стрелками. Рядом со стрелкой указывают числовые характеристики: время выполнения работы, расход ресурса, количество исполнителей и т. д. Под работами подразумеваются не только реальные хозяйственные или технологические процессы, требующие затрат времени и ресурсов для их осуществления, но и процессы, потребляющие только время. Также принято считать работами и те процессы, которые не требуют затрат ни времени, ни ресурсов. Это так называемые *фиктивные работы*. Они показывают, что определенная работа не может совершаться раньше другой. На сетевых графиках фиктивные работы изображают пунктирными стрелками.

Событие – это результат (промежуточный или конечный) выполнения одной и/или нескольких предшествующих работ. *Событие* означает факт окончания всех работ, в него входящих, и/или начала работ, из него выходящих. Оно не имеет протяженности во времени. На сетевом графике события изображаются кружками с указанием номера события. В каждое событие может входить и выходить из него несколько работ, а каждая работа ограничена двумя событиями. Событие выражает логическую связь между работами, заключающуюся в том, что работы, входящие в это событие, непосредственно предшествуют работам, выходящим из него; ни одна выходящая из данного события работа не может начинаться до окончания всех работ, входящих в него.

Событие, с которого начинается выполнение работ, является *исходным*; оно не имеет предшествующих работ. Событие, которое констатирует факт завершения проекта, называется *завершающим*; оно не имеет последующих работ. Все прочие события являются *промежуточными*.

2Б104 (*Правила построения сетевых графиков*). Прежде чем представить проект сетевым графиком, необходимо составить перечень работ, оценить продолжительность каждой из них и установить последовательность работ, т. е. точно определить, какие работы обязательно должны быть закончены, чтобы могла начаться любая из работ, входящих в проект (сетевой график). Такой перечень удобно представить в виде структурно-временной таблицы. При построении сетевых графиков следует соблюдать определенные правила, в частности:

104.1) сеть изображается слева направо, и каждое событие с большим порядковым номером изображается правее предыдущего. Общее направление стрелок, изображающих работы, также в основном должно быть расположено слева направо, при этом каждая работа должна выходить из события с меньшим номером и входить в событие с большим номером;

104.2) в сетевых графиках не должно быть «тупиков», т. е. событий, из которых не выходит ни одной работы (за исключением завершающего события);

104.3) в сетевых графиках не должно быть событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа;

104.4) при построении сетевых графиков нельзя допускать, чтобы два смежных события были связаны двумя или большим количеством работ, что чаще всего бывает при изображении параллельно выполняемых работ; для изображения параллельных работ вводятся промежуточное событие и фиктивная работа;

104.5) в сети не должно быть замкнутых цепей, т. е. цепей, соединяющих некоторые события с ними же самими;

104.6) если какие-либо сложные работы могут быть начаты до полного окончания непосредственно предшествующей им работы, то последняя изображается как ряд последовательно выполняемых работ, каждая из которых завершается определенным событием;

104.7) если для выполнения одной из работ необходимо получение результатов всех работ, входящих в предшествующее ей событие, а для другой работы достаточно получить результат только одной или нескольких из этих работ, то должно быть дополнительно введено новое событие, отражающее результаты только этих последних работ, а также фиктивная работа, связывающая новое событие с прежним.

Построенный с соблюдением этих правил график является сетевой моделью выполнения проекта.

2Б105 (*Нумерация событий*). После построения сетевой модели необходимо пронумеровать входящие в нее события. Для правильной нумерации событий можно воспользоваться графическим способом упорядочения вершин графа по рангам (методом вычеркивания дуг):

105.1) исходную вершину (в которую не входит ни одна дуга) отнесем к нулевому рангу и присвоим ей номер 1;

105.2) вычеркнем все дуги, выходящие из вершины 1, и отнесем события, оказавшиеся без входящих дуг, к первому рангу. Этим событиям присвоим в произвольном порядке номера 2, 3, ..., k_1;

105.3) вычеркнув все дуги, выходящие из вершины предыдущего ранга i, отнесем вершины, оказавшиеся без входящих дуг, к следующему $(i + 1)$-му рангу. Присвоим им номера $k_i + 1, ..., k_{i+1}$. Этот шаг повторяем до тех пор, пока все вершины не будут пронумерованы.

2А+Б106 (*Путь, критический путь*). Любая последовательность работ сети, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы, называется *путем*. Под *длиной пути* $(i; j_1), (j_1; j_2), ..., (j_k; j)$ из события i в событие j будем понимать продолжительность выполнения всей последовательности работ, составляющих этот путь: $t_{i,j_1} + t_{j_1,j_2} + \ldots + t_{j_k,j}$. Путь, в котором начальная вершина совпадает с исходным событием, а конечная – с завершающим, называется *полным*. Путь от исходного события до любого промежуточного события i называется *предшествующим событию i путем*. Предшествующий событию i путь, имеющий наибольшую длину, будет *максимальным предшествующим.* Он обозначается $L_1(i)$, а его продолжительность – $t[L_1(i)]$. Путь от данного события i до завершающего события называется *последующим путем*. Такой путь с наибольшей длиной будет *максимальным последующим*. Он обозначается $L_2(i)$, его продолжительность – $t[L_2(i)]$. *Критическим* называется полный путь, имеющий наибольшую продолжительность. Таких путей в сети может быть несколько. *Критический путь* – это путь, не имеющий резервов и включающий самые напряженные работы комплекса. На сетевом графике критический путь выделяется двойной или жирной линией.

2А107 (*Критические работы*). Работы и события, принадлежащие критическому пути, называются *критическими*. Все остальные работы являются некритическими (ненапряженными) и обладают резервами времени, которые позволяют передвигать сроки их выполнения, не влияя на общую продолжительность выполнения всего комплекса работ.

2А+Б108 (*Критическое время*). Суммарная продолжительность работ, принадлежащих критическому пути, называется *критическим временем* $t_{кр}$ выполнения всего комплекса работ. Продолжительность выполнения работ устанавливается на основании действующих нормативов или по экспертным оценкам специалистов. В первом случае временные оценки являются детерминированными (однозначными), во втором – вероятностными.

2.6.2. Временные параметры сетевого графика

2А+Б109 (*Основные временные параметры событий*). Основным временным параметром сетевого графика является *продолжительность критического пути*. Расчет критического пути включает два этапа. Первый называется *прямым проходом*. Вычисления начинают с исходного события и продолжают до тех пор, пока не будет достигнуто завершающее событие. Для каждого события определяется ранний срок его наступления. На втором этапе, называемом *обратным проходом*, вычисления начинают с завершающего события и продолжают до тех пор, пока не будет достигнуто исходное событие. Для каждого события вычисляется поздний срок его наступления. Основные временные параметры событий:

109.1) *ранний срок* $t_р(i)$ *свершения события* i – самый ранний момент времени, к которому завершаются все предшествующие этому событию работы, т. е.

$$t_р(i) = t[L_1(i)];$$

109.2) *поздний срок* $t_п(i)$ *свершения события* i – самый поздний момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для завершения всех работ, следующих за этим событием, без превышения критического времени $t_{кр}$. Очевидно, что $t_п(i)$ определяется разностью между $t_{кр}$ и длиной максимального из последующих путей:

$$t_п(i) = t_{кр} - t[L_2(i)].$$

Для событий критического пути ранний и поздний сроки свершения событий совпадают;

109.3) разность между поздним и ранним сроками свершения события, составляющая *резерв времени события*

$$R(i) = t_п(i) - t_р(i).$$

Резервы критических событий равны нулю.

2А+Б110 (*Четырехсекторная схема расчетов*). При расчете временных параметров вручную удобно проводить вычисления непосредственно на графе, воспользовавшись четырехсекторной схемой. В этом случае каждый кружок, обозначающий событие, делим на четыре сектора, в каждом из которых записываем следующую информацию:

110.1) проставляем в верхних секторах номера событий (в соответствии с ранжированием);

110.2) рассматривая события в порядке возрастания номеров, по входящим в данное событие работам определяем $t_р(i)$ и записываем в левом секторе;

110.3) начиная с конечного события, для которого $t_п(n) = t_р(n) = t_{кр}$ (n – номер конечного события), для каждого события по выходящим из него работам определяем $t_п(i)$ и записываем в правом секторе;

110.4) в нижнем секторе записываем резерв времени события $R(i)$ (рис. 6).

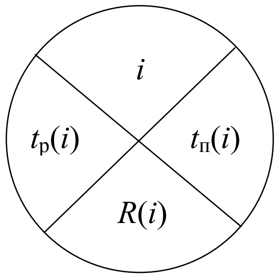


Рис. 6. Четырехсекторная схема расчета

2А+Б111 (*Основные временные параметры работ*). Зная сроки свершения событий, можно определить *временные параметры работ*:

111.1) *ранний срок начала работы* $(i; j)$, который равен раннему сроку свершения события i:

$$t'_р(i; j) = t_р(i);$$

111.2) *ранний срок окончания работы* $(i;\ j)$, который равен сумме раннего срока свершения ее начального события и продолжительности работы:

$$t''_{\text{р}}(i;\ j) = t_{\text{р}}(i) + t_{ij};$$

111.3) *поздний срок окончания работы* $(i; j)$, который совпадает с поздним сроком свершения ее конечного события:

$$t''_{\text{п}}(i;\ j) = t_{\text{п}}(j);$$

111.4) *поздний срок начала работы* $(i;\ j)$, который равен разности между поздним сроком свершения ее конечного события и продолжительностью работы:

$$t'_{\text{п}}(i;\ j) = t_{\text{п}}(j) - t_{ij}.$$

Так как сроки выполнения работ находятся в границах, определяемых $t'_{\text{р}}(i;\ j)$ и $t''_{\text{п}}(i;\ j)$, то они могут иметь разного вида резервы времени;

111.5) *полный резерв времени работы* – это максимально возможный запас времени, на который можно отсрочить начало работы или увеличить продолжительность ее выполнения при условии, что конечное для данной работы событие наступит не позднее своего позднего срока:

$$R_{\text{полн}}(i;\ j) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t_{ij}.$$

Таким образом, полный резерв времени работы есть максимальное время, на которое можно увеличить ее продолжительность, не изменяя продолжительности критического пути. Все некритические работы имеют полный резерв времени, отличный от нуля;

111.6) *независимый (свободный) резерв времени работы* – это запас времени, которым можно располагать при выполнении данной работы при условии, что ее начальное событие наступит в свой поздний срок, а конечное – в ранний срок:

$$R_{\text{нез}}(i;\ j) = t_{\text{р}}(j) - t_{\text{п}}(i) - t_{ij}.$$

Величина независимого резерва показывает продолжительность вынужденного ожидания наступления конечного события данной работы.

Следует отметить, что критические операции должны иметь нулевой полный резерв времени, при этом свободный резерв также должен быть равен нулю;

111.7) *частный резерв времени работы первого вида* $R'(i;\, j)$, который отличается от полного тем, что его использование на данной работе возможно без уменьшения резервов у предшествующих:

$$R'(i;\, j) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{п}}(i) - t_{ij};$$

111.8) *частный резерв времени работы второго вида* $R''(i;\, j)$, представляющий собой часть полного резерва, которая может быть использована для увеличения продолжительности данной работы или предшествующих ей работ без нарушения раннего срока наступления конечного события работы и без сокращения резервов времени у последующих работ:

$$R''(i;\, j) = t_{\text{р}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t_{ij}.$$

2.6.3. Построение линейного графика (графика Ганта). Учет потребностей в ресурсах

2А112 (*Построение графика Ганта*). На графике Ганта каждая работа $(i;\, j)$ изображается горизонтальным отрезком, длина которого в соответствующем масштабе равна времени ее выполнения. Начало каждой работы совпадает с ожидаемым сроком свершения ее начального события. Полный резерв времени работы изображается пунктирной линией. По графику Ганта можно определить критическое время выполнения комплекса работ и критический путь.

2А+Б113 (*Учет потребностей в ресурсах*). При решении задач СПУ для каждой из работ иногда задается количество ресурсов, необходимых для ее выполнения, т. к. одновременное выполнение некоторых операций из-за ограничений, связанных с рабочей силой, оборудованием и другими видами ресурсов, иногда оказывается невозможным. Именно в этом отношении представляют ценность полные резервы времени некритических операций.

Пусть r_{ij} – потребности в трудовых ресурсах для выполнения каждой работы (интенсивности использования ресурсов); R – наличие трудовых ресурсов. На основе сетевого графика составляем линейный график (график Ганта). На графике Ганта над каждой работой $(i;\, j)$ проставляем потребность в ресурсах r_{ij}.

Проецируем на ось времени начало и конец каждой работы. Проекцию, совпадающую с началом координат, обозначаем τ_0, следующую – τ_1 и т. д. В строке $\sum r_{ij}$ записываем сумму ресурсов r_{ij} для каждого периода выполнения проекта. Полученные $\sum r_{ij}$ наносим на график интенсивности использования ресурсов. Пунктирная линия на графике проводится на уровне R ограничения наличного ресурса.

2Б114 (*Оптимизация комплекса работ по ресурсам*). Под оптимальным распределением ресурсов понимается такое размещение работ во времени, при котором в любой момент было бы достаточно ресурса для выполнения работ, а время выполнения всего комплекса работ было бы минимальным. На практике широкое применение получили эвристические методы распределения ресурсов.

Алгоритм решения задачи:

114.1) нумеруем работы, расположенные над промежутком (τ_0; τ_1) на графике Ганта, в порядке возрастания их полных резервов. Работы с одинаковыми полными резервами времени нумеруем в порядке убывания интенсивностей;

114.2) суммируем последовательно интенсивности работ, расположенных над промежутком (τ_0; τ_1) в порядке возрастания присвоенных им номеров, и сравниваем полученные суммы с заданной величиной ресурса R. Все работы, сумма интенсивностей которых не превосходит R, оставляем в первоначальном положении. Если после прибавления интенсивности какой-нибудь работы окажется, что суммарное потребление ресурсов больше R, то эту работу сдвигаем вправо на величину рассматриваемого промежутка, переходим к добавлению интенсивности следующей работы и так продолжаем до тех пор, пока не будут просмотрены все работы, расположенные над промежутком (τ_0; τ_1). Результатом выполнения этого действия является новый график Ганта, момент τ_1 которого считаем началом оставшейся части комплекса работ;

114.3) предполагаем, что выполнено k шагов алгоритма и получен линейный график, момент τ_k которого является началом оставшейся части комплекса работ. Проецируем на ось времени начало и конец каждой работы, расположенной над промежутком (τ_k; $t_{\text{кр}}$), и обозначаем проекцию, ближайшую к τ_k, через τ_{k+1}. Таким образом, выделен новый промежуток (τ_k; τ_{k+1});

114.4) определяем полные резервы $R_{\text{полн}}(i; j)$ работ, расположенных над промежутком $(\tau_k; \tau_{k+1})$, и нумеруем их. Сначала нумеруем работы $(i; j)$, начатые левее момента τ_k, согласно возрастанию разностей между полными резервами этих работ и длительностями от начала до момента τ_{k+1}. Работы с одинаковыми разностями нумеруем в порядке убывания интенсивностей. Все остальные работы нумеруем в порядке возрастания их полных резервов, а с одинаковыми резервами − в порядке убывания интенсивностей;

114.5) эти действия выполняются так же, как и действие 114.2. Однако следует иметь в виду, что если сдвигу подлежит работа $(i; j)$, начатая левее τ_k, то сдвигаем всю работу, т. е. начало этой работы устанавливаем в момент τ_{k+1};

114.6) проверяем, все ли работы комплекса просмотрены. Если все, решение закончено, если нет, то возвращаемся к действию 114.1.

Отметим, что приведенный алгоритм не всегда позволяет найти оптимальное решение задачи, однако дает хорошее приближение к нему.

3. ПРАКТИКУМ

3.1. ЗАНЯТИЕ 4. МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Задачи для аудиторной работы

3А1. По условным данным двух отраслей – межотраслевым потокам и вектору конечной продукции:

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 14 & 6 \end{bmatrix};\ Y = \begin{bmatrix} 55 \\ 30 \end{bmatrix}$$

необходимо:

1) определить в плановом периоде вектор конечного использования при валовом выпуске

$$X_{\text{пл}} = \begin{bmatrix} 120 \\ 60 \end{bmatrix};$$

2) привести схему МОБ на плановый период.

3А2. По условным данным – матрице коэффициентов прямых затрат A и вектору $Y_{\text{пл}}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,1 & 0,2 \end{bmatrix};\ Y_{\text{пл}} = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \end{bmatrix}$$

требуется:

1) определить валовую продукцию каждой отрасли;

2) представить результаты в виде балансовой таблицы.

3А3. Для трех отраслей за отчетный период известны данные о межотраслевых потоках x_{ij} и вектор объемов конечного использования $Y_{\text{отч}}$ (табл. 9).

Таблица 9

Исходные данные

Отрасль	Межотраслевые потоки			$Y_{\text{отч}}$
	1	2	3	
1	80	15	75	80
2	10	60	55	225
3	10	80	30	30

Необходимо:

1) определить матрицу коэффициентов прямых затрат A;

2) определить матрицу «затраты – выпуск» $(E - A)$;

3) найти объемы конечного использования продукции $Y_{пл}$ при условии, что в плановом периоде задан валовой выпуск продукции: $X_{пл} = (300; 400; 200)$;

4) представить результаты в виде балансовой таблицы.

3Б4. Для развития трех отраслей в плановом году необходимо произвести 100 ед. валовой продукции II отрасли, а для I и III отраслей выпустить в сферу конечного потребления соответственно 44 и 10 ед. конечной продукции. Матрица коэффициентов прямых затрат известна:

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{bmatrix}.$$

Требуется рассчитать плановый межотраслевой баланс, привести числовую схему баланса и проанализировать полученные результаты.

Задачи для самостоятельной работы

3А5. По условным данным – матрице коэффициентов прямых затрат A и вектору $Y_{пл}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 \end{bmatrix};\ Y_{пл} = \begin{bmatrix} 150 \\ 300 \end{bmatrix}$$

требуется:

1) определить валовую продукцию каждой отрасли;

2) представить результаты в виде балансовой таблицы.

3А6. На основании данных за отчетный период (табл. 10) рассчитать коэффициенты прямых и полных затрат.

Таблица 10

Исходные данные

Отрасль	Межотраслевые потоки		Конечный продукт
	1	2	
1	8	24	48
2	16	36	68

Как изменятся валовые выпуски отраслей, если в плановом периоде производство конечной продукции I отрасли увеличится на 20 ед., а II отрасли – на 15 ед.?

3А7. Для трех отраслей за отчетный период известны данные о межотраслевых потоках x_{ij} и вектор объемов конечного использования $Y_{отч}$ (табл. 11, 12):

а) $X_{пл}$ = (150; 100; 50)

Таблица 11

Исходные данные

Отрасль	Межотраслевые потоки			$Y_{отч}$
	1	2	3	
1	36	30	16	38
2	30	20	10	40
3	24	10	8	8

б) $X_{пл}$ = (200; 300; 150)

Таблица 12

Исходные данные

Отрасль	Межотраслевые потоки			$Y_{отч}$
	1	2	3	
1	40	15	20	50
2	20	45	40	45
3	20	15	10	55

Необходимо:

1) определить матрицу коэффициентов прямых затрат A;

2) определить матрицу «затраты – выпуск» $(E - A)$;

3) найти объемы конечного использования продукции $Y_{пл}$ при условии, что в плановом периоде известен валовой выпуск продукции $X_{пл}$;

4) представить результаты в виде балансовой таблицы.

3Б8. Задан вектор норм добавленной стоимости $v = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,5 \\ 0,6 \end{bmatrix}$, включающий зарплату, налоги, прибыль и инвестиции на единицу выпускаемой продукции для каждой отрасли. Определить вектор цен, если матрица коэффициентов прямых затрат

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{bmatrix}.$$

Найти приращения равновесных цен, если норма добавленной стоимости для II отрасли станет 0,5.

3.2. ЗАНЯТИЕ 5. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Задачи для аудиторной работы

3А9. Техническое устройство может находиться в одном из трех состояний: S_0, S_1, S_2. Интенсивности λ_{ij} потоков, которые переводят устройство из одного состояния в другое, приведены в табл. 13.

Таблица 13

Интенсивности потоков

Вариант	λ_{01}	λ_{10}	λ_{02}	λ_{20}	λ_{12}	λ_{21}
1	4	4	0	4	3	2
2	2	6	0	4	3	2

Требуется:
1) построить размеченный граф состояний;
2) записать систему уравнений Колмогорова;
3) найти финальные вероятности;
4) выполнить анализ полученного решения.

3А10. Гарантийная мастерская по ремонту холодильников принимает заказы по одному телефону. Среднее число поступающих в течение часа заказов – 20, а среднее время оформления заказа – 4 мин. Определить показатели СМО. Как они изменятся, если подключить второй телефон?

3А11. Торговая фирма обслуживает клиентов по телефону, разветвленному на 4 линии. Проведенные исследования показали, что в среднем за один час работы поступает 100 запросов. Среднее время переговоров референтов фирмы с клиентом по телефону составляет 2,5 мин. Дайте оценку работы такой СМО.

3А+Б12. Средний интервал между поступающими в прокатный пункт заявками и запросами на наличие определенных предметов составляет 5 мин. Принимают заявки два работника, каждый с интенсивностью 12 заявок в час. С какой интенсивностью должен работать один работник, выполняя работу за двоих, чтобы доля потерянных заявок была не более 10%?

Задачи для самостоятельной работы

3А13. Техническое устройство может находиться в одном из трех состояний: S_0, S_1, S_2. Интенсивности λ_{ij} потоков, которые переводят устройство из одного состояния в другое, приведены в табл. 14.

Таблица 14

Интенсивности потоков

Вариант	λ_{01}	λ_{10}	λ_{02}	λ_{20}	λ_{12}	λ_{21}
1	2	4	2	4	3	2
2	2	0	6	4	3	2

Требуется:

1) построить размеченный граф состояний;
2) записать систему уравнений Колмогорова;
3) найти финальные вероятности;
4) выполнить анализ полученного решения.

3А+Б14. Торговая фирма планирует открыть в микрорайоне магазин самообслуживания. Маркетинговые исследования показали, что среднее количество посетителей магазина будет составлять 120 чел./ч. Среднее время обслуживания одного покупателя – 2 мин.

Определить, какое количество кассовых аппаратов необходимо установить, чтобы посетитель не ожидал обслуживания более 1 мин.

3А+Б15. В таксопарке три диспетчера принимают заказы на вызов машин. В среднем каждый час поступает 120 заявок, длительность регистрации – 1 мин.

Определите эффективность открытия новой телефонной линии, если издержки, связанные с эксплуатацией линии (включая оплату труда диспетчера), составляют 10 ден. ед., издержки, связанные с простоем линии, – 8 ден. ед., издержки, связанные с отказом в обслуживании, – 4 ден. ед., а предполагаемый дополнительный доход – 15 ден. ед.

3Б16. В кассе метрополитена, продающей жетоны на проезд, имеются два окна. Время, которое тратит кассир на обслуживание одного пассажира, в среднем равно 0,5 мин. Пассажиры подходят к кассе в среднем по 3 чел./мин.

Определить:

1) вероятность того, что оба кассира свободны;

2) среднее число занятых кассиров;

3) среднее число пассажиров в очереди;

4) среднее время, которое проводит пассажир в очереди.

Оценить работу данной системы.

3Б17. В супермаркете установлены 4 кассовых аппарата. Вследствие введения в строй нового жилого комплекса ожидается увеличение потока покупателей в магазин до 4 чел./мин. Время обслуживания одного покупателя остается без изменения и в среднем составляет 0,9 мин.

Определите, какое количество кассовых аппаратов должно быть установлено дополнительно, чтобы средняя длина очереди уменьшилась в два раза по сравнению с ожидаемой.

Проведите сравнительный анализ работы магазина после установки дополнительных кассовых аппаратов и без них.

3.3. ЗАНЯТИЕ 6. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

Задачи для аудиторной работы

3А18. Определить нижнюю и верхнюю цены игры, а также решение игры, если она имеет седловую точку, для следующих платежных матриц:

$$\text{а)}\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix};\ \text{б)}\begin{bmatrix} 6 & 9 & 7 & 5 & 6 & 12 \\ 9 & 10 & 6 & 5 & 8 & 8 \\ 8 & -6 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

3А19. Решить матричную игру, выполнив все возможные упрощения платежных матриц:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

3А20. Сельскохозяйственное предприятие имеет три участка земли: влажный A_1, средней влажности A_2 и сухой A_3. Один из этих участков предполагается использовать для выращивания картофеля, а остальные – для посева зеленой массы. Известно, что для получения хорошего урожая картофеля требуется определенное количество влаги в почве в период вегетации. При излишней влажности посаженный картофель может гнить, а при недостаточном количестве осадков будет плохо развиваться, что приведет к снижению урожайности. Требуется определить, на каком участке сеять картофель, чтобы получить хороший урожай, если известна средняя урожайность картофеля в зависимости от погодных условий. На участке A_1 урожайность составляет 200, 100 и 250 ц/га при выпадении соответственно нормального количества осадков, больше и меньше нормы. Аналогично на участке A_2 – 270, 120 и 200 ц/га, а на участке A_3 – 240, 260 и 10 ц/га.

Найти оптимальную стратегию при различных критериях.

Вероятности выпадения осадков: норма – q_1 = 0,4, меньше нормы – q_2 = 0,3, больше нормы – q_3 = 0,3.

3Б21. Предприятие выпускает скоропортящуюся продукцию I и II. Данные о ее себестоимости, отпускных ценах и объемах реализации приведены в табл. 15.

Таблица 15

Исходные данные

Вид продукции	Себестоимость единицы продукции, ден. ед.	Отпускная цена, ден. ед.		Объем реализации, ед.	
		В день изготовления	Позже	В теплую погоду	В холодную погоду
1	0,8	1,2	0,3	1000	4000
2	0,5	0,8	0,2	6000	1200

На реализацию всей произведенной продукции расходуется 200 ден. ед. Требуется:

1) придать описанной ситуации игровую схему, установить характер игры и выявить ее участников, указать возможные чистые стратегии сторон;

2) составить платежную матрицу;

3) выяснить, какое решение о выпуске продукции целесообразно принять, чтобы получить максимальный доход, при сле-

дующих предположениях: а) известны вероятности теплой и холодной погоды: 0,64 и 0,36; б) наступление как теплой, так и холодной погоды равновероятно; в) о том, какая будет погода, ничего определенного сказать нельзя (значение параметра в критерии Гурвица принять $\lambda = 0{,}7$).

Задачи для самостоятельной работы

3А22. Определить нижнюю и верхнюю цены игры, а также решение игры, если она имеет седловую точку, для следующих платежных матриц:

$$\text{а)} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & -3 \end{bmatrix}; \text{ б)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

3А23. Решить матричную игру, выполнив все возможные упрощения платежных матриц:

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3Б24. Решить матричную игру

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 6 & -5 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

а) сведением к ЗЛП; б) графически.

3А25. На технологическую линию поступает сырье или с малым, или с большим количеством примесей. Линия может работать в трех режимах. Доход предприятия от реализации единицы продукции, изготовленной из сырья первого вида при различных режимах работы технологической линии, составляет соответственно 2, 5 и 6 ден. ед., а из сырья второго вида – 5, 3 и 1 ден. ед. В каких режимах должна работать технологическая линия, чтобы доход от выпущенной продукции был возможно большим? Решить задачу:

а) используя критерии Вальда, Гурвица и Сэвиджа;

б) при условии, что вероятность поступления сырья с малым количеством примесей равна 0,8, а с большим количеством примесей – 0,2.

3А+Б26. После нескольких лет эксплуатации промышленное оборудование оказывается в одном из следующих состояний: 1) оборудование может использоваться в очередном году после профилактического ремонта; 2) для безаварийной работы оборудования в дальнейшем следует заменить отдельные его детали и узлы; 3) оборудование требует капитального ремонта или замены. В зависимости от сложившейся ситуации руководство предприятия в состоянии принять такие решения: 1) отремонтировать оборудование силами заводских специалистов, что потребует, в зависимости от обстановки, затрат, равных a_1, a_2 или a_3 ден. ед.; 2) вызвать специальную бригаду ремонтников; расходы в этом случае составят b_1, b_2 или b_3 ден. ед.; 3) заменить оборудование новым, реализовав устаревшее оборудование по его остаточной стоимости; совокупные затраты в результате этого мероприятия будут равны соответственно c_1, c_2 или c_3 ден. ед. Указанные выше расходы предприятия включают, кроме стоимости ремонта и заменяемых деталей и узлов, убытки, вызванные ухудшением качества выпускаемой продукции, простоем неисправного оборудования, а также затраты на установку и отладку нового оборудования.

Требуется:

1) придать описанной ситуации игровую схему, установить характер игры и выявить ее участников, указать возможные чистые стратегии сторон;

2) составить платежную матрицу;

3) выяснить, какое решение о работе оборудования в предстоящем году целесообразно рекомендовать руководству предприятия, чтобы минимизировать потери при следующих предположениях: а) накопленный на предприятии опыт эксплуатации аналогичного оборудования показывает, что вероятности указанных выше состояний оборудования равны соответственно q_1, q_2 или q_3; б) имеющийся опыт свидетельствует о том, что все три возможных состояния оборудования равновероятны; в) о вероятностях состояний оборудования ничего определенного сказать нельзя (λ – значение параметра в критерии Гурвица).

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 16.

Таблица 16

Исходные данные

Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_1	5	4	7	6	9	10	8	7	10	13
a_2	11	6	11	10	12	8	11	12	17	9
a_3	9	9	9	15	10	13	7	20	13	15
b_1	7	5	6	15	7	18	15	15	12	20
b_2	12	3	8	9	14	14	10	11	15	12
b_3	6	7	16	18	9	10	16	17	9	11
c_1	15	20	21	13	15	25	12	23	21	18
c_2	10	15	10	24	11	12	9	9	8	10
c_3	16	6	12	12	18	9	18	13	14	14
q_1	0,3	0,4	0,15	0,15	0,2	0,35	0,35	0,15	0,35	0,3
q_2	0,5	0,45	0,6	0,55	0,65	0,45	0,5	0,65	0,55	0,45
q_3	0,2	0,15	0,25	0,3	0,15	0,2	0,15	0,2	0,1	0,25
λ	0,7	0,9	0,5	0,8	0,6	0,8	0,7	0,9	0,6	0,7

3Б27. Торговая фирма разработала несколько вариантов плана продаж на предстоящей ярмарке. В табл. 17 представлены показатели дохода фирмы с учетом различных вариантов конъюнктуры рынка и спроса покупателей.

Таблица 17

Показатели дохода фирмы

План продажи	Величина дохода, ден. ед.		
	$В_1$	$В_2$	$В_3$
$П_1$	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$П_2$	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$П_3$	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Значения коэффициентов приведены в табл. 18.

Таблица 18

Исходные данные

Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_{11}	3	2	3	4	3	5	2	2	3	2
a_{12}	5	4	4	3	2	3	3	1	2	4
a_{13}	1	2	2	5	4	–4	3	3	4	3
a_{21}	1	1	1	6	5	–2	4	4	5	3
a_{22}	4	3	2	2	3	5	2	3	3	1
a_{23}	3	5	4	3	2	2	1	1	2	4
a_{31}	4	4	5	2	2	1	3	1	2	2

Окончание табл. 18

Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_{32}	2	2	3	5	5	1	2	4	5	3
a_{33}	5	–3	1	–2	–5	3	4	2	5	3
b	40	30	30	35	45	20	30	25	40	15
c	30	20	45	25	35	40	35	25	15	35
d	30	50	25	40	20	40	35	50	45	50

Определить:

1) оптимальную стратегию фирмы в продаже товаров на ярмарке;

2) какую стратегию фирме считать оптимальной, если существует риск (вероятность реализации ситуации $В_1$ – b%, $В_2$ – c%, $В_3$ – d%).

3Б28. Фирма производит пользующиеся спросом детские платья и костюмы, реализация которых зависит от состояния погоды. Затраты фирмы на единицу продукции в течение апреля – мая составят: платья – A ден. ед., костюмы – B ден. ед. Цена реализации составит C и D ден. ед. соответственно. По данным наблюдений за несколько предыдущих лет, фирма может реализовать в условиях теплой погоды E шт. платьев и K шт. костюмов, при прохладной погоде – M шт. платьев и N шт. костюмов. В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую ей максимальный доход.

Задачу решить, приняв степень оптимизма λ, указанную в табл. 19.

Таблица 19

Исходные данные

Пара-метр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	5	10	7	12	15	9	11	13	6	8
B	25	35	28	40	42	32	38	41	26	30
C	10	18	12	22	28	15	20	24	11	14
D	40	80	55	95	115	70	85	105	50	60
E	1220	1370	1340	1430	1460	1310	1390	1510	1480	1550
K	550	530	490	510	570	560	580	605	590	600
M	410	450	430	460	470	440	465	475	480	490
N	930	970	950	920	980	990	960	910	940	880
λ	0,4	0,6	0,3	0,7	0,5	0,4	0,3	0,7	0,6	0,5

3.4. ЗАНЯТИЕ 7. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Задачи для аудиторной работы

3А29. Годовая потребность торгового центра в пылесосах составляет 600 шт., затраты на хранение одного пылесоса – 3 ден. ед. в год. Затраты на подготовительно-заключительные операции, не зависящие от величины поставляемой партии и связанные с каждой поставкой, равны 36 ден. ед. Найти оптимальный размер партии поставки, оптимальный интервал между поставками, средний уровень текущего запаса, число поставок и минимальные затраты, связанные с работой системы. Изобразить график изменения запасов.

3А30. Фирме по строительству судов требуется 20 000 заклепок в год, расходуемых с постоянной интенсивностью. Организационные издержки составляют 0,5 тыс. ден. ед. за партию, цена одной заклепки – 10 ден. ед. Издержки на хранение одной заклепки в год оценены в 12,5% от ее стоимости.

Найти оптимальный размер партии поставки, оптимальную продолжительность цикла и оптимальное число поставок за год, минимальные затраты, связанные с работой системы. Изобразить график изменения запасов.

3А31. Система управления запасами некоторого товара подчиняется основной модели. Каждый год спрос с постоянной интенсивностью составляет 15 000 ед. товара, издержки на организацию поставки составляют 10 ден. ед. за партию, цена единицы товара – 30 ден. ед., а издержки на ее хранение – 7,5 ден. ед. в год.

Найти оптимальный размер партии, число поставок, продолжительность цикла, минимальные затраты, связанные с работой системы. Изобразить график изменения запасов.

3А+Б32. Годовая потребность фирмы в деревоматериалах составляет 4000 м^3, затраты на хранение 1 м^3 – 4 ден. ед. в год. Затраты на подготовительно-заключительные операции, не зависящие от величины поставляемой партии и связанные с каждой поставкой, равны 80 ден. ед. Найти оптимальный размер партии поставки, оптимальный интервал между поставками, средний уровень текущего запаса, число поставок, минимальные затраты, связанные с работой данной системы.

Сравнить полученные затраты с затратами в случае отклонений от оптимальной партии в любом направлении в два раза.

3А+Б33. Система управления запасами описывается моделью производственных запасов. Спрос на товар составляет 1500 шт. в год, цена – 200 ден. ед., издержки хранения товара – 20 ден. ед. в год, организационные издержки – 1000 ден. ед. В течение года может быть произведено 4500 шт. товара при полной загрузке производственной линии.

Нарисуйте график изменения запасов, вычислите оптимальный размер партии, продолжительность поставки, продолжительность цикла и средний уровень запасов.

3Б34. Годовая потребность предприятия в полуфабрикатах составляет 450 т. Издержки размещения заказа – 130 ден. ед. Коэффициент издержек хранения 1 т полуфабрикатов в течение года равен 0,2 от стоимости запаса. Цена 1 т полуфабриката зависит от величины партии. Данные по оптовым скидкам приведены в табл. 20.

Таблица 20

Оптовые скидки

Показатель	Значение		
Величина партии, т	1–99	100–499	500 и более
Цена 1 т продукции в зависимости от величины партии, ден. ед.	45	42	41

Определить оптимальную величину партии.

Задачи для самостоятельной работы

3А35. Известно, что издержки выполнения заказа составляют 2 ден. ед., количество товара, реализованного за год, – 1000 шт., закупочная цена единицы товара – 5 ден. ед., издержки хранения в год – 20% от закупочной цены. Определить наиболее оптимальный размер заказа, число поставок за год, минимальные затраты, связанные с работой системы.

3А36. Предприниматель имеет стабильный месячный спрос на товар в количестве 50 ед. Товар он покупает у поставщика по цене 6 ден. ед. за штуку, причем издержки на оформление поставки и другие подготовительные операции составляют в каждом случае 10 ден. ед. Как часто предприниматель должен пополнять свой запас товаров, если затраты на хранение в месяц равны 20% от цены товара? Найти минимальные затраты, связанные с работой системы, количество поставок в месяц.

3А37. Интенсивность спроса в модели производственных поставок составляет четверть скорости производства, которая равна 20 000 ед. товара в год. Организационные издержки для одной партии равны 150 ден. ед., а издержки хранения единицы товара в течение года – 5 ден. ед.

Определить оптимальный размер партии.

3А+Б38. Пользующийся спросом товар продается со средней скоростью 45 ед. в день, а производится со скоростью 450 ед. в день. Затраты на организацию и доставку товара составляют 5 тыс. ден. ед. за партию, издержки хранения запасов в день равны 20% от стоимости товара. Стоимость товара складывается следующим образом: заработная плата обслуживающего персонала составляет 0,4; расходы на материалы – 0,5; накладные расходы – 0,6 ден. ед. за единицу товара (для каждой единицы товара эти значения суммируются). Найти оптимальный размер партии и минимальные общие затраты, связанные с образованием запаса (в расчете на единицу товара в течение года). В году 300 рабочих дней.

3А39. Интенсивность спроса в модели производственных поставок составляет четверть скорости производства, которая равна 20 000 ед. товара в год. Организационные издержки для одной партии равны 150 ден. ед., а издержки хранения единицы товара в течение года – 5 ден. ед. Определить оптимальный размер партии.

3А+Б40. Система управления запасами описывается моделью производственных запасов. Спрос на товар составляет 15 000 шт. в год, цена – 200 ден. ед., издержки хранения товара в течение года – 20 ден. ед., организационные издержки – 1000 ден. ед. В течение года может быть произведено 45 000 шт. товара при полной загрузке производственной линии. Нарисуйте график изменения запасов, вычислите оптимальный размер партии, продолжительность поставки, продолжительность цикла и средний уровень запасов.

3Б41. На склад поставляют цемент партиями по 1500 т. В сутки со склада потребители забирают 50 т цемента. Накладные расходы по доставке партии цемента равны 2 тыс. ден. ед. Издержки хранения 1 т цемента в течение суток составляют 0,1 ден. ед. Определить: 1) длительность цикла, среднесуточные накладные расходы и среднесуточные издержки хранения; 2) эти же величины для размеров партии 500 и 3000 т; 3) каковы оптимальный размер заказываемой партии и расчетные характеристики работы склада в оптимальном режиме.

3Б42. Потребность станкосборочного цеха в заготовках некоторого типа составляет 32 тыс. шт. в год. Издержки размещения заказа равны 50 ден. ед., издержки содержания одной заготовки – 5 ден. ед. в год. Среднее время реализации заказа – 10 дней. В году 360 рабочих дней.

Определить оптимальную партию поставки, периодичность возобновления поставок, точку размещения заказа, минимальный первоначальный запас и моменты повторения заказов.

3Б43. Потребность сборочного предприятия в деталях некоторого типа составляет 120 000 шт. в год, причем они расходуются в процессе производства равномерно и непрерывно. Детали заказываются раз в год и поставляются партиями одинакового объема, указанного в заказе. Хранение детали на складе стоит 0,35 ден. ед. в сутки, а поставка партии – 10 000 ден. ед. Задержка производства из-за отсутствия деталей недопустима. Определить наиболее экономичный объем партии и интервал между поставками, которые нужно указать в заказе (предполагается, что поставщик не допускает задержки поставок). Найти, на сколько процентов увеличатся затраты на создание и хранение запаса по сравнению с минимальными затратами при объеме заказываемых партий 5000 деталей. Партии заказываются не все сразу, а каждая отдельно, причем срок выполнения заказа равен 16 дней. Определить точки заказа.

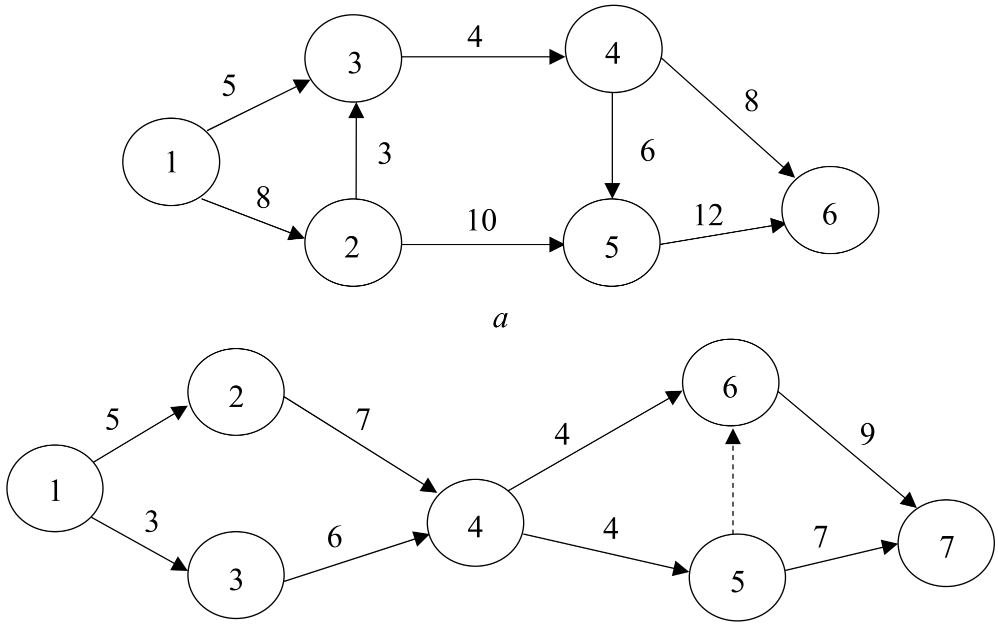
3.5. ЗАНЯТИЕ 8. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

Задачи для аудиторной работы

3А44. Построить сетевой график, включающий пять работ, если работы a_2 и a_3 начинаются одновременно после работы a_1, работа a_4 может быть начата после выполнения работ a_2, a_3, работа a_5 может начаться после выполнения работы a_3.

3А45. Построить сетевой график, если начало работы a_5 зависит только от окончания работ a_1 и a_3, начало работы a_4 – только от окончания работы a_3, начало работы a_6 – только от окончания работ a_2 и a_3.

3А46. Найти критический путь, его длину и резервы времени работ, приведенных на сетевых графиках (рис. 7, *а*, *б*). Построить линейный график Ганта.

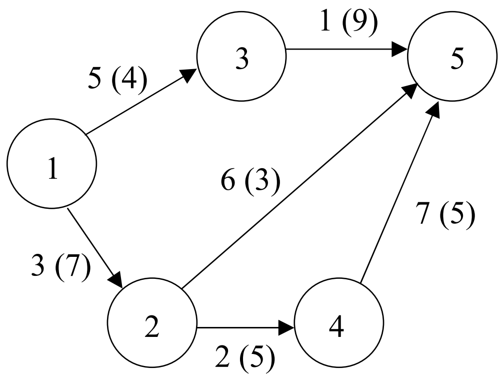


а

б

Рис. 7. Сетевые графики

3А+Б47. Комплекс работ представлен сетевым графиком (рис. 8).



$R = 10$

Рис. 8. Сетевой график

Для каждой работы известны продолжительность t_{ij} ее выполнения и количество r_{ij} (число в скобках) ресурса, расходуемого в единицу времени при выполнении этой работы (интенсивность потребления ресурса). В процессе выполнения работ расход ресурса не должен превышать заданной величины R. Требуется:

1) построить линейный график комплекса работ и определить по нему критическое время и сроки начала и окончания работ без учета ограничения на используемый ресурс;

2) построить график интенсивности использования ресурсов;

3) указать потребности в ресурсах в каждый момент времени;

4) определить, в какие моменты времени для выполнения работ проекта не хватает имеющихся ресурсов;

5) преобразовать линейный график выполнения работ так, чтобы в любой момент реализации комплекса работ расход ресурса не превышал заданного значения R, а общее время осуществления комплекса работ было возможно меньшим;

6) определить по преобразованному линейному графику новые сроки начала и окончания каждой работы.

Задачи для самостоятельной работы

3А48. Построить сетевой график, содержащий шесть работ, если начало работы a_4 зависит от результата выполнения работы a_2, работа a_5 может быть начата после выполнения работ a_1, a_2, работа a_6 может быть начата после завершения работ a_3 и a_4.

3А49. Построить сетевой график, если он включает семь работ и при этом работа a_4 выполняется после работ a_1 и a_3, работы a_3, a_5 начинаются после завершения работы a_2, работа a_6 может быть выполнена после работ a_3 и a_5, работа a_7 – после работ a_4 и a_6.

3А+Б50. Построить сетевые графики по данным табл. 21.

Таблица 21

Исходные данные

Исходная работа	Предшествующие работы		
	Вариант		
	1	2	3
a_1	–	–	–
a_2	–	–	–
a_3	a_1	a_1, a_2	a_1
a_4	a_1	a_1	a_1, a_2
a_5	a_2	a_1	a_2, a_3
a_6	a_2	a_4	a_2, a_3
a_7	a_3, a_5	a_5, a_6	a_4, a_6
a_8	a_4, a_6, a_7	a_3, a_7	a_5, a_7

3А51. Найти критический путь, его длину и резервы времени работ, приведенных на сетевом графике (рис. 9). Построить линейный график комплекса работ.

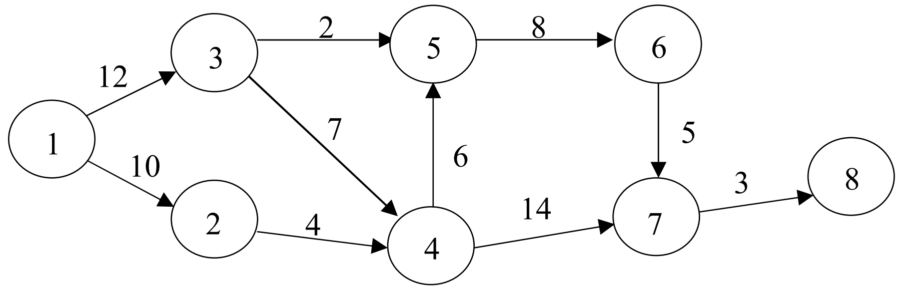


Рис. 9. Сетевой график

3А52. По сетевому графику, изображенному на рис. 10, установить, как повлияет на срок выполнения комплекса увеличение продолжительности работы (5; 8), работы (7; 8). Можно ли использовать полный резерв времени работы (4; 6) для увеличения продолжительности работы (6; 8)? Изменится ли полный резерв времени работы (2; 5), если срок выполнения комплекса возрастет за счет увеличения продолжительности работы (7; 8)?

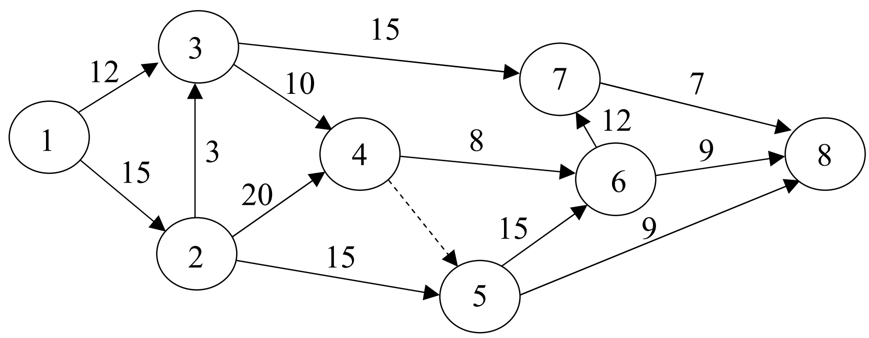


Рис. 10. Сетевой график

3А+Б53. Комплексы работ представлены сетевыми графиками (рис. 11). Для каждой работы известны продолжительность t_{ij} ее выполнения и количество r_{ij} (число в скобках) ресурса, расходуемого в единицу времени при выполнении этой работы (интенсивность потребления ресурса). В процессе выполнения работ расход ресурса не должен превышать заданной величины R. Требуется:

1) построить линейный график комплекса работ, определить критическое время, сроки начала и окончания работ без учета ограничений на ресурсы;

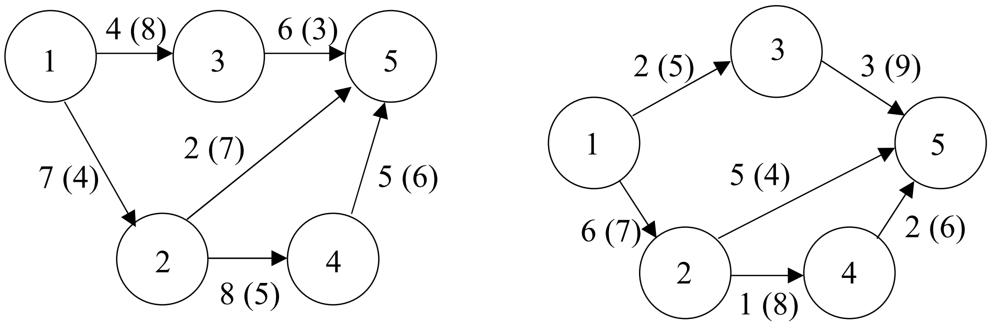
2) построить график интенсивности использования ресурсов;

3) указать потребности в ресурсах в каждый момент времени;

4) определить, в какие моменты времени для выполнения работ не хватает имеющихся ресурсов;

5) преобразовать линейный график выполнения работ так, чтобы в любой момент реализации комплекса расход ресурса не превышал заданного значения R, а общее время осуществления комплекса было возможно меньшим;

6) определить по преобразованному линейному графику новые сроки начала и окончания каждой работы.

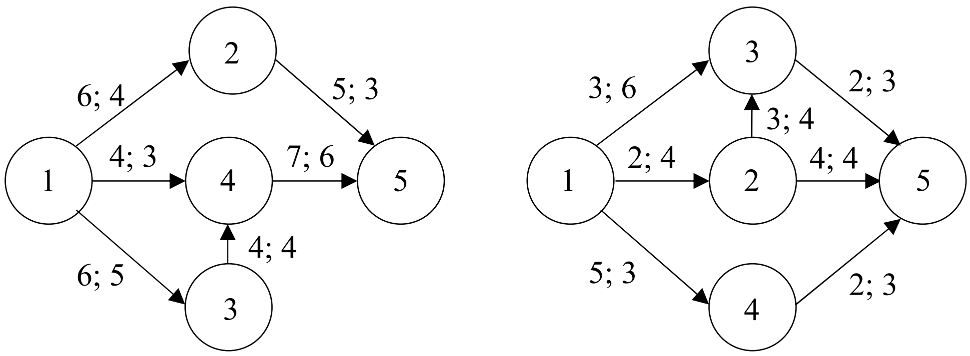


$R = 12$ $R = 15$

а *б*

Рис. 11. Сетевые графики

3А+Б54. Произвести оптимизацию сетевых графиков (рис. 12) по ресурсам. Наличный ресурс равен 10 ед. Первое число, приписанное дуге графика, – время выполнения операции, а второе – необходимое для этого количество ресурса. Операции не допускают перерыва в их выполнении.



а *б*

Рис. 12. Сетевые графики

4. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

4.1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ»

Тема: модели оптимального планирования.

Цели:

– научиться составлять оптимизационные модели, находить оптимальное решение;

– научиться пользоваться пакетом «Поиск решения» MS Excel при решении и анализе задач линейного программирования (ЗЛП);

– освоить основные положения теории двойственности и их применение при решении экономических задач.

Контрольные вопросы

1. Что называется ЗЛП? Приведите примеры.
2. Что называется допустимым планом? Всегда ли он существует? Приведите примеры.
3. Что называется оптимальным планом? Всегда ли он существует? Приведите примеры.
4. Какие методы решения ЗЛП Вы знаете?
5. Какой экономический смысл имеют переменные прямой и двойственной задач в задаче распределения ресурсов?
6. Какой экономический смысл имеют дополнительные переменные в задаче распределения ресурсов, в двойственной задаче?
7. Используя теорию двойственности, ответить на вопросы:

• Прямая задача имеет оптимальный план. Что можно сказать про решение двойственной?

• Некоторые переменные оптимального плана прямой задачи отличны от нуля. Что можно сказать про соответствующие ограничения двойственной задачи?

• Как изменится оптимальное значение целевой функции при изменении количества одного из ресурсов на единицу?

8. Зная решение задачи распределения ресурсов, укажите дефицитные и избыточные ресурсы. Какой ресурс является наиболее ценным?

9. Какую информацию предоставляют отчеты по пределам, устойчивости и результатам пакета «Поиск решения» MS Excel?

Ход работы

Задачи распределения финансов, оборудования, сырья можно рассматривать как задачи распределения ресурсов.

Формулировка задачи. Выпускается продукция четырех типов: $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, для изготовления которой требуются ресурсы трех видов: трудовые, сырье, финансы. Норма расхода, а также прибыль, получаемая от реализации единицы каждого типа продукции, и наличие располагаемого ресурса приведены в табл. 22.

Таблица 22

Нормы расхода ресурсов на единицу продукции

Ресурсы	Продукция				Запас ресурса
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	
Трудовые	1	1	1	1	16
Сырье	6	5	4	3	110
Финансы	4	6	10	13	100
Прибыль	60	70	120	130	–

1. Составить математическую модель задачи. Объяснить экономический смысл переменных.

2. Составить математическую модель двойственной задачи. Объяснить экономический смысл двойственных переменных.

3. Найти оптимальный план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль.

4. Провести анализ оптимальных решений прямой и двойственной задач, используя отчеты трех типов (по результатам, по устойчивости, по пределам):

а) указать, какая продукция вошла в оптимальный план и насколько невыгодно производство продукции, не вошедшей в оптимальный план;

б) указать дефицитные и избыточные ресурсы;

в) выписать оптимальное решение двойственной задачи;

г) указать наиболее дефицитный ресурс, исходя из оптимального решения двойственной задачи;

д) указать интервал устойчивости двойственных оценок.

5. Решить двойственную задачу. Сравнить решение с полученным в пункте 4.

6. Выяснить, как изменится выпуск продукции и значение целевой функции при изменении каждого из имеющихся ресурсов на единицу. Оценить раздельные и суммарное изменения.

Решение. Составим математическую модель задачи. Пусть переменные x_j – количество выпускаемой продукции $П_j$, $j = \overline{1,\ 4}$. Тогда математическая модель задачи имеет вид:

$$z(x) = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 16, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110, \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \le 100, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,\ 4}, \end{cases}$$

где $z(x)$ – целевая функция, которая определяет суммарную прибыль от реализации произведенной продукции. Первые три неравенства описывают условия ограниченности имеющихся ресурсов, кроме того, переменные x_j, $j = \overline{1,\ 4}$, не могут быть выражены отрицательными числами.

Составим математическую модель двойственной задачи. Для этого прямую задачу запишем в виде табл. 23.

Таблица 23

Математическая модель

Коэффициенты целевой функции c_j	60	70	120	130	$\to \max$	
Переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	Знак неравенств	b_i
y_1	1	1	1	1	$\le$	16
y_2	6	5	4	3	$\le$	110
y_3	4	6	10	13	$\le$	100
Условия неотрицательности	$x_1 \ge 0$	$x_2 \ge 0$	$x_3 \ge 0$	$x_4 \ge 0$	–	–

Согласно правилам построения двойственных задач, каждому ограничению прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи, поэтому, исходя из экономического смысла, можно сказать, что переменные двойственной задачи y_i, $i = \overline{1,\ 3}$, – это оценки ресурсов (трудовых, сырья, финансов).

Двойственная задача имеет вид:

$$f(y) = 16y_1 + 110y_2 + 100y_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} y_1 + 6y_2 + 4y_3 \geq 60, \\ y_1 + 5y_2 + 6y_3 \geq 70, \\ y_1 + 4y_2 + 10y_3 \geq 120, \\ y_1 + 3y_2 + 12y_3 \geq 130, \\ y_i \geq 0,\ i = \overline{1,\ 3}, \end{cases}$$

где $f(y)$ – целевая функция, которая определяет суммарную оценку ресурсов. Неравенства системы показывают, что оценка ресурсов, затрачиваемых на производство единицы соответствующей продукции, не меньше, чем прибыль от выпуска единицы этой продукции. Кроме того, переменные $y_i,\ i = \overline{1,\ 3},$ не могут быть выражены отрицательными числами.

Решим задачу средствами MS Excel. Следует сделать форму и ввести исходные данные (рис. 13).

F4 = =СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B4:E4)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1				ПЕРЕМЕННЫЕ							
2	имя	x1	x2	x3	x4						
3	знач										
4	коэф.цел. ф.	60	70	120	130	0	- значение целевой функции				
5				ОГРАНИЧЕНИЯ							
6	вид					лев.ч.	знак	пр.ч.			
7	Трудовые	1	1	1	1	0	<=	16			
8	Сырье	6	5	4	3	0	<=	110			
9	Финансы	4	6	10	13	0	<=	100			
10											
11											
12											

Рис. 13. Рабочий лист MS Excel

Далее осуществляется ввод зависимостей из математической модели (рис. 14). Чтобы получить значение целевой функции в ячейке F4, воспользуемся функцией СУММПРОИЗВ. Для этого выберем *Мастер функций* и вызовем математическую функцию СУММПРОИЗВ. На экране появится диалоговое окно. В массив 1 введем строку со значениями переменных, т. е. B$3:E$3 (знак $ ставим для того, чтобы адрес строки ячеек не менялся при копировании формул). Заметим, что в указанных ячейках B3:E3, которые на рис. 13 выделены серым цветом, по окончании решения задачи будет находиться оптимальное решение. В массив 2 введем адрес строки коэффициентов целевой функции, т. е. B4:E4. В ячейке F4 будем иметь значение 0, согласно введенной формуле.

Заметим, что во все диалоговые окна адреса ячеек удобно вводить не с клавиатуры, а протаскивая мышь по ячейкам, чьи адреса следует ввести. Далее копируем формулу из ячейки F4 в столбец «Левые части ограничений». На рис. 14 показано, какие формулы должны быть введены в указанные ячейки.

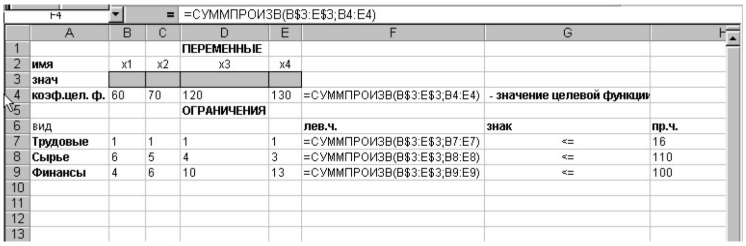


Рис. 14. Рабочий лист MS Excel

Установим курсор в ячейку F4. Командой *Поиск решения* из меню *Сервис* откроем диалоговое окно *Поиск решения* и занесем в него необходимые данные:

• *Установить целевую* – адрес ячейки, отведенной под значение целевой функции, т. е. $F$4;

• *Равной* – максимальному значению;

• *Изменяя ячейки* – адреса изменяемых значений переменных, т. е. $B$3:$E$3;

• *Ограничения – Добавить*. На экране появится диалоговое окно *Добавление ограничения*. Введем ограничения по ресурсам $F$7≤$H$7, затем нажмем кнопку *Добавить*. Аналогично добавим ограничения $F$8≤$H$8 и $F$9≤$H$9. По окончании ввода данных нажмем ОК. Можно добавить все ограничения сразу, т. к. они имеют одинаковый знак (≤) (рис. 15).

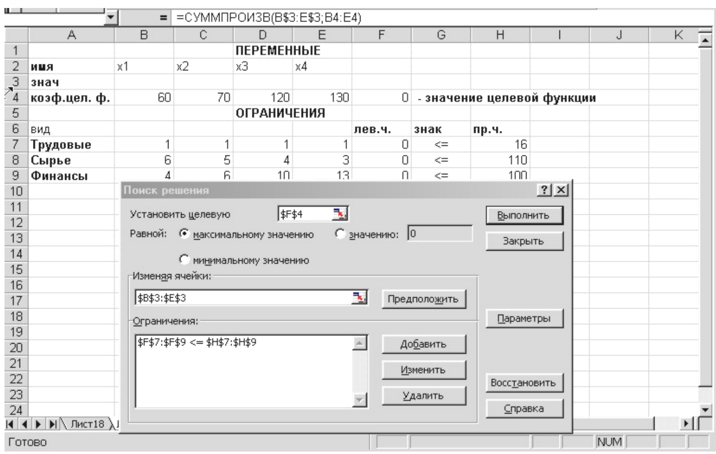


Рис. 15. Диалоговое окно Поиск решения

Командой *Параметры* вызываем диалоговое окно *Параметры поиска решения* и устанавливаем флажки: *Линейная модель*, *Неотрицательные значения*, *Автоматическое масштабирование* (рис. 16). Нажимаем ОК.

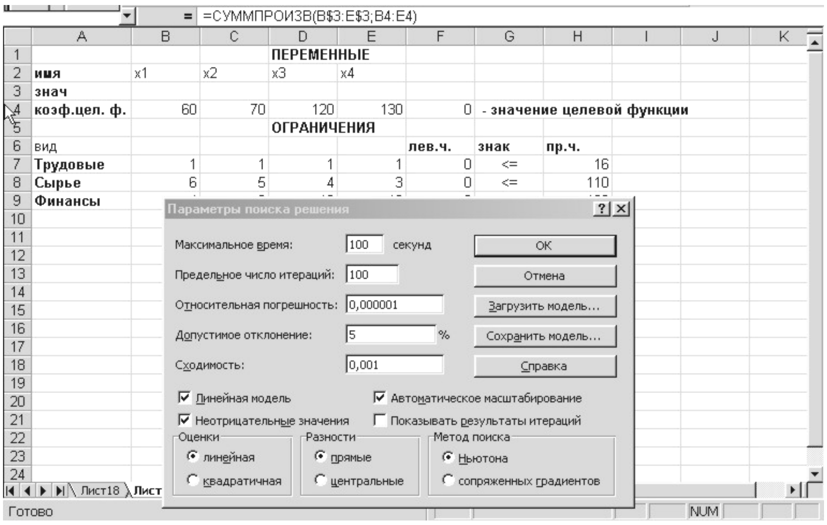


Рис. 16. Диалоговое окно Параметры поиска решения

Возвращаемся в диалоговое окно *Поиск решения* и, щелкнув по кнопке *Выполнить*, находим оптимальное решение задачи. На экране появится диалоговое окно *Результаты поиска решения* (рис. 17). В ячейках B3:E3 имеем оптимальное решение задачи: $X_{\text{опт}} = (10;\ 0;\ 6;\ 0)$, в ячейке F4 – максимальное значение целевой функции: $z(X_{\text{опт}}) = 1320$.

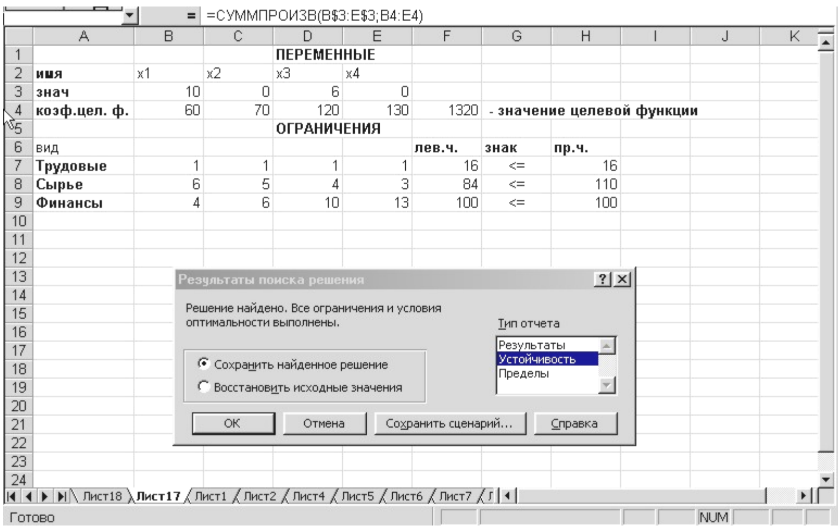


Рис. 17. Диалоговое окно Результаты поиска решения

Таким образом, согласно оптимальному плану, следует выпускать продукцию $П_1$ и $П_3$ в количествах 10 и 6 ед. соответственно. Продукцию $П_2$ и $П_4$ выпускать не следует. Ограничения говорят о том, что первый и третий ресурсы израсходованы полностью, а второго ресурса осталось 26 ед.

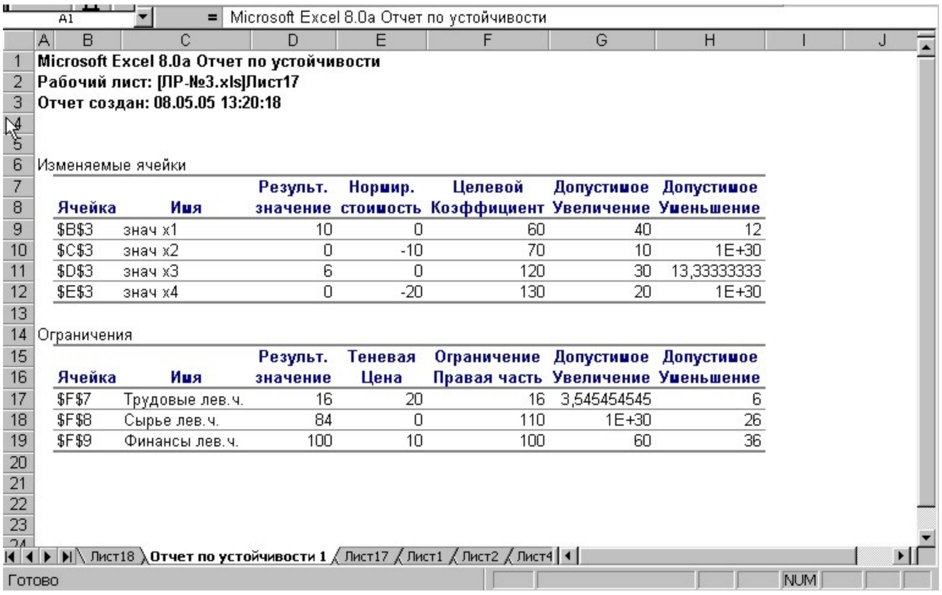
При этом будет получена максимальная прибыль в количестве 1320 ден. ед.

Если задача не имеет решения или данные введены неверно (целевая функция не ограничена или система ограничений несовместна), то выдаются сообщения: «Значения целевой ячейки не сходятся» или «Поиск не может найти подходящего решения».

Проведем анализ оптимального решения. Анализ оптимального решения начинается после успешного решения задачи, когда на экране появляется окно *Результаты поиска решения* (рис. 17). С помощью этого диалогового окна можно вызвать отчеты трех типов: по результатам, по устойчивости, по пределам.

Вызов отчета осуществляется по следующему алгоритму.

На экране – диалоговое окно *Результаты поиска решения* (рис. 17). Устанавливаем курсор на тип вызываемого отчета. Например, отчет по устойчивости. Нажимаем ОК. В нижней части экрана появляется ярлычок нового листа, на котором указано название отчета. Устанавливаем курсор на этот ярлычок и щелкаем левой кнопкой мыши. На экране появляется вызванный отчет (рис. 18).



Microsoft Excel 8.0a Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [ПР-№3.xls]Лист17
Отчет создан: 08.05.05 13:20:18

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$3	знач x1	10	0	60	40	12
$C$3	знач x2	0	-10	70	10	1E+30
$D$3	знач x3	6	0	120	30	13,33333333
$E$3	знач x4	0	-20	130	20	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$F$7	Трудовые лев.ч.	16	20	16	3,545454545	6
$F$8	Сырье лев.ч.	84	0	110	1E+30	26
$F$9	Финансы лев.ч.	100	10	100	60	36

Рис. 18. Отчет по устойчивости

Можно сразу выделить все три типа отчетов (по устойчивости, по пределам и по результатам).

Отчет по устойчивости. Отчет состоит из двух таблиц. Первая приводит следующие значения для переменных: результат решения задачи; нормировочную стоимость, т. е. дополнительные двойственные переменные, которые показывают, насколько изменяется целевая функция при принудительном включении единицы этой продукции в оптимальное решение; коэффициенты целевой функции; предельные значения приращения коэффициентов целевой функции, при которых сохраняется набор переменных, входящих в оптимальное решение.

Во второй таблице приводятся аналогичные значения для ограничений: величина использованных ресурсов; теневая цена, т. е. двойственные оценки, которые показывают, как изменится целевая функция при изменении ресурсов на единицу; значения приращения ресурсов, при которых сохраняется оптимальный набор переменных, входящих в оптимальное решение.

Согласно полученным данным, $Y_{\text{опт}}$ = (20; 0; 10; 0; 10; 0; 20). Первые три значения (графа «Теневая цена» отчета по устойчивости) показывают оценки ресурсов (трудовые, сырье, финансы). Наиболее дефицитным является первый ресурс (трудовые ресурсы), т. к. его оценка наибольшая, при изменении количества ресурса на единицу в пределах интервала устойчивости прибыль изменится на 20; менее дефицитным является третий ресурс (финансы). Второй ресурс (сырье) дефицитным не является (его оценка равна нулю).

Последние четыре значения (графа «Нормировочная стоимость» с противоположным знаком) показывают, какую продукцию выгодно выпускать, а какую – нет. Согласно полученным данным, при выпуске единицы продукции $П_4$ целевая функция уменьшится на 20 ед., а при выпуске единицы продукции $П_2$ – на 10 ед.

Интервал устойчивости для первого ресурса (трудовые ресурсы) имеет вид: (16 − 6; 16 + 3,545). Значения берем из столбцов «Допустимое увеличение», «Допустимое уменьшение», «Ограничение, правая часть». При изменении количества первого ресурса в этих пределах двойственные оценки и типы выпускаемой продукции остаются неизменными.

Отчет по результатам. Отчет состоит из трех таблиц. В первой таблице приводятся сведения о целевой функции. В столбце «Исходно» приведены значения целевой функции до начала вычислений. Во второй таблице приводятся значения искомых переменных, полученные в результате решения задачи. В третьей показываются результаты оптимального решения для ограничений и граничных условий.

Отчет по пределам. В отчете показано, в каких пределах может изменяться выпуск продукции, вошедшей в оптимальное решение, при сохранении структуры оптимального решения.

Индивидуальные задания

Вариант 1. Найти оптимальное сочетание посевов трех культур: пшеницы, гречихи и картофеля. Эффективность возделывания названных культур (в расчете на 1 га) характеризуется показателями, значения которых приведены в табл. 24.

Таблица 24

Исходные данные

Показатель	Пшеница	Гречиха	Картофель
Урожайность, ц	20	10	100
Затраты труда механизаторов, чел.-дней	1	1	5
Затраты ручного труда, чел.-дней	1	1	20
Прибыль, ден. ед.	4	10	3

Производственные ресурсы: 4000 га пашни, 5000 чел.-дней труда механизаторов, 9000 чел.-дней ручного труда. Критерий оптимальности – максимум прибыли.

Вариант 2. На предприятии освоены четыре технологии производства основной продукции. Запасы потребляемых ресурсов, затраты их в течение месяца и объемы выпуска готовой продукции при каждой технологии за этот же период приведены в табл. 25.

Таблица 25

Исходные данные

Ресурс	Запас ресурса, шт.	Расход ресурса в течение месяца, шт., при технологии			
		I	II	III	IV
P_1	34	2	4	1	5
P_2	16	4	1	4	1
P_3	22	2	3	1	2
Объем выпуска, шт.		7	3	4	2

Установить такое время работы предприятия по каждой технологии, при котором выпуск продукции будет максимальным, а расход ресурсов не превысит их наличия.

Вариант 3. Для изготовления обуви четырех моделей на фабрике используются два сорта кожи. Ресурсы рабочей силы и материала, затраты труда и материала для изготовления каждой пары обуви, а также прибыль от реализации единицы продукции приведены в табл. 26.

Таблица 26

Исходные данные

Ресурс	Запас ресурса	Затраты на одну пару по моделям			
		I	II	III	IV
Рабочее время, чел.-ч	1000	1	2	2	1
Кожа 1-го сорта, м^2	500	2	1	0	0
Кожа 2-го сорта, м^2	1200	0	1	4	1
Прибыль, ден. ед.		2	40	10	15

Составить план выпуска обуви по ассортименту, максимизирующий прибыль.

Вариант 4. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 30 тыс. ден. ед. и помещение площадью 45 м^2. Участок может быть оснащен машинами трех типов, характеристики которых приведены в табл. 27.

Таблица 27

Исходные данные

Марка машины	Стоимость машины, тыс. ден. ед.	Занимаемая площадь, м^2	Производительность за смену, тыс. ед.
M_1	6	9	8
M_2	3	4	4
M_3	2	3	3

Найти оптимальный план приобретения машин, обеспечивающий новому производственному участку максимальную производительность.

Вариант 5. Торговое предприятие реализует товары T_1, T_2, T_3, используя при этом площади торговых залов и время обслуживающего персонала. Затраты указанных ресурсов на продажу одной партии товара каждого вида, их запасы и прибыль, получаемая от реализации каждой партии товара, приведены в табл. 28.

Таблица 28

Исходные данные

Ресурс	Запас ресурса	Затраты ресурса на реализацию партии товара		
		T_1	T_2	T_3
Время, чел.-ч	370	0,5	0,7	0,6
Площадь, м^2	90	0,1	0,3	0,2
Прибыль, ден. ед.		5	8	6

Найти оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую предприятию максимальную прибыль.

Вариант 6. Механический завод при изготовлении деталей $Д_1$ и $Д_2$ использует токарное, фрезерное и сварочное оборудование. Обработку деталей можно вести по технологиям I и II. Полезный фонд времени работы каждой группы оборудования, затраты времени на изготовление детали и прибыль от выпуска каждой детали приведены в табл. 29.

Таблица 29

Исходные данные

Оборудование	Фонд времени, станко-ч	Затраты времени, ч, на изготовление детали			
		$Д_1$		$Д_2$	
		Технология			
		I	II	I	II
Токарное	37	3	1	1	2
Фрезерное	20	2	2	3	0
Сварочное	30	0	1	1	4
Прибыль, ден. ед.		11	6	9	6

Составить оптимальный план загрузки оборудования, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

Вариант 7. Имеются два проекта на строительство жилых домов. Расход стройматериалов, их запас и полезная площадь дома для каждого проекта приведены в табл. 30.

Таблица 30

Исходные данные

Стройматериалы	Запас стройматериалов, м^3	Расход стройматериалов, м^3, на один дом	
		I проект	II проект
Кирпич силикатный	1365	7	3
Кирпич красный	1245	6	3
Пиломатериалы	650	1	2
Полезная площадь, м^2		60	50

Определить, сколько домов I и II проекта следует построить, чтобы полезная площадь была наибольшей.

Вариант 8. Магазин оптовой торговли реализует три вида продукции: $П_1$, $П_2$ и $П_3$. Для этого используются два ограниченных ресурса – полезная площадь помещений, которая с учетом коэффициента оборачиваемости равна 450 м^2, и рабочее время работников магазина, которое составляет 600 чел.-ч. Необходимо разработать план товарооборота, обеспечивающий максимум прибыли. Затраты ресурсов на реализацию и получаемая при этом прибыль представлены в табл. 31.

Таблица 31

Исходные данные

Ресурс	Запас ресурса	Затраты ресурса на реализацию продукции		
		$П_1$	$П_2$	$П_3$
Полезная площадь, м^2	450	1,5	2	3
Рабочее время, чел.-ч	600	3	2	1,5
Прибыль, ден. ед.		50	65	70

Вариант 9. Исходя из специализации и своих технологических возможностей предприятие может выпускать четыре вида продукции. Сбыт любого количества обеспечен. Для изготовления этой продукции используются трудовые ресурсы, полуфабрикаты и станочное оборудование. Общий запас ресурсов (в расчете на трудовую неделю), расход каждого ресурса на единицу выпускаемой продукции и прибыль, полученная за единицу продукции, приведены в табл. 32.

Таблица 32

Исходные данные

Ресурс	Запас ресурса	Затраты ресурса на единицу выпускаемой продукции			
		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
Трудовые ресурсы, чел.-ч	4800	4	2	2	8
Полуфабрикаты, кг	2400	2	10	6	0
Станочное оборудование, станко-ч	1500	1	0	2	1
Цена единицы продукции, ден. ед.		65	70	60	120

Требуется определить план выпуска, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

Вариант 10. На звероферме могут выращиваться черно-бурые лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны ежедневно получать лисицы и песцы, приведено в табл. 33. В ней же указаны общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой, и прибыль от реализации одной шкурки лисицы и песца.

Таблица 33

Исходные данные

Вид корма	Общее количество корма, кг	Количество корма, получаемое в сутки, кг	
		Лисица	Песец
1	180	2	3
2	240	4	1
3	426	6	7
Прибыль от реализации одной шкурки, ден. ед.		16	12

Определить, сколько лисиц и песцов следует выращивать на звероферме, чтобы прибыль от реализации их шкурок была максимальной.

Вариант 11. На швейной фабрике для изготовления четырех видов изделий (*A*, *B*, *C* и *D*) может быть использована ткань трех артикулов. Нормы расхода ткани всех артикулов на пошив одного изделия приведены в табл. 34. В ней же указаны имеющееся в распоряжении фабрики общее количество ткани каждого артикула и цена одного изделия данного вида.

Таблица 34

Исходные данные

Артикул ткани	Общее количество ткани, м	Нормы расхода ткани, м, на одно изделие вида			
		A	*B*	*C*	*D*
I	180	1	–	2	1
II	210	–	1	3	2
III	800	4	2	–	4
Цена одного изделия (ден. ед.)		9	6	4	7

Определить, сколько изделий каждого вида должна произвести фабрика, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной.

Вариант 12. Предприятие выпускает четыре вида продукции (A, B, C и D) и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное и шлифовальное. Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудования приведены в табл. 35. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида.

Таблица 35

Исходные данные

Тип оборудования	Общий фонд рабочего времени, станко-ч	Затраты времени, станко-ч, на единицу продукции вида			
		A	B	C	D
Токарное	300	2	1	1	3
Фрезерное	70	1	–	2	1
Шлифовальное	340	1	2	1	–
Прибыль от реализации одного изделия, ден. ед.		8	3	2	1

Определить такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации является максимальной.

Вариант 13. Торговое предприятие планирует организовать продажу четырех видов товара (A, B, C и D), используя при этом только два вида ресурсов: рабочее время продавцов в количестве 840 ч и площадь торгового зала 180 м^2. При этом известны плановые нормативы затрат этих ресурсов в расчете на единицу товаров A, B, C и D и прибыль от их продажи, которые приведены в табл. 36.

Таблица 36

Исходные данные

Показатель	Общее количество ресурсов	Товар			
		A	B	C	D
Расход рабочего времени на единицу товара, ч	840	0,6	0,8	0,6	0,4
Использование площади торгового зала на единицу товара, м^2	180	0,1	0,2	0,4	0,1
Прибыль от продажи единицы товара, ден. ед.		5	8	7	9

Требуется определить оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую торговому предприятию максимальную прибыль.

Вариант 14. За бригадой закреплено 210 га пашни. Трудовые ресурсы составляют 2500 чел.-дней, запас минеральных удобрений – 600 ц. С 1 га посевов планируется получить 40 ц зерновых и

120 ц овощей. Для обеспечения такой урожайности на 1 га зерновых культур необходимо внести 2 ц минеральных удобрений, на 1 га овощных культур – 5 ц, а также затратить на 1 га посевов зерновых 7 чел.-дней, на 1 га посевов овощей – 20 чел.-дней. Цены на зерновые и овощные культуры составляют 45 и 20 ден. ед. за 1 ц. Найдите такое сочетание посевных площадей зерновых и овощных культур, которое обеспечило бы максимум денежных поступлений от реализации произведенной продукции.

Вариант 15. Торговое предприятие имеет ограниченные ресурсы: фонд рабочего времени – 25 тыс. чел.-ч, площадь торговых залов – 350 м^2. Для обеспечения рентабельной работы торгового предприятия издержки обращения не должны превышать 11 млрд. ден. ед. Исходные данные представлены в табл. 37.

Таблица 37

Исходные данные

Показатель	Товарная группа, затраты на 1 т		
	мясо	колбасные изделия	молочные продукты
Фонд рабочего времени, чел.-ч.	130	210	320
Площадь торговых залов, м^2	2	3	3,5
Издержки обращения, ден. ед.	70	90	130
Прибыль от продажи 1 т, млн. ден. ед.	0,125	0,16	0,24

Постройте экономико-математическую модель определения структуры товарооборота торгового предприятия при заданных объемах ресурсов на единицу товара, затратах ресурсов для получения максимальной прибыли.

4.2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ТЕОРИИ ИГР»

Тема: теория игр.

Цели:

– изучить основные понятия матричных игр, статистических игр;

– научиться пользоваться MS Excel при решении и анализе матричных игр.

Контрольные вопросы

1. Что называется игрой, партией, ходом, стратегией?
2. Как находятся верхняя и нижняя чистые цены матричной игры?
3. Всегда ли матричная игра имеет решение в чистых стратегиях?
4. Что называется оптимальным решением матричной игры?
5. Какие методы упрощения матричных игр Вы знаете?
6. Какие стратегии в матричной игре называются чистыми, а какие – смешанными?
7. Какие методы решения матричных игр Вы знаете?
8. Чем отличаются проблемы теории игр от проблем теории оптимизации?
9. На основании какого утверждения возможно сведение матричной игры к паре симметричных задач линейного программирования?
10. Какая связь существует между решениями пары симметричных задач линейного программирования и решением матричной игры?
11. Любую ли матричную игру, заданную платежной матрицей, можно свести к паре задач линейного программирования?

Ход работы

Формулировка задачи. Матричная игра задана платежной матрицей:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 13 & 6 \\ 1 & 11 & 8 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 10 & 1 & 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

1. Указать возможные чистые стратегии сторон.
2. Рассматривая матричную игру как игру с природой, выяснить, какое решение целесообразно принять при следующих предположениях:

а) о вероятностях ничего определенного сказать нельзя (воспользоваться критериями Вальда, Сэвиджа и Гурвица (параметр критерия Гурвица равен 0,5));

б) накопленный опыт показывает, что вероятности состояний природы равны соответственно 0,3; 0,1; 0,2; 0,1; 0,3 (воспользоваться критерием Байеса);

в) имеющийся опыт свидетельствует, что все четыре возможных состояния равновероятны (критерий Лапласа).

3. Решить матричную игру путем сведения ее к задаче линейного программирования:

а) составить математическую модель прямой и двойственной задач;

б) найти их оптимальные планы;

в) выписать оптимальные стратегии игроков и цену игры.

Решение. У игрока A есть 4, а у игрока П – 5 возможных чистых стратегий (табл. 38).

Таблица 38

Платежная матрица

Стратегии A	Стратегии П				
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A_1	0	0	0	13	6
A_2	1	11	8	6	2
A_3	2	4	3	5	2
A_4	10	1	8	1	5

Часто приходится принимать решение, не имея достаточной информации. Если эта неопределенность не связана с сознательным противодействием противника, а определяется внешними условиями, которыми мы не можем управлять, но от которых зависит эффективность выбранной нами стратегии, то такие ситуации принято называть *статистическими играми*, или *играми с природой*.

Природа безразлична к нашему выигрышу, следовательно, ни одно ее возможное состояние нельзя отбросить. Смешанная стратегия может иметь смысл только при многократном повторении игры. Результаты игры будем представлять платежной матрицей, обозначая возможные состояния природы $П_j$. С учетом здравого смысла и практической целесообразности сформулирован ряд критериев, которые образуют логическую схему принятия решения. Для принятия решения кроме платежной матрицы используется *матрица рисков*, элементы которой есть разности между максимально возможным выигрышем при j-м состоянии природы и выигрышем при использовании i-й стратегии. Иначе говоря, это упущенная из-за невозможности предсказать состояние природы выгода.

Платежная матрица представлена в табл. 39.

Таблица 39

Платежная матрица

Стратегии A	Стратегии П							
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\min\limits_j a_{ij}$	$\max\limits_j a_{ij}$	По Гурвицу ($\lambda = 0{,}5$)
A_1	0	0	0	13	6	0	13	6,5
A_2	1	11	8	6	2	1	11	6,0
A_3	2	4	3	5	2	**2**	5	3,5
A_4	10	1	8	1	5	1	10	5,5
$\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$	10	11	8	13	6	–	–	–

Элементы матрицы рисков $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$ (табл. 40).

Таблица 40

Матрица рисков

Стратегии A	Стратегии П					
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\max\limits_j r_{ij}$
A_1	10 – 0 = 10	11	8	0	0	11
A_2	10 – 1 = 9	0	0	7	4	9
A_3	10 – 2 = 8	7	5	**8**	4	8
A_4	10 – 10 = 0	10	0	12	1	12

В условиях полной неопределенности используются следующие критерии:

– *максиминный критерий Вальда.* Находим максимум из минимумов и соответствующую ему стратегию $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$. Природа рассматривается как противодействующая сторона. Это крайний пессимизм. Для приведенного примера нам следует выбрать стратегию A_3 (при этом минимальный гарантированный выигрыш равен двум, см. табл. 39);

– *критерий Сэвиджа (минимаксного риска).* Выбирается стратегия $\min\limits_i \max\limits_j r_{ij}$, обеспечивающая минимум риска при самых неблагоприятных условиях (минимизируем максимальный риск). Это также крайний пессимизм, но по отношению к величине риска. В рассматриваемом примере это также стратегия A_3 (при этом максимальный возможный риск равен восьми, см. табл. 40);

– *максимаксный критерий.* Выбирается стратегия, при которой возможно получение максимального выигрыша. Это безоглядный оптимизм, иногда на него делают ставку в безвыходном положении. В данном случае это стратегия A_1 (при этом максимальный возможный выигрыш равен тринадцати, см. табл. 39);

– *критерий Гурвица (пессимизма – оптимизма)* – это промежуточный выбор между крайним пессимизмом и безоглядным оптимизмом. Стратегия выбирается в соответствии со значением

$$\max_i(\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda)\max_j a_{ij}),$$

где λ – коэффициент оптимизма ($0 \le \lambda \le 1$). При крайних значениях этого коэффициента получим соответственно минимаксный и максимаксный критерии.

При использовании этого критерия часто принимают значение параметра $\lambda = 0{,}5$ или $\lambda = 0{,}6$. Критерий Гурвица можно применить и к матрице рисков, тогда он будет иметь вид:

$$\min_i(\lambda \max_j r_{ij} + (1-\lambda)\min_j r_{ij}).$$

Лучшими стратегиями оказываются A_1 – для матрицы выигрышей и A_2 – для матрицы рисков (при этом возможный выигрыш составляет 6,5, а возможный риск равен 4,5, см. табл. 39, 40).

Если бы результаты применения различных критериев совпадали, то мы имели бы основание для выбора стратегии. Однако есть возможность сократить область выбора, опустив стратегию A_4. Окончательное же решение зависит от склонности и готовности к риску лица, принимающего решения. Стратегия A_1 перспективна, хотя и несколько рискованна, стратегии A_2 и A_3 представляются более осторожными. В подобной ситуации уместно поставить задачу сбора дополнительных статистических данных или проведения экспериментов для оценки вероятностей возможных состояний природы. Экономически такая работа будет оправдана, если затраты на ее проведение будут меньше ожидаемого выигрыша от уточнения стратегии.

Предположим, что вероятности состояний природы q_j, $j = \overline{1,\ n}$, известны и занесены в платежную матрицу (табл. 41) и матрицу рисков (табл. 42).

Таблица 41

Платежная матрица

Стратегии A	Стратегии П					
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\overline{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$
A_1	0	0	0	13	6	3,1
A_2	1	11	8	6	2	4,2
A_3	2	4	3	5	2	2,7
A_4	10	1	8	1	5	6,3
q_j	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3	–

Таблица 42

Матрица рисков

Стратегии A	Стратегии П					
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\overline{r}_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j$
A_1	10	11	8	0	0	5,7
A_2	9	0	0	7	4	4,6
A_3	8	7	5	8	4	6,1
A_4	0	10	0	12	1	2,5
q_j	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3	–

В этом случае пользуются критерием Байеса для выбора стратегии, максимизирующей средний выигрыш $\max \overline{a}_i$ или минимизирующей средний риск $\min \overline{r}_i$. Для принятых значений вероятности в обоих случаях предпочтительной оказывается стратегия A_4.

Если объективные оценки состояний природы отсутствуют, но нет оснований предпочесть одно состояние другому, то можно принять их равными, полагая $q_j = 1/n$. Такой подход называют *принципом недостаточного основания Лапласа*. Легко убедиться, что в этом случае лучшие результаты дает стратегия A_2.

В данной игре $\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 2$; $\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 6$, значит, $\alpha \neq \beta$, и игру следует решать в смешанных стратегиях. Так как цена игры $v > 0$ ($\alpha < v < \beta$), задачу можно сразу свести к задаче линейного программирования. Математическая модель задачи для игрока П:

$$f(y) = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \to \max;$$

$$\begin{cases} 13y_4 + 6y_5 \le 1, \\ y_1 + 11y_2 + 8y_3 + 6y_4 + 2y_5 \le 1, \\ 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 5y_4 + 2y_5 \le 1, \\ 10y_1 + y_2 + 8y_3 + y_4 + 5y_5 \le 1, \\ y_j \ge 0,\ j = \overline{1,\ 5}. \end{cases}$$

Математическая модель задачи для игрока *A*:

$$z(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 10x_4 \ge 1, \\ 11x_2 + 4x_3 + x_4 \ge 1, \\ 8x_2 + 3x_3 + 8x_4 \ge 1, \\ 13x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 \ge 1, \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 \ge 1, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,\ 4}. \end{cases}$$

Найдем оптимальную смешанную стратегию q^* игрока П. Для этого решим ЗЛП для игрока П, воспользовавшись *Поиском решения*. Получим табл. 43.

Таблица 43

Результат применения Поиска решения

0,010703	0,059633	0	0	0,166667	0,237003		
0	0	0	13	6	1	≤	1
1	11	8	6	2	1	≤	1
2	4	3	5	2	0,593272	≤	1
10	1	8	1	5	1	≤	1

Отсюда $y^* = (0{,}010703;\ 0{,}059633;\ 0;\ 0;\ 0{,}166667)$, $f(y^*) = 0{,}237003$.

Для нахождения оптимального решения ЗЛП для игрока *A* также можно воспользоваться *Поиском решения*, однако решение для двойственной задачи можно найти и из отчета по устойчивости:

Теневая цена
0,062691131
0,082568807
0
0,091743119

Отсюда $x^* = (0{,}062691131;\ 0{,}082568807;\ 0;\ 0{,}091743119)$, $z(x^*) = 0{,}237003$.

Остается вычислить цену игры v и компоненты q_j^* оптимальной смешанной стратегии: $v = 1/f = 1/0{,}237003 = 4{,}219355$; $q_1^* = vy_1^* = 4{,}219355 \cdot 0{,}010703 = 0{,}045161$; $q_2^* = 0{,}251613$; $q_3^* = 0$; $q_4^* = 0$; $q_5^* = 0{,}703226$.

Итак, $q^* = (0{,}045161; 0{,}251613; 0; 0; 0{,}703226)$.

Аналогично $p_1^* = vx_1^* = 4{,}219355 \cdot 0{,}062691131 = 0{,}264516$; $p_2^* = 0{,}348387$; $p_3^* = 0$; $p_4^* = 0{,}387097$.

Таким образом, оптимальной для игрока A является смешанная стратегия $p^* = (0{,}264516; 0{,}348387; 0; 0{,}387097)$.

Легко проверить, что сумма компонент каждой из оптимальных смешанных стратегий p^* и q^* равна единице, а цена игры $v = 4{,}219$, действительно, лежит между $\alpha = 2$ и $\beta = 6$.

Индивидуальные задания

Матричная игра задана платежной матрицей.

1. Указать возможные чистые стратегии сторон.

2. Рассматривая матричную игру как игру с природой, выяснить, какое решение целесообразно принять при следующих предположениях:

а) о вероятностях ничего определенного сказать нельзя (воспользоваться критериями Вальда, Сэвиджа и Гурвица (параметр критерия Гурвица равен 0,6));

б) накопленный опыт показывает, что вероятности состояний природы равны соответственно 0,5; 0,1; 0,2; 0,2 (воспользоваться критерием Байеса);

в) имеющийся опыт свидетельствует, что все четыре возможных состояния равновероятны (критерий Лапласа).

3. Решить матричную игру путем сведения ее к задаче линейного программирования:

а) составить математическую модель прямой и двойственной задач;

б) найти их оптимальные планы;

в) выписать оптимальные стратегии игроков и цену игры.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 10 \\ 3 & 0 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 9 & 6 \end{bmatrix}$. 2. $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. 3. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 & 3 \\ 6 & 1 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. 5. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 10 & 3 \\ 6 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$. 6. $\begin{bmatrix} 12 & 2 & 3 & 5 \\ 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} 10 & 7 & 11 & 8 \\ 7 & 9 & 8 & 11 \\ 1 & 11 & 2 & 15 \\ 6 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$. 8. $\begin{bmatrix} 12 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 9 & 9 & 10 \\ 1 & 11 & 12 & 15 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. 9. $\begin{bmatrix} 2 & 10 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & 9 & 10 \\ 10 & 8 & 11 & 10 \\ 7 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

10. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 & 2 \\ 8 & 5 & 9 & 10 \\ 6 & 10 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. 11. $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 6 \\ 12 & 4 & 14 & 14 \\ 1 & 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$. 12. $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 5 & 8 \\ 10 & 5 & 10 & 6 \\ 12 & 4 & 12 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

13. $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 5 & 9 \\ 8 & 6 & 8 & 7 \\ 12 & 5 & 14 & 6 \\ 7 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$. 14. $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. 15. $\begin{bmatrix} 8 & 6 & 9 & 6 \\ 12 & 5 & 12 & 5 \\ 6 & 10 & 7 & 11 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.

4.3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА»

Тема: балансовые модели.

Цели:

– изучить основные положения балансового метода;

– освоить принципы построения межотраслевого баланса и его анализ;

– научиться пользоваться MS Excel при решении и анализе моделей межотраслевого баланса.

Контрольные вопросы

1. Понятие балансового метода и балансовой модели. Приведите примеры балансовых моделей.
2. Что называется стоимостным межотраслевым балансом, из каких квадрантов он состоит?
3. Что называется валовым продуктом, промежуточным и конечным продуктами, чистой продукцией?
4. Какие цены могут быть использованы при разработке стоимостного МОБ?
5. Приведите схему МОБ.
6. Запишите экономико-математическую модель МОБ. Что называется моделью «затраты – выпуск»?
7. Что называется условно чистой продукцией?
8. Какого вида расчеты можно проводить по модели МОБ?
9. Что называется матрицей прямых материальных затрат?
10. Как определить, является ли модель продуктивной?
11. Что называется матрицей полных материальных затрат?
12. Как найти матрицу полных материальных затрат точным и приближенным методами?
13. Что называется косвенными материальными затратами? Как они связаны с прямыми?
14. Сформулируйте балансовое соотношение модели МОБ.

Ход работы

Формулировка задачи. Народное хозяйство представлено тремя отраслями: 1) тяжелая промышленность; 2) легкая промышленность; 3) сельское хозяйство. За отчетный год получены данные о межотраслевых поставках x_{ij} и вектор объемов конечного потребления Y_0 (табл. 44).

Таблица 44

Исходные данные

Отрасль	Межотраслевые потоки			Y_0	X	$Y_{\text{пл}}$	ΔY
	1	2	3				
1	80	15	25	80	300	150	+10
2	10	60	5	225	400	300	–10
3	10	30	30	30	400	50	+50

Необходимо рассчитать:

1) матрицу коэффициентов прямых материальных затрат $A = \left[a_{ij} \right]$, матрицу «затраты – выпуск» $(E - A)$ и вектор конечного потребления Y для заданного вектора валовых выпусков X. Результаты представить в виде балансовой таблицы;

2) матрицу коэффициентов полных материальных затрат $B = \left[b_{ij} \right]$ и валовые объемы выпуска $X_{\text{пл}}$ для заданного вектора конечного потребления $Y_{\text{пл}}$. Определить плановые объемы межотраслевых поставок $(x_{ij})_{\text{пл}}$ и пояснить, как валовые объемы выпуска продукции $(X_{\text{пл}})_i$, $i = \overline{1, n}$, распределились между отраслями. Результаты представить в виде балансовой таблицы;

3) приросты валовых объемов выпуска, если конечное потребление изменится на ΔY_i% по сравнению с $Y_{\text{пл}}$;

4) матрицы коэффициентов косвенных затрат первого A^1, второго A^2 и третьего A^3 порядков, сравнить сумму затрат $\tilde{B} = (E + A) + (A^1 + A^2 + A^3)$ с полными затратами B, найти относительные погрешности.

Решение.

По данным задачи находим вектор объемов валовых выпусков:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 80 + 15 + 25 + 80 \\ 10 + 60 + 5 + 225 \\ 10 + 30 + 30 + 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Находим матрицу коэффициентов прямых затрат:

$$A=\begin{bmatrix} 80/200 & 15/300 & 25/100 \\ 10/200 & 60/300 & 5/100 \\ 10/200 & 30/300 & 30/100 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0,4 & 0,05 & 0,25 \\ 0,05 & 0,2 & 0,05 \\ 0,05 & 0,1 & 0,3 \end{bmatrix}.$$

Матрица «затраты – выпуск» примет вид:

$$(E-A)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0,4 & 0,05 & 0,25 \\ 0,05 & 0,2 & 0,05 \\ 0,05 & 0,1 & 0,3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0,6 & -0,05 & -0,25 \\ -0,05 & 0,8 & -0,05 \\ -0,05 & -0,1 & 0,7 \end{bmatrix}.$$

Новый вектор конечного потребления найдем по данному вектору валовых выпусков X, используя функцию МУМНОЖ:

$$Y=\left(E-A\right)X=\begin{bmatrix} 0,6 & -0,05 & -0,25 \\ -0,05 & 0,8 & -0,05 \\ -0,05 & -0,1 & 0,7 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 300 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 60 \\ 285 \\ 225 \end{bmatrix}.$$

Чтобы построить таблицу МОБ на расчетный период, нужно определить межотраслевые потоки:

$$x_{11}=0,4\cdot 300=120;\ x_{12}=0,05\cdot 400=20;\ x_{13}=0,25\cdot 400=100;$$

$$x_{21}=0,05\cdot 300=15;\ x_{22}=0,2\cdot 400=80;\ x_{23}=0,05\cdot 400=20;$$

$$x_{31}=0,05\cdot 300=15;\ x_{32}=0,1\cdot 400=40;\ x_{33}=0,3\cdot 400=120.$$

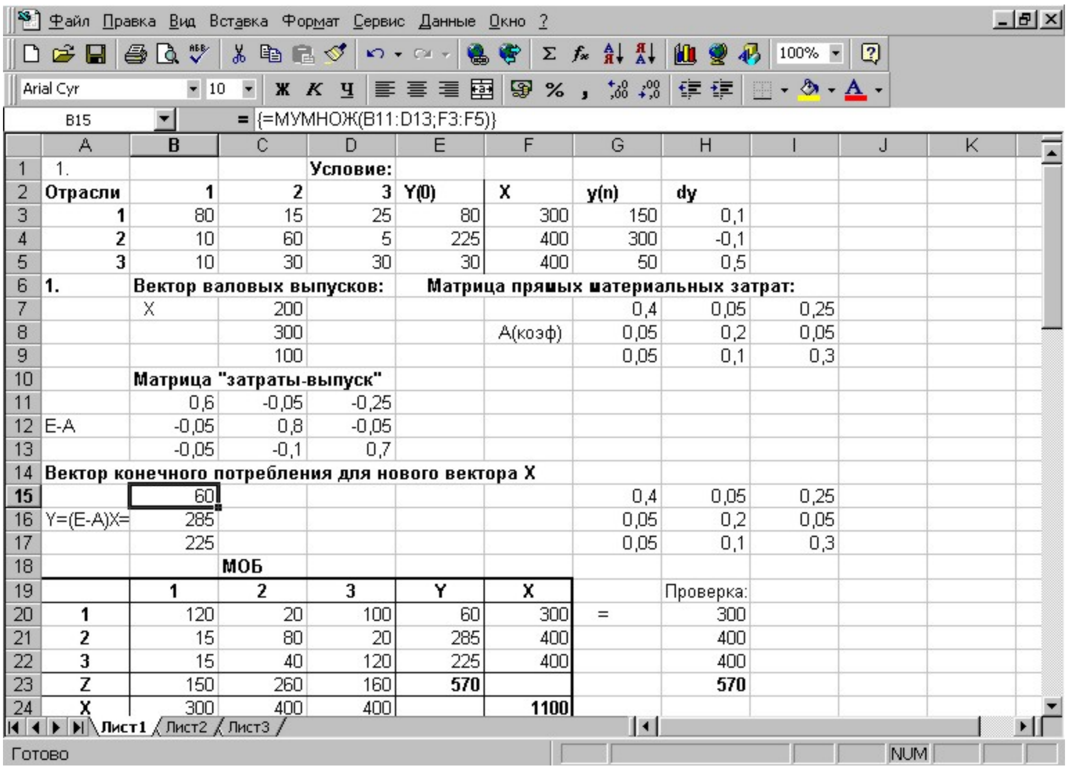
Межотраслевой баланс на расчетный период представлен в табл. 45.

Таблица 45

МОБ на расчетный период

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Продукция	
	1	2	3	конечная Y	валовая X
1	120	20	100	60	300
2	15	80	20	285	400
3	15	40	120	225	400
Z	150	260	160	**570**	–
X	300	400	400	–	**1100**

Все расчеты производятся на компьютере. Данный межотраслевой баланс находится в ячейках A19:F24 (рис. 19).



Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?

Arial Cyr 10 100%

B15 = {=МУМНОЖ(B11:D13;F3:F5)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	1.			Условие:							
2	Отрасли	1	2	3	Y(0)	X	y(n)	dy			
3	1	80	15	25	80	300	150	0,1			
4	2	10	60	5	225	400	300	-0,1			
5	3	10	30	30	30	400	50	0,5			
6	1.	Вектор валовых выпусков:			Матрица прямых материальных затрат:						
7		X	200				0,4	0,05	0,25		
8			300			А(коэф)	0,05	0,2	0,05		
9			100				0,05	0,1	0,3		
10		Матрица "затраты-выпуск"									
11		0,6	-0,05	-0,25							
12	E-A	-0,05	0,8	-0,05							
13		-0,05	-0,1	0,7							
14	Вектор конечного потребления для нового вектора X										
15		60					0,4	0,05	0,25		
16	Y=(E-A)X=	285					0,05	0,2	0,05		
17		225					0,05	0,1	0,3		
18			МОБ								
19		1	2	3	Y	X		Проверка:			
20	1	120	20	100	60	300	=	300			
21	2	15	80	20	285	400		400			
22	3	15	40	120	225	400		400			
23	Z	150	260	160	570			570			
24	X	300	400	400		1100					

Лист1 Лист2 Лист3

Готово NUM

Рис. 19. Рабочий лист MS Excel

Найдем матрицу коэффициентов полных материальных затрат B путем обращения матрицы $(E - A)$ с помощью функции МОБР:

$$B = \left(E - A\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,735 & 0,187 & 0,633 \\ 0,118 & 1,273 & 0,133 \\ 0,14 & 0,196 & 1,492 \end{bmatrix}.$$

Объем производства валовой продукции $X_{\text{пл}}$ при заданном объеме конечной продукции $Y_{\text{пл}}$ в плановом периоде можно определить следующим образом:

$$X_{\text{пл}} = (E - A)^{-1} Y_{\text{пл}} = B Y_{\text{пл}} = \begin{bmatrix} 348,183 \\ 406,409 \\ 154,357 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 348 \\ 406 \\ 154 \end{bmatrix}.$$

Чтобы построить таблицу МОБ на планируемый период, нужно определить межотраслевые потоки.

Межотраслевой баланс на плановый период представлен в табл. 46.

Таблица 46

МОБ на плановый период

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Продукция	
	1	2	3	конечная Y	валовая X
1	139	20	39	150	348
2	17	81	8	300	406
3	17	41	46	50	154
Z	174	264	62	**500**	–
X	348	406	154	–	**909**

Так как по условию задачи значение Y_1 должно увеличиться на 10%, Y_2 – уменьшиться на 10%, а Y_3 – увеличиться на 50%, то компоненты нового вектора конечного потребления будут равны:

$$Y_1 + \Delta Y_1 = 150 + 0,1 \cdot 150 = 165;$$

$$Y_2 + \Delta Y_2 = 300 - 0,1 \cdot 300 = 270;$$

$$Y_3 + \Delta Y_3 = 50 + 0,5 \cdot 50 = 75,$$

где $\Delta Y = \begin{bmatrix} 15 \\ -30 \\ 25 \end{bmatrix}$.

Прирост валовых объемов выпуска, соответствующий новому вектору конечного потребления, найдем по формуле:

$$\Delta X = (E - A)^{-1} \Delta Y = B \Delta Y = \begin{bmatrix} 36,23 \\ -33,137 \\ 33,57 \end{bmatrix}.$$

Косвенные затраты первого порядка равны: $A^1 = A \cdot A$, второго – $A^2 = A \cdot A^1$, третьего – $A^3 = A \cdot A^2$. Найдем сумму затрат $\tilde{B} = (E + A) + (A^1 + A^2 + A^3) = \left[\tilde{b}_{ij}\right]_{n \times n}$ и ее сравним с полными затратами:

$$A^1 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0,175 & 0,056 & 0,178 \\ 0,033 & 0,048 & 0,038 \\ 0,04 & 0,053 & 0,108 \end{bmatrix};$$

$$A^2 = A \cdot A^1 = \begin{bmatrix} 0,082 & 0,038 & 0,01 \\ 0,017 & 0,015 & 0,022 \\ 0,024 & 0,023 & 0,045 \end{bmatrix};$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 0,04 & 0,022 & 0,052 \\ 0,009 & 0,006 & 0,012 \\ 0,013 & 0,01 & 0,021 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица полных материальных затрат равна:

$$\tilde{B} = (E + A) + (A^1 + A^2 + A^3) = \begin{bmatrix} 1,7 & 0,16 & 0,58 \\ 0,11 & 1,27 & 0,12 \\ 0,13 & 0,19 & 1,47 \end{bmatrix}.$$

Относительные погрешности составят (в процентах):

$$\frac{b_{ij} - \tilde{b}_{ij}}{b_{ij}} \cdot 100\% = \begin{bmatrix} 2,24 & 12,53 & 8,47 \\ 7,46 & 0,44 & 9,06 \\ 9,72 & 4,76 & 1,32 \end{bmatrix}.$$

Индивидуальные задания

Народное хозяйство представлено тремя отраслями: 1) тяжелая промышленность; 2) легкая промышленность; 3) сельское хозяйство. За отчетный период получены данные о межотраслевых поставках x_{ij} и вектор объемов конечного потребления Y_0 (табл. 47).

Необходимо рассчитать:

1) матрицу коэффициентов прямых материальных затрат $A = \left[a_{ij}\right]$, матрицу «затраты – выпуск» ($E - A$) и вектор конечного потребления Y для заданного вектора валовых выпусков X. Результаты представить в виде балансовой таблицы;

2) матрицу коэффициентов полных материальных затрат $B = \left[b_{ij}\right]$ и валовые объемы выпуска $X_{\text{пл}}$ для заданного вектора конечного потребления $Y_{\text{пл}}$. Определить плановые объемы межотраслевых поставок $(x_{ij})_{\text{пл}}$ и пояснить, как валовые объемы выпуска продукции $(X_{\text{пл}})_i$, $i = \overline{1, n}$, распределились между отраслями. Результаты представить в виде балансовой таблицы;

3) приросты валовых объемов выпуска, если конечное потребление изменится на ΔY_i % по сравнению с $Y_{пл}$;

4) матрицы коэффициентов косвенных затрат первого A^1, второго A^2 и третьего A^3 порядков, сравнить сумму затрат $\tilde{B} = (E + A) + (A^1 + A^2 + A^3)$ с полными затратами B, найти относительные погрешности.

Таблица 47

Исходные данные

Вариант	Отрасль	Межотраслевые потоки			Y_0	X	$Y_{пл}$	ΔY
		1	2	3				
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	109	0	200	300	250	+20
	2	62	0	382	100	550	150	–5
	3	0	54	764	3000	4000	3020	–10
2	1	36	194	102	250	360	200	+10
	2	0	65	203	400	600	420	+10
	3	107	0	102	300	500	350	–10
3	1	24	124	0	100	250	120	+30
	2	0	33	31	300	450	320	+20
	3	98	0	93	120	350	140	+10
4	1	457	0	67	1000	1550	1000	–10
	2	305	100	0	600	1100	650	+20
	3	0	0	267	200	700	250	–5
5	1	236	249	0	300	800	340	+40
	2	158	997	136	1200	2500	1100	+10
	3	79	0	0	600	680	560	–15
6	1	0	0	120	160	300	200	–5
	2	28	57	0	200	600	220	–10
	3	112	29	160	100	500	140	+20
7	1	120	0	20	260	500	300	–5
	2	80	50	0	370	500	460	+10
	3	0	0	80	120	300	160	+30
8	1	86	177	91	500	880	550	–10
	2	173	118	0	300	600	300	+10
	3	0	236	272	400	1000	450	+40
9	1	0	0	165	120	300	200	+30
	2	28	132	0	500	800	600	–10
	3	114	66	220	150	600	150	+5
10	1	135	0	15	300	500	310	+10
	2	90	21	0	100	240	120	+15
	3	0	0	60	90	160	100	–20

Окончание табл. 47

1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	1	90	25	15	70	300	250	–10
	2	50	20	30	250	400	300	+10
	3	20	30	20	130	300	250	+20
12	1	80	15	25	80	300	150	–10
	2	60	20	320	100	600	400	–10
	3	100	20	80	120	400	300	+20
13	1	450	20	30	1000	1500	1200	+10
	2	150	900	130	1200	2000	1500	–1
	3	110	30	160	100	400	500	–20
14	1	120	0	20	160	400	500	+10
	2	170	110	20	300	500	400	–10
	3	110	60	230	400	600	500	–20
15	1	130	10	60	200	500	600	+20
	2	90	20	40	100	300	400	–10
	3	80	10	30	100	400	300	+10

4.4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «ЭЛЕМЕНТЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ»

Тема: сетевое планирование и управление.

Цели:

– изучить основные понятия сетевого планирования и управления;

– освоить этапы построения сетевого графика и правила расчета его параметров;

– научиться пользоваться MS Excel при решении и анализе сетевых задач.

Контрольные вопросы

1. Что называется событием, работой, фиктивной работой?
2. Сформулируйте правила построения сетевых графиков.
3. Какие временные параметры сетевого графика Вы знаете?
4. Что называется ранним, поздним сроком свершения события, резервом времени события?

5. Что называется ранним, поздним сроком начала (окончания) работы, полным резервом времени работы?

6. Какие виды резервов времени Вы знаете?

7. Дайте определение критического пути.

8. Что называется линейным графиком (графиком Ганта)?

9. Как производится учет потребностей в ресурсах при выполнении комплекса работ?

10. Как производится оптимизация сетевого графика с учетом потребностей в ресурсах?

Ход работы

Теоретические сведения. *Ранним сроком* $t_{р}(i)$ *свершения события i* называется самый ранний момент времени, к которому завершаются все предшествующие этому событию работы. Так как может быть несколько путей, предшествующих данному событию, то ранний срок свершения события определяется продолжительностью максимального предшествующего пути: $t_{р}(i) = t[L_1(i)]$, где $L_1(i)$ – *максимальный предшествующий путь*. Ранний срок свершения последнего события совпадает с критическим временем.

Поздним сроком $t_{п}(i)$ *свершения события i* является самый поздний момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для завершения всех работ, следующих за этим событием, без превышения критического времени $t_{кр}$. Очевидно, что $t_{п}(i)$ определяется разностью между $t_{кр}$ и длиной максимального из последующих путей $L_2(i)$: $t_{п}(i) = t_{кр} - t[L_2(i)]$. Для событий критического пути ранний и поздний сроки свершения совпадают.

Зная сроки свершения событий, можно определить *временные параметры работ*.

Ранний срок начала работы $(i; j)$ равен раннему сроку свершения события i: $t'_{р}(i; j) = t_{р}(i)$.

Ранний срок окончания работы $(i; j)$ равен сумме раннего срока свершения ее начального события и продолжительности работы: $t''_{р}(i; j) = t_{р}(i) + t_{ij}$.

Поздний срок окончания работы $(i; j)$ совпадает с поздним сроком свершения ее конечного события: $t''_{п}(i; j) = t_{п}(j)$.

Поздний срок начала работы $(i; j)$ равен разности между поздним сроком свершения ее конечного события и продолжительностью работы: $t'_{п}(i; j) = t_{п}(j) - t_{ij}$.

Так как сроки выполнения работ находятся в границах, определяемых $t'_{\text{р}}(i;\, j)$ и $t''_{\text{п}}(i;\, j)$, то они могут иметь разного вида резервы времени.

Полный резерв времени работы

$$R_{\text{полн}}(i;\, j) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t_{ij}.$$

Независимый (свободный) резерв времени работы

$$R_{\text{нез}}(i;\, j) = t_{\text{р}}(j) - t_{\text{п}}(i) - t_{ij}.$$

Величина независимого резерва показывает продолжительность вынужденного ожидания наступления конечного события данной работы.

Частный резерв времени работы первого вида

$$R'(i;\, j) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{п}}(i) - t_{ij}.$$

Частный резерв времени работы второго вида

$$R''(i;\, j) = t_{\text{р}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t_{ij}.$$

Формулировка задачи. Для перестройки производства в порядке перевода его на более интенсивную технологию необходимо осуществить комплекс подготовительных мероприятий (работ). С этой целью создана группа из R специалистов и составлен сетевой график выполнения работ (рис. 20).

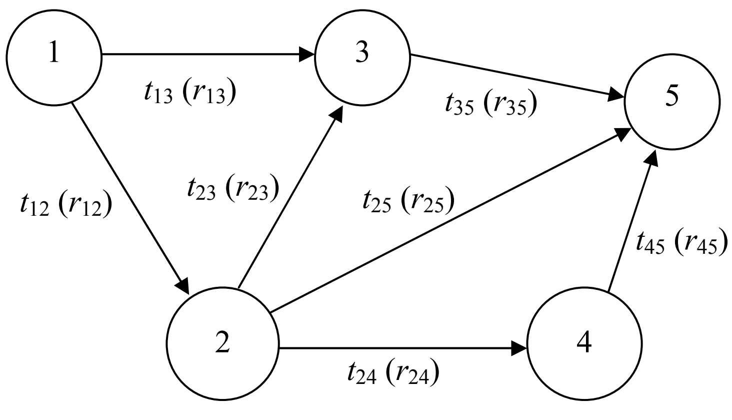


Рис. 20. Сетевой график

Известна продолжительность t_{ij} выполнения каждой работы $(i;\, j)$ комплекса (могут быть известны и количества ресурсов, затрачиваемых при выполнении соответствующих работ r_{ij}).

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 48.

Таблица 48

Исходные данные

Параметры задачи	t_{12}	t_{13}	t_{23}	t_{24}	t_{25}	t_{35}	t_{45}
Продолжительность работы, дней	3	5	2	6	5	6	3

1. Найти ранние и поздние сроки свершения событий и их резервы времени. Определить длину критического пути.

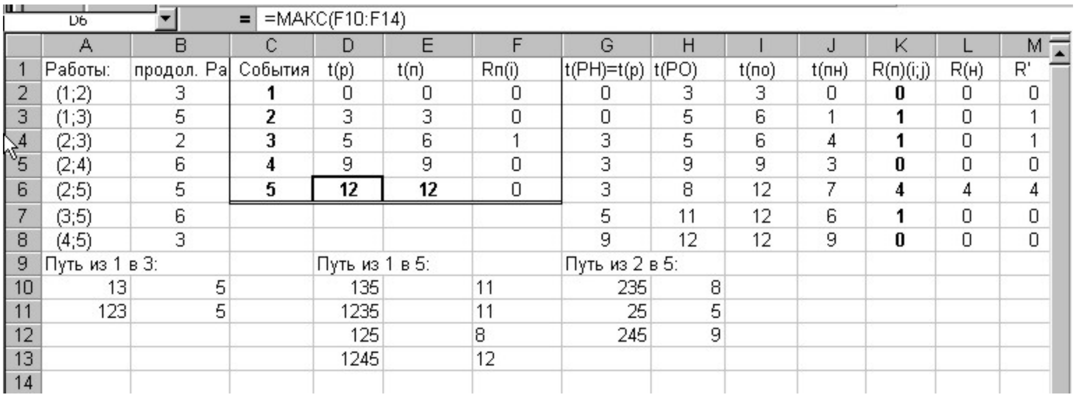
2. Найти ранние и поздние сроки начала и окончания работ.

3. Найти резервы времени работ (четыре типа) и построить линейный график и график интенсивности использования ресурсов.

4. Определить, в какие моменты времени для выполнения работ проекта не хватает имеющихся ресурсов.

Решение. Сначала перечислим все имеющиеся работы и их продолжительность, затем с использованием соответствующих формул рассчитаем ранний $t_р(i)$ и поздний $t_п(i)$ сроки свершения всех событий (см. рис. 21, ячейки C1:F6).

Для определения раннего срока свершения события сначала необходимо определить длину всех имеющихся путей сетевого графика. Рассмотрим пути из события (1) в событие (3); из события (1) в событие (5); из события (2) в событие (5) (т. к. для этих событий пути не единственные). Пути и их длина представлены на рис. 21 в строках 9–13.



D6 =МАКС(F10:F14)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Работы:	продол. Ра	События	t(р)	t(п)	Rп(i)	t(PH)=t(р)	t(PO)	t(по)	t(пн)	R(п)(i;j)	R(н)	R'
2	(1;2)	3	**1**	0	0	0	0	3	3	0	**0**	0	0
3	(1;3)	5	**2**	3	3	0	0	5	6	1	**1**	0	1
4	(2;3)	2	**3**	5	6	1	3	5	6	4	**1**	0	1
5	(2;4)	6	**4**	9	9	0	3	9	9	3	**0**	0	0
6	(2;5)	5	**5**	**12**	**12**	0	3	8	12	7	**4**	4	4
7	(3;5)	6					5	11	12	6	**1**	0	0
8	(4;5)	3					9	12	12	9	**0**	0	0
9	Путь из 1 в 3:			Путь из 1 в 5:			Путь из 2 в 5:						
10	13	5		135		11	235	8					
11	123	5		1235		11	25	5					
12				125		8	245	9					
13				1245		12							
14													

Рис. 21. Рабочий лист MS Excel

Далее по формуле $t_р(i) = t[L_1(i)]$, например, для события (3) получаем: $t_р(3) = t[L_1(3)]$. Используя функцию MS Excel МАКС, получим: МАКС(B10:B11) = 5. Определив ранний срок свершения последнего, пятого события, найдем критическое время: $t_{кр}(5) = 12$.

Определим поздние сроки свершения событий по формуле $t_п(i) = t_{кр} - t[L_2(i)]$. Для события (3) имеем: $t_п(3) = t_{кр} - t[L_2(3)] = t_{кр} - t_{35} = 12 - 6 = 6$, а для события (2) получаем: $t_п(2) = t_{кр} - t[L_2(2)] = t_{кр} - \max\{t_{23} + t_{35};\ t_{25};\ t_{24} + t_{45}\} = 12 - \max\{8;\ 5;\ 9\} = 3$.

Разность между поздним и ранним сроками свершения события составляет *резерв времени события*: $R(i) = t_п(i) - t_р(i)$. Резервы критических событий равны нулю. На рис. 21 резервы событий представлены в ячейках F2:F6. Таким образом, события (1), (2), (4), (5) принадлежат критическому пути.

Определим временные параметры работ: ранний срок начала работы (i; j), ранний срок окончания работы (i; j), поздний срок окончания работы (i; j), поздний срок начала работы (i; j). Например, для работы (2; 3): $t'_р(2;\ 3) = t_р(2) = 3$; $t''_р(2;\ 3) = t_р(2) + t_{23} = 3 + 2 = 5$; $t''_п(2;\ 3) = t_п(3) = 6$; $t'_п(2;\ 3) = t_п(3) - t_{23} = 6 - 2 = 4$. Аналогичным образом рассчитываются временные параметры остальных работ (см. рис. 21, ячейки G2:J8).

Так как сроки выполнения работ находятся в границах, определяемых $t'_р(i;\ j)$ и $t''_п(i;\ j)$, то они могут иметь разного вида резервы времени: полный резерв времени работы, независимый (свободный) резерв времени работы, частный резерв времени работы первого вида (гарантийный), частный резерв времени работы второго вида.

Вычисляем резервы времени работ задачи (на рис. 21 они находятся в столбцах К, L, M).

На основе сетевого графика составим линейный график (график Ганта), на котором изображается время начала и окончания каждой работы, а также полный резерв времени для каждой работы. По графику также определим работы, принадлежащие критическому пути. Для построения линейного графика нам понадобятся следующие данные: ранний срок начала работы, продолжительность работы и полный резерв времени работы. Скопируем эти данные в ячейки A16:C23 (см. рис. 22). В столбце D укажем, принадлежит ли данное событие критическому пути (используем тот факт, что если полный резерв времени равен нулю, то событие принадлежит критическому пути). Функция ЕСЛИ возвращает одно значение, если указанное условие истинно, и другие, если оно ложно. Пример использования данной функции см. на рис. 22, ячейка D17.

Построение диаграммы «Линейный график»

1. Щелкнуть мышью на кнопке Мастер диаграмм. На экране появится окно ***Мастер диаграмм (шаг 1 из 4): тип диаграмм***. Во вкладке *Стандартные* в поле *Тип* выбрать *Линейчатая*, в поле *Вид* – *Вид 2*. Нажать *Далее*.

2. На экране появится окно ***Мастер диаграмм (шаг 2 из 4): источник данных диаграммы***. Во вкладке *Диапазон данных* в поле *Диапазон* ввести данные (ячейки A17:C23), во вкладке *Ряд* в поле *Подписи по оси X* ввести столбец «Работы» (ячейки A2:A8, рис. 21). Нажать *Далее*.

3. На экране появится окно ***Мастер диаграмм (шаг 3 из 4): параметры диаграммы***. В этом окне можно ввести легенду, а также название диаграммы и осей. Вводимый текст будет виден на экране. Нажать *Далее*.

4. На экране появится окно ***Мастер диаграмм (шаг 4 из 4): размещение диаграммы***. В поле *Поместить диаграмму на листе* выбрать *Имеющемся*. Нажать *Готово*. На экране появится диаграмма (рис. 22).

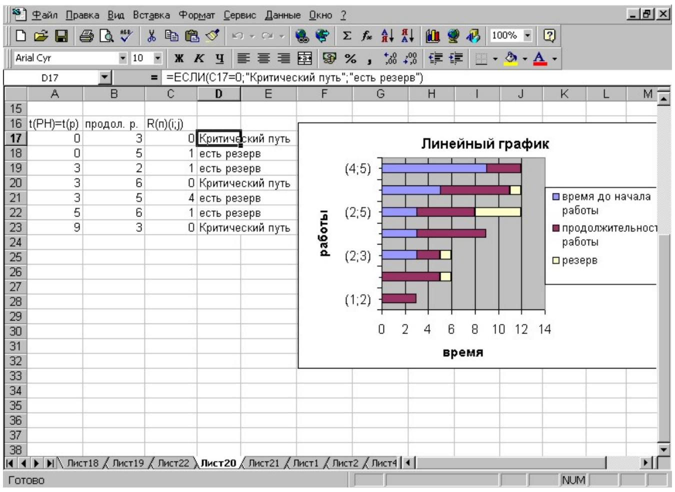


Рис. 22. Диаграмма «Линейный график»

Индивидуальные задания

Для перестройки производства в порядке перевода его на более интенсивную технологию необходимо осуществить комплекс подготовительных мероприятий (работ). С этой целью создана группа из R специалистов и составлен сетевой график выполнения работ (рис. 23).

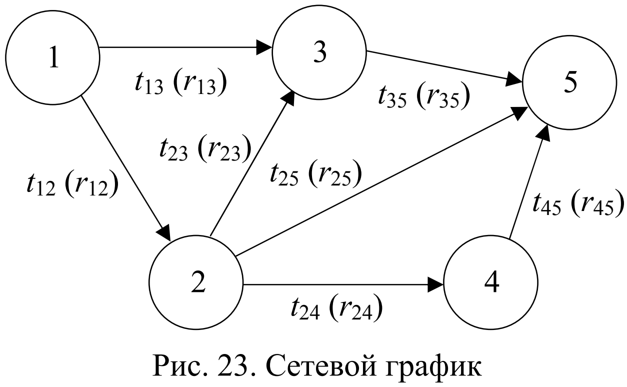


Рис. 23. Сетевой график

Известна продолжительность t_{ij} выполнения каждой работы (i; j) комплекса (могут быть известны и количества ресурсов, затрачиваемых при выполнении соответствующих работ r_{ij}).

1. Найти ранние и поздние сроки свершения событий и их резервы времени. Определить длину критического пути.
2. Найти ранние и поздние сроки начала и окончания работ.
3. Найти резервы времени работ (четыре типа) и построить линейный график и график интенсивности использования ресурсов.
4. Определить, в какие моменты времени для выполнения работ проекта не хватает имеющихся ресурсов.

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 49.

Таблица 49

Исходные данные

Параметры задачи	Продолжительность работы														
	Вариант														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
R	14	10	12	13	10	10	11	12	14	15	13	11	11	10	13
t_{12}	4	3	4	6	3	6	2	7	3	6	3	3	4	2	2
t_{13}	2	5	8	4	8	2	5	4	5	2	3	7	9	4	4
t_{23}	4	5	3	6	8	9	10	7	11	8	3	2	3	3	10
t_{24}	3	2	5	6	4	8	4	8	4	1	2	4	5	3	3
t_{25}	5	6	2	5	5	5	3	2	6	5	4	2	6	2	5
t_{35}	6	1	6	8	2	4	5	6	2	3	5	5	3	4	2
t_{45}	7	7	3	1	9	4	2	5	4	2	6	2	10	3	3
r_{12}	5	7	3	5	5	5	6	4	7	7	4	2	6	5	6
r_{13}	7	4	9	9	3	8	3	8	5	5	6	8	4	2	4
r_{23}	11	8	4	5	7	12	8	9	4	6	10	8	4	2	4
r_{24}	9	5	4	8	7	3	7	5	3	8	8	3	8	6	3
r_{25}	8	3	6	2	4	6	5	7	9	4	7	3	8	4	8
r_{35}	10	9	5	7	6	7	3	3	5	9	9	4	7	2	4
r_{45}	4	5	7	4	2	4	4	6	3	6	3	6	3	3	2

5. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ПРАКТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

5.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

Вопросы

1. Модели оптимального планирования. Задачи и этапы экономико-математического моделирования.
2. Модели оптимального планирования в промышленности и АПК.
3. Модели межотраслевого баланса. Основные понятия.
4. Стоимостной межотраслевой баланс.
5. Экономико-математическая модель МОБ.
6. Методы и модели массового обслуживания. Основные понятия.
7. Аналитический расчет характеристик СМО. Уравнения Колмогорова.
8. СМО с отказами.
9. Элементы теории игр. Основные понятия.
10. Матричные игры с нулевой суммой.
11. Решение матричных игр 2×2.
12. Статистические игры.
13. Модели управления запасами. Основные понятия.
14. Основная модель управления запасами.
15. Сетевое планирование и управление. Основные понятия.
16. Временные параметры сетевого графика.
17. Построение линейного графика (графика Ганта).

Модели оптимального планирования

Задачи и этапы экономико-математического моделирования. Под *экономико-математической моделью* исследуемого экономического объекта (или процесса) будем понимать его математическое описание. *Экономико-математическое моделирование* – это исследование таких процессов посредством их математических моделей.

Экономические процессы, как правило, *управляемы*, т. е. могут осуществляться различными способами, в зависимости от принятой стратегии их реализации. В связи с этим возникает задача нахождения наилучшей (в некотором смысле) из всех возможных стратегий управления этим процессом. Такую стратегию называют *оптимальным* (в заданном смысле) *управлением*, а саму задачу – *оптимизационной*.

Каждая экономико-математическая оптимизационная задача (модель) обязательно включает следующие принципиальные моменты:

1. Математическое описание исследуемого экономического объекта и/или соответствующих экономических процессов, т. е. входных (*экзогенных*) и выходных (*эндогенных*) переменных, переменных текущего *состояния* объекта и переменных, которыми можно управлять, – *управлений*, а также существующих между переменными зависимостей.
2. *Ограничения на управления* – описание множества возможных управляющих воздействий – *класс допустимых управлений*.
3. *Ограничения на переменные* (планы, реализации, фазовые траектории), вытекающие из экономического смысла задачи.
4. Цель управления – *критерий качества* – выбранный количественный показатель эффективности управления, обычно представляющий собой функцию (*целевую*) экзогенных переменных.

В экономико-математическом моделировании рассматриваются следующие основные задачи:

– анализ экономических объектов и процессов;

– экономическое прогнозирование развития экономических процессов;

– выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии.

Обычно экономико-математическое моделирование реализуется в несколько этапов:

1. Анализ законов, описывающих связи основных объектов (переменных) модели.
2. Теоретическое исследование построенной математической модели – решение *прямой задачи* и, как следствие, исследование свойств эндогенных переменных и их сопоставление с реальными наблюдениями изучаемых явлений.
3. Проверка *адекватности* модели, т. е. выяснение того, удовлетворяет (*согласуется*) ли гипотетическая математическая модель моделируемому экономическому процессу.
4. Последующий анализ и уточнение (модернизация) математической модели с учетом накопленных данных об изучаемом экономическом процессе.

На промышленных предприятиях накоплен немалый опыт решения экономико-математических задач, результаты которых успешно используются на отдельных предприятиях. К ним можно отнести модели формирования производственной программы предприятия, оптимального использования производственных мощностей, оптимизации состава промышленных смесей и раскроя материалов и др.

Модели оптимального планирования в промышленности и АПК. В современных экономических условиях критериями эффективности использования трудовых, материальных и финансовых ресурсов, а также критериями оценки хозяйственной деятельности предприятия могут служить *чистый доход*, понимаемый как разность между стоимостью продаваемой продукции и затратами на ее производство; *показатель прибыли*; *рентабельность*; *показатель реализованной продукции*; *производительность труда*, определяемая как выпуск товарной продукции, приходящийся на одного работника; *показатель загрузки оборудования*, его имеет смысл применять лишь тогда, когда на предприятии установлено дорогостоящее оборудование и простои его нежелательны.

Система ограничений экономико-математической модели задачи определения производственного плана предприятия должна учитывать производственные ресурсы и специфические условия работы предприятия, народнохозяйственные потребности в его продукции.

В зависимости от вида целевой функции и ограничений соответствующая оптимизационная задача называется:

1. *Линейной*, если ограничения и целевая функция линейны относительно переменных, и *нелинейной* в противном случае.

2. *Задачей целочисленного программирования*, если параметры управления могут принимать лишь целые значения.

3. *Задачей параметрического программирования*, если исходные параметры задачи могут изменяться в заданных пределах.

4. *Задачей динамического программирования*, если процесс выработки решения развертывается во времени или имеет многошаговый характер. Методами динамического программирования могут решаться задачи планирования, управления производством, поставками и запасами в условиях изменяющегося спроса, распределения ограниченных ресурсов, в частности, размещения капитальных вложений, замены оборудования, обновления и восстановления элементов сложных систем и т. д.

После построения модели осуществляется поиск оптимального решения. В зависимости от вида оптимизационной модели используются различные методы математического программирования.

Задача оптимизации производственной программы предприятия имеет следующий вид. Предприятие выпускает несколько видов продукции П$_j$, $j = \overline{1, n}$, имея ограниченный запас ресурсов Р$_i$, $i = \overline{1, m}$. Известны нормы затрат ресурса Р$_i$ на производство единицы продукции $\Pi_j - a_{ij}$. Требуется найти такой план производства продукции, который обеспечивает максимум эффекта от выпуска (максимум выручки от реализации, минимум затрат), если c_j – эффективность единицы продукции (например, цена).

Сформулируем математическую модель задачи. Определим переменные модели: x_j – объем производства продукции j-го вида, $j = \overline{1, n}$.

В этих обозначениях задача оптимизации производственной программы запишется в следующем виде (максимизируется выручка от реализации):

$$z(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \max$$

при ограничениях на запас i-го ресурса:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \; i = \overline{1, m}$$

и условии неотрицательности переменных:

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1, n}.$$

Пример 1. Пусть предприятие выпускает два вида изделий и располагает следующими ресурсами (в расчете на сутки): фонд рабочего времени производственных рабочих – 780 чел.-ч, фонд сырья – 850 ед., электроэнергии – 790 ед. Цена изделия I вида – 6 ден. ед., II вида – 7 ден. ед.

Требуется определить оптимальную производственную программу предприятия с учетом получения максимальной прибыли.

Нормы расхода ресурсов в расчете на одно изделие представлены в табл. 50.

Таблица 50

Исходные данные

Ресурс	Изделие	
	I вид	II вид
Рабочее время, чел.-ч	2	4
Сырье, ед.	1	5
Электроэнергия, ед.	3	4

Решение. Математическое описание исследуемого объекта или процесса начинается с выбора переменных модели. Так как в рассматриваемом примере требуется построить модель для определения оптимальной структуры производственной программы по выпуску изделий I и II видов, введем переменные: x_1 – суточный объем производства продукции I вида; x_2 – суточный объем производства продукции II вида.

Запишем ограничения на ресурсы.

Рабочее время. Так как нормы расхода рабочего времени для производства единицы продукции I и II видов составляют 2 и 4 чел.-ч соответственно, то для производства изделий I вида в объеме x_1, изделий II вида в объеме x_2 требуется $2x_1 + 4x_2$ (чел.-ч). С другой стороны, объем использования оборудования не должен превышать имеющегося суточного фонда рабочего времени – 780 чел.-ч. Таким образом, получаем ограничение:

$$2x_1 + 4x_2 \le 780.$$

Аналогично составляются ограничения для оставшихся видов ресурсов.

Сырье:

$$x_1 + 5x_2 \le 850.$$

Электроэнергия:

$$3x_1 + 4x_2 \le 790.$$

Кроме того, объем производства изделий каждого вида не может быть отрицательным: $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$.

В данном примере целью управления (критерием качества) является получение максимальной прибыли, что приводит к экономико-математической оптимизационной модели – задаче максимизации целевой функции:

$$z(x) = 6x_1 + 7x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 780; \\ x_1 + 5x_2 \le 850; \\ 3x_1 + 4x_2 \le 790; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Сформулированная модель является задачей линейного программирования.

Модели межотраслевого баланса

Основные понятия. Под *балансовой моделью* понимается система уравнений, каждое из которых выражает требование баланса между производимым отдельными экономическими объектами количеством продукции и совокупной потребностью в этой продукции. *Балансовый метод* – это метод взаимного сопоставления имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них. Примерами балансовых соответствий могут быть: соответствие наличия рабочей силы и количества рабочих мест; платежеспособного спроса населения и предложения товаров и услуг и т. д. При этом соответствие понимается либо как равенство, либо (менее жестко) как достаточность ресурсов для покрытия потребности (следовательно, допускается наличие некоторого резерва).

Балансовые модели строятся в виде числовых матриц, поэтому они относятся к матричным экономико-математическим моделям.

Некоторые виды балансовых моделей:

1) частные материальные, трудовые и финансовые балансы для народного хозяйства и отдельных отраслей;

2) межотраслевые балансы;

3) матричные финансовые планы предприятий и фирм.

Совокупный общественный продукт – масса произведенных или планируемых к производству материально-вещественных благ и услуг. В стоимостном выражении совокупный общественный продукт делится на перенесенную стоимость (износ средств труда и расход предметов труда) и вновь созданную стоимость, т. е. национальный доход.

В *натуральном межотраслевом балансе* отражается движение совокупного общественного продукта по его материально-вещественному составу.

Чистые (*технологические*) *отрасли* – это некоторые условные отрасли, которые объединяют все производство данного вида продукта независимо от ведомственной подчиненности субъектов хозяйствования, его производящих.

Межотраслевые балансы строятся на основе следующих предположений:

1) каждая отрасль производит только один продукт, т. е. выделение отраслей осуществляется не по принципу однородности предприятий, а по принципу однородности продукта. По этой причине межотраслевые балансы иногда еще называют *межпродуктовыми балансами*;

2) каждая отрасль имеет только одну технологию производства продукции, которая характеризуется средневзвешенными коэффициентами затрат. Эти коэффициенты отражают взаимосвязь между отраслями и являются отраслевыми нормативами затрат.

В общем виде межотраслевой баланс состоит из четырех разделов, которые называются квадрантами:

I	II
III	IV

Основным является I квадрант, т. к. его данные используются во всех расчетах и являются их основой. Во II квадранте характеризуется непроизводственная сфера. В I и III квадрантах характеризуются текущие затраты материального производства; во II и IV – использование продукции за пределами текущего производственного цикла. Иначе говоря, процессы накопления, непроизводственного потребления и вывода продукции за пределы региона, что в целом называется *конечным потреблением*.

При записи соотношений могут использоваться как натуральные (тонны, штуки, киловатт-часы и т. п.), так и стоимостные единицы измерения указанных величин, поэтому различают натуральный и стоимостной балансы.

Стоимостной межотраслевой баланс. *Стоимостной межотраслевой баланс* (*СМОБ*), или *МОБ производства и распределения в денежном выражении*, состоит из четырех квадрантов, по каждому из которых показатели баланса рассчитываются в стоимостном выражении. Основное назначение стоимостного МОБ состоит в сопоставлении затрат с доходами (по стране в целом или по тому или иному ее региону).

Различают два вида стоимостных балансов:

– *отчетный баланс*. На основе отчетного стоимостного баланса проверяется в какой мере затраты компенсированы доходами;

– *плановый баланс*. Плановый стоимостной баланс позволяет сопоставить планируемые затраты с возможными доходами.

Основные понятия, которые используются при рассмотрении стоимостного межотраслевого баланса:

1. *Валовая продукция* – объем произведенной продукции в денежном выражении. Для отрасли это ценностный объем произведенной или планируемой к выпуску продукции. Для страны или региона это валовой внутренний продукт, который равен сумме валовых продуктов отраслей.

2. *Промежуточный продукт отрасли* – это производственные затраты продукта этой отрасли в других отраслях экономики в качестве предметов труда в стоимостном выражении, т. е. это стоимость текущих материальных затрат.

3. *Конечный продукт отрасли* – это стоимость продукции отрасли, направляемой на накопление и потребление, т. е. это совокупность фондов накопления и потребления по отрасли.

4. *Чистая продукция отрасли* – это стоимость созданной в процессе производства или планируемой к производству продукции данной отрасли. Чистая продукция отрасли состоит из оплаты труда и чистого дохода (прибыли) отрасли.

Стоимостной межотраслевой баланс состоит из четырех квадрантов, каждый из которых характеризует отдельные стороны или процессы расширенного производства.

Важнейшей частью СМОБ является I квадрант, поскольку он характеризует межотраслевые связи в сфере материального производства.

Первый квадрант – это таблица размерности $n \times n$, наименования строк и столбцов которой соответствуют чистым технологическим отраслям материального производства. В строках и столбцах в одинаковом порядке перечислены одни и те же отрасли материального производства.

Введем следующие обозначения:

• X_i – *валовой выпуск* продукции i-й отрасли за рассматриваемый промежуток времени;

• x_{ij} – *межотраслевые потоки* продукции, от i-й отрасли к j-й отрасли, т. е. объем продукции отрасли i, расходуемый отраслью j (производственное потребление);

• x_{ii}, $i=\overline{1,\ n}$, – главная диагональ СМОБ; ее элементы стоят на пересечении строк и столбцов одноименных отраслей и характеризуют внутреннее потребление каждой отраслью своей же продукции;

• Y_i – объем продукции отрасли i, потребляемый в непроизводственной сфере, – *конечное потребление*. В него входят личное потребление, обеспечение общественных потребностей (образование, здравоохранение, развитие инфраструктуры и т. д.), поставки на экспорт.

Одноименные строки и столбцы характеризуют отрасль с различных сторон. Строки I квадранта стоимостного баланса отражают использование продукции данной отрасли другими отраслями, включая расходы и на собственные нужды отрасли, т. е. строки I квадранта отражают межотраслевые поставки сырья, материалов, топлива, энергии и т. д. отраслям материального производства в денежном выражении. Столбцы I квадранта стоимостного баланса характеризуют состав материальных затрат в денежном выражении на производство продукции отдельных отраслей.

Имеем: $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \neq \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, но общая величина стоимости продукции всех отраслей, потребленной в сфере материального производства, совпадает со стоимостью материальных затрат на всю продукцию, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}.$$

Во II квадранте межотраслевого баланса характеризуется конечное потребление каждого вида продукции, т. е. показывается, какое количество продукции отраслей материального производства поступает на цели личного и общественного потребления, на накопление основных и оборотных средств, на возмещение выбывших основных средств, а также на покрытие сальдо между ввозом и вывозом продукции. Этот квадрант можно рассматривать как распределение национального дохода на фонд накопления и фонд потребления по отраслям.

В III квадранте межотраслевого баланса характеризуются затраты живого труда и основный производственных фондов, участвующих в производстве каждого вида продукции отраслей.

Чистая продукция – это сумма оплаты труда $v_j,\ j=\overline{1,\ n},$ и чистого дохода отраслей $m_j,\ j=\overline{1,\ n}.$ Сумму амортизации $c_j,\ j=\overline{1,\ n},$ и чистой продукции некоторой j-й отрасли называют *условно чистой продукцией* и обозначают $Z_j = c_j + v_j + m_j,\ j=\overline{1,\ n}.$

Общая стоимость валовой продукции j-й отрасли равна: $X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j,\ j=\overline{1,\ n}.$

Четвертый квадрант баланса находится на пересечении столбцов II квадранта (конечной продукции) и строк III квадранта (условно чистой продукции). Этим определяется содержание квадранта: он отражает конечное распределение и использование национального дохода. По строкам: заработная плата работников непроизводственной сферы; прибыль предприятий непроизводственной сферы; амортизация основных средств организаций непроизводственной сферы.

Данные IV квадранта важны для отражения в модели межотраслевого баланса доходов и расходов населения, источников финансирования капиталовложений, текущих затрат непроизводственной сферы; для анализа общей структуры конечных доходов по группам потребителей.

Отметим также, что валовой продукт отраслей представлен на схеме СМОБ в двух местах: в столбце и в строке. Эти строка и столбец играют важную роль для проверки правильности заполнения квадрантов (т. е. проверки баланса) и для разработки экономико-математической модели межотраслевого баланса. Например, для двух отраслей см. табл. 51.

Таблица 51

Межотраслевой баланс

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Продукция	
	1	2	конечная Y	валовая X
1	x_{11}	x_{12}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	Y_2	X_2
Z	Z_1	Z_2	$Y_1 + Y_2 = Z_1 + Z_2$	–
X	X_1	X_2	–	$X_1 + X_2$

Основные соотношения МОБ отражают сущность МОБ и являются основой его экономико-математической модели.

Рассматривая схему баланса по столбцам, получаем, что сумма материальных затрат любой потребляющей отрасли и ее условно чистой продукции равна валовому продукту данной отрасли:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j, \ j = \overline{1,\ n}.$$

Данное соотношение состоит из уравнений, отражающих *стоимостной состав продукции* всех отраслей материальной сферы.

Рассматривая схему МОБ по строкам, для каждой производящей отрасли получаем, что валовой продукт отрасли равен сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i, \ i = \overline{1,\ n}.$$

Данное соотношение состоит из уравнений, которые называются *уравнениями распределения продукции отраслей материального производства по направлениям использования*.

В МОБ соблюдается важнейший принцип единства материального и стоимостного составов национального дохода:

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Таким образом, все четыре раздела стоимостного МОБ производства и распределения продукции взаимосвязаны и дают развернутую характеристику расширенного воспроизводства экономики в целом.

Экономико-математическая модель МОБ. *Коэффициент прямых затрат* (*коэффициент материалоемкости*)

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \ i = \overline{1,\ n}; \ j = \overline{1,\ n}$$

показывает, какое количество продукции i-й отрасли необходимо (с учетом только прямых затрат) для производства единицы *валового продукта* j-й отрасли. В стоимостном балансе это стоимость продукции i-й отрасли, используемой для производства единицы стоимости продукции j-й отрасли. Коэффициент прямых затрат не зависит от объема производства и является довольно стабильной величиной во времени.

Используя коэффициент прямых затрат, межотраслевые потоки продукции можно определить по формуле:

$$x_{ij} = a_{ij} X_j,\ i = \overline{1,\ n};\ j = \overline{1,\ n}.$$

Систему уравнений баланса можно записать в виде:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i,\ i = \overline{1,\ n},$$

или в матричной форме:

$$X = AX + Y,$$

где X – вектор-столбец валовой продукции и Y – вектор-столбец конечной продукции, $A = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$ – матрица коэффициентов прямых материальных затрат (технологическая матрица). С учетом экономического смысла задачи, все коэффициенты матрицы A и компоненты векторов X и Y должны быть неотрицательны

Различают следующие математические модели межотраслевого баланса:

1) *математическая модель отчетного межотраслевого баланса*. Выражается в виде соотношений, которые описываются формулами:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j,\ j = \overline{1,\ n};$$

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i,\ i = \overline{1,\ n};$$

2) *математическая модель прогнозного межотраслевого баланса*:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i,\ i = \overline{1,\ n},$$

или в матричной форме:

$$X = AX + Y.$$

Модель прогнозного межотраслевого баланса также называется *моделью Василия Леонтьева*, *моделью «затраты – выпуск»*.

По модели межотраслевого баланса могут выполняться следующие типы расчетов:

1) если в модели известны величины валовой продукции каждой отрасли (X_i), то можно определить объем конечной продукции каждой отрасли (Y_i) по формуле: $Y = (E - A)X$;

2) если в модели известны величины конечной продукции всех отраслей (Y_i), то можно определить величины валовой продукции каждой отрасли (X_i) по формуле: $X = (E - A)^{-1}Y$;

3) если для ряда отраслей известны величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей – объемы конечной продукции, то можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых.

В вышеприведенных формулах E – единичная матрица размерности $n \times n$, а $(E - A)^{-1}$ – матрица, обратная матрице $(E - A)$.

Обозначив обратную матрицу через B ($B = (E - A)^{-1}$), модель «затраты – выпуск» можно записать в виде: $X = BY$.

Матрица $B = \left[b_{ij} \right]_{n \times n}$ называется *матрицей коэффициентов полных затрат*. Коэффициенты полных затрат b_{ij} показывают, сколько всего нужно произвести продукции i-й отрасли для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции j-й отрасли.

Коэффициенты полных затрат можно применять тогда, когда необходимо определить, как скажется на валовом выпуске некоторой отрасли предполагаемое изменение объемов конечной продукции всех отраслей:

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \Delta Y_j, \; i = \overline{1, n},$$

где ΔX_i и ΔY_j – изменения (приросты) величин валовой и конечной продукции соответственно.

Методы и модели массового обслуживания

Основные понятия. Очереди, т. е. ожидание того или иного вида обслуживания являются частью повседневной жизни, и их математическое описание составляет предмет теории систем массового обслуживания (СМО). *Цель изучения* СМО – обеспечение качества обслуживания путем изучения зависимости между количеством обслуживаемых и обслуживающих единиц СМО и установления научно-обоснованных соотношений между ними.

Основными элементами СМО являются *источники заявок* на обслуживание (клиентов), их *входящий поток*, *каналы обслуживания*, образующие *обслуживающую систему* (сервис), и *выходящий поток*. Если сервис свободен, то клиент сразу попадает на обслуживание, иначе возникает *очередь*. Появление клиентов (заявок на обслуживание) характеризуется *интервалом между их последовательными поступлениями*, а функционирование сервиса – *временем обслуживания*. Как правило, эти параметры являются случайными. В системах массового обслуживания выделяют два потока событий: *входящий поток* заявок на обслуживание и *выходящий поток* обслуженных заявок. Эти потоки характеризуются определенными законами распределения вероятностей, в результате их взаимодействия система оказывается в том или ином своем состоянии. Расчет вероятностных характеристик состояния системы (длины очереди, времени ожидания и т. д.) – это одна из главных задач теории массового обслуживания.

На практике наиболее распространенным является *простейший входящий поток* заявок (требований), обладающий свойствами:

1) *стационарности*, т. е. вероятность поступления количества требований в течение промежутка времени зависит только от длины этого промежутка; вероятность хотя бы одной заявки за малый промежуток времени Δt пропорциональна длине промежутка: $p(\Delta t) \approx \lambda\Delta t$;

2) *ординарности*, т. е. невозможности одновременного появления двух или более заявок;

3) *отсутствия последействия*, т. е. поступление заявки не зависит от того, когда и сколько заявок поступило до этого момента; в этом случае вероятность $P_k(t)$ поступления k заявок за промежуток времени t определяется по закону Пуассона:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

где $\lambda = \dfrac{1}{\tau}$ – *интенсивность потока заявок*, т. е. среднее число заявок в единицу времени (чел./мин, руб./ч, кВт/ч); τ – среднее значение интервала времени между двумя соседними заявками.

В большинстве систем массового обслуживания время между последовательными поступлениями заявок и время их обслуживания, являются случайными и описываются показательным распределением:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ t \geq 0,$$

где λ – параметр распределения имеет смысл *интенсивности потока* (среднее число заявок, приходящееся на единицу времени).

Выходящий поток заявок связан с потоком обслуживания в канале, где длительность обслуживания $t_{обсл}$ является случайной величиной и часто подчиняется показательному закону распределения с плотностью

$$f(t) = \mu e^{-\mu t},$$

где $\mu = \dfrac{1}{t_{обсл}}$ – *интенсивность потока обслуживания*, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени (чел./мин, руб./день, кг/ч); $t_{обсл}$ – среднее время обслуживания.

Важной характеристикой СМО, объединяющей λ и μ, является *интенсивность нагрузки*

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Обычно решение ждать обслуживания или отказаться от него определяется длиной очереди. Поэтому при моделировании учитывают максимально допустимое количество m заявок в очереди. Возможны следующие случаи:

1) $m = 0$ – без очереди, *системы с отказами*, в которых при занятости всех каналов обслуживания заявка не встает в очередь и покидает систему необслуженной;

2) $m = \infty$ – очередь не ограничена, *системы с неограниченным ожиданием*, в которых заявка встает в очередь, если в момент ее поступления все каналы были заняты;

3) $m > 0$ – с очередью, *системы смешанного типа* с ожиданием и ограниченной длиной очереди: заявка получает отказ, если приходит в момент, когда все места в очереди заняты, а заявка, попавшая в очередь, обслуживается обязательно.

Считается, что заявки, которым не оказалось места в очереди, навсегда теряются.

Часто система обслуживания содержит несколько обслуживающих каналов, которые можно выбирать. По числу каналов обслуживания СМО делятся на *одноканальные* и *многоканальные*. Примером могут служить рабочие места кассиров в супермаркетах. В зависимости от расположения источника требований системы могут быть *разомкнутыми* (источник заявок находится вне системы) и *замкнутыми* (источник находится в самой системе).

На практике широко используются процессы с дискретными состояниями, т. е. предполагается, что все возможные состояния системы можно перечислить. Считается, что переход системы из одного состояния в другое происходит практически мгновенно и вероятности переходов известны. Рассмотрим процесс с дискретным шагом по времени. Пример такого процесса с тремя состояниями приведен на рис. 24.

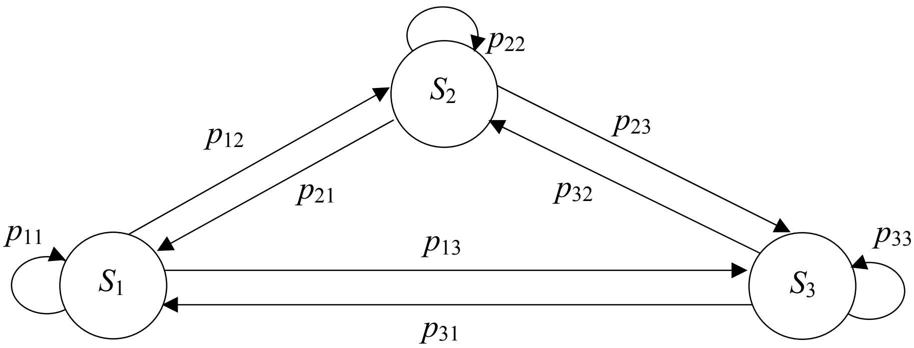


Рис. 24. Пример процесса с тремя состояниями

Для аналитического описания используется матрица переходов (матрица вероятностей)

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix},$$

где p_{ij} – вероятность перехода процесса из i-го состояния в j-е состояние.

Аналитический расчет характеристик СМО. Уравнения Колмогорова. Одной из важнейших характеристик СМО является *длина очереди*. Если она велика, то это ведет к потере потенциальных заявок (клиентов), а следовательно, к снижению конкурентоспособности. Длина очереди – это случайная величина, но ее математическое ожидание (среднюю длину) можно рассчитать, как и другие важные характеристики:

– вероятность отклонения заявки;

– вероятность обслуживания заявки;

– среднее число заявок, обслуживаемых за единицу времени;

– среднее время пребывания заявки в системе.

Вывод аналитических зависимостей основывается на *уравнениях Колмогорова* – дифференциальных уравнениях, в которых неизвестными функциями являются вероятности состояний системы.

Рассмотрим СМО с N возможными состояниями $S_1, S_2, \ldots, S_N$ и простейшим потоком событий. Тогда вероятность перехода системы из i-го состояния в j-е состояние за малый промежуток времени Δt определяется соотношением $p_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij}\Delta t$, где λ_{ij} – плотность вероятности перехода системы из i-го состояния в j-е состояние.

Система дифференциальных уравнений (или просто *система уравнений*) *Колмогорова* имеет следующий вид:

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = \left(\sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^{n} \lambda_{ij} p_i(t) - p_j(t) \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^{n} \lambda_{ji} \right), \; j = \overline{1,\, N}.$$

Это уравнение выражает производную вероятности j-го состояния системы как разности двух сумм. Первая сумма – это скалярное произведение вектора состояний системы на вектор интенсивностей потоков, переводящих систему в j-е состояние. Из нее вычитается сумма интенсивностей всех потоков, выводящих систему из j-го состояния, умноженная на вероятность этого состояния. Полученную систему уравнений можно дополнить очевидным соотношением $\sum_{j=1}^{N} p_j = 1$ и опустить одно из уравнений системы.

Задавая начальные условия (характеризующие исходное состояние СМО) и решая соответствующую задачу Коши для системы уравнений Колмогорова, определяем соответствующие вероятности $p_i(t),\; i = \overline{1,\, N},$ нахождения СМО в состояниях S_i в текущий момент времени.

Анализ решения задачи Коши для системы уравнений Колмогорова показывает, что для достаточно больших значений t, независимо от начальных условий, это решение стабилизируется и практически не зависит от времени. Таким образом, с течением времени функционирование СМО переходит в стационарный (установившийся) режим, т. е. существуют

$$\lim_{t \to +\infty} p_i(t) = \mathrm{const} = p_i,\ i = \overline{1,\ N}.$$

Значения p_i, $i = \overline{1,\ N}$, вероятностей состояний, соответствующие стационарному режиму работы СМО, называются *финальными вероятностями.*

Полагая в системе дифференциальных уравнений $\dfrac{dp_i(t)}{dt} = 0$, получаем систему алгебраических уравнений для определения финальных вероятностей p_i, $i = \overline{1,\ N}$. Аналогично осуществляется аналитический расчет и других СМО.

СМО с отказами. Рассмотрим n-канальную СМО с отказами (заявка не обслуживается, если все каналы заняты). Для такой системы состояния S_1, S_2, …, S_n соответствуют числу занятых каналов, состояние S_0 означает отсутствие заявок. Предполагается, что все каналы в равной степени доступны всем заявкам, поток заявок является простейшим с интенсивностью λ, время $t_{\text{обсл}}$ обслуживания одной заявки распределено по показательному закону с интенсивностью μ освобождения каждого канала СМО. Требуется произвести аналитический расчет основных характеристик СМО.

Формулы для расчета установившегося режима:

1) вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок ($k = 0$):

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^j}{j!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1},\ \rho = \frac{\lambda}{\mu};$$

2) вероятность отказа в обслуживании, когда поступившая на обслуживание заявка найдет все каналы занятыми ($k = n$):

$$p_{\text{отк}} = p_n = \frac{p_0 \rho^n}{n!};$$

3) вероятность обслуживания:

$$p_{\text{обсл}} = 1 - p_{\text{отк}};$$

4) среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$n_з = \rho p_{обсл};$$

5) доля каналов, занятых обслуживанием:

$$k_з = \frac{n_з}{n};$$

6) абсолютная пропускная способность СМО:

$$A = \lambda p_{обсл}.$$

Элементы теории игр. Основные понятия. В процессе целенаправленной человеческой деятельности возникают ситуации, в которых интересы отдельных лиц (групп, сторон) либо прямо противоположны (антагонистичны), либо, не будучи непримиримыми, все же не совпадают. Такие ситуации называются *конфликтными*. Эффективность решений, принимаемых в ходе конфликта каждой из сторон, зависит от действий другой стороны. При этом ни одна из сторон не может полностью контролировать положение, т. к. и той и другой стороне решения приходится принимать в условиях неопределенности.

Примерами конфликтных ситуаций являются спортивные игры, арбитражные споры, военные учения и т. д., когда каждая из конфликтующих сторон стремится добиться наилучшего для себя результата. Подобного рода ситуации встречаются и в различных сферах производственной деятельности.

Теория игр – это математическая теория конфликтных ситуаций, разрабатывающая рекомендации по наиболее рациональному образу (стратегии) действий каждого из участников в ходе конфликтной ситуации (игры), т. е. таких действий, которые обеспечивали бы ему наилучший результат.

Игровую схему можно придать многим ситуациям в экономике. Здесь выигрышем могут быть эффективность использования ресурсов, производственных фондов, величина прибыли, себестоимость и т. д.

Игра – это совокупность правил, определяющих возможные действия (*чистые стратегии*) участников игры (игроков). Суть игры в том, что каждый из участников принимает такие решения в развивающейся конфликтной ситуации, которые, как он полагает, обеспечивают ему наилучший результат (исход) игры. Игра – это упрощенная математическая модель конфликтной ситуации.

Стратегия – это совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий игрока в каждой конкретной ситуации, складывающейся в процессе игры.

Исход (*плата*) *игры* – это значение некоторой функции, которая называется *функцией выигрыша* (*платежной функцией*). Далее будем рассматривать только такие игры, в которых выигрыш выражается количественно: стоимостью, баллами и т. д. Величина выигрыша зависит от стратегии, применяемой игроками. Игроки – это участники игры с различными группами интересов.

Оптимальной стратегией называется стратегия, которая обеспечивает игроку наилучший исход игры при предположении, что противник использует наилучшую для себя стратегию.

Партией называют каждый вариант реализации игры.

В партии игроки совершают конкретные ходы.

Ход – это выбор и реализация игроком одного из допустимых вариантов поведения. Ходы бывают *личные*, когда игрок выбирает и реализует ту или иную свою конкретную чистую стратегию, и *случайные*, когда выбор чистой стратегии производится с использованием какого-либо механизма случайного выбора (например, с применением таблицы случайных чисел).

Неопределенность может быть обусловлена как сознательным противодействием противника, так и неизвестными обстоятельствами. *Игра с природой* – это игра двух лиц, в которой один из участников безразличен к результату игры. Такие игры встречаются в экономической практике, когда приходится формализовать ситуации, придавая им игровую схему, в которой один из участников безразличен к результату игры. Под термином «природа» понимают всю совокупность внешних обстоятельств, в которых сознательному игроку (его называют иногда *статистиком*, а соответствующую игру – *статистической*) приходится принимать решение. Например, определение объема выпуска сезонной продукции в ожидании наиболее выгодного для ее реализации уровня спроса; формирование пакета ценных бумаг в расчете на высокие дивиденды и т. д. В таких играх в качестве второго игрока выступает: в первом случае – уровень спроса; во втором – размеры ожидаемой прибыли.

Матричные игры с нулевой суммой. Матричная игра $m \times n$ (с нулевой суммой) – это антагонистическая игра, в которой первый игрок A использует возможные стратегии A_1, A_2, …, A_m, а его противник (оппонент) B – стратегии B_1, B_2, …, B_n. Если игрок A применит стратегию A_i, а оппонент – стратегию B_j, то плата a_{ij} игры будет выигрышем игрока A (проигрышем противника B) для $a_{ij} > 0$. Таким образом, игра с нулевой суммой полностью описывается так называемой *платежной матрицей* игры (табл. 52).

Таблица 52

Платежная матрица

Стратегии игрока A	Стратегии игрока B				
	B_1	…	B_j	…	B_n
A_1	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
…	…	…	…	…	…
A_i	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}

Если игра состоит только из личных ходов, то выбор пары чистых стратегий (A_i; B_j) единственным образом определяет исход (результат) игры. Если же в игре используются случайные ходы, то исход игры определяется средним значением (математическим ожиданием) выигрыша. Платежная матрица является табличной записью функции выигрыша. В теории матричных игр всегда предполагается, что в платежной матрице записаны выигрыши игрока A.

При поиске оптимальных стратегий игроки опираются на основной принцип теории игр – *принцип гарантированного результата* (*принцип максимина*), в соответствии с которым каждый игрок, считая партнера по игре разумным противником, выбирает свои действия в предположении, что соперник не упустит возможности использовать в своих интересах любую его ошибку.

При выборе своего хода игрок A анализирует платежную матрицу, определяя для каждой своей чистой стратегии A_i, $i = \overline{1,\ m}$, минимальное значение α_i ожидаемого выигрыша: $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$, $i = \overline{1,\ m}$ (считая, что противник играет наилучшим образом), а затем из всех α_i выбирает наибольшее $\alpha = \max\limits_i \alpha_i$ и соответствующую ему чистую (максиминную) стратегию A_i. Игрок A гарантирует себе выигрыш не хуже α при любых стратегиях игрока *B*, и не существует чистой стратегии игрока *A*, которая давала бы ему больший выигрыш, чем α, при всех стратегиях игрока *B*.

Число $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$ называется *нижней чистой ценой игры* (*максимином*). Она выражает выигрыш игрока *A*, при использовании максиминной стратегии независимо от действий игрока *B*.

Число β, определяемое по формуле

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij},$$

называется *верхней чистой ценой игры* (*минимаксом*). Она показывает, какой максимальный проигрыш (гарантированный результат) может быть у игрока *B* при подходящем выборе им своей чистой стратегии (независимо от действий игрока *A*). Соответствующая стратегия игрока *B* называется *минимаксной.*

Теорема. В матричной игре нижняя чистая цена игры не превосходит верхней чистой цены игры, т. е. $\alpha = \max_i \min_j \alpha_{ij} \leq$ $\leq \min_j \max_i \alpha_{ij} = \beta.$

Стратегии A_i, $i = \overline{1,\ m}$, первого игрока и стратегии B_j, $j = \overline{1,\ n}$, второго игрока (возможные их ходы) принято называть *чистыми стратегиями игроков*.

Если для чистых стратегий A_i, B_j игроков *A* и *B* соответственно имеет место равенство $\alpha = \beta = a_{ij}$, то пару чистых стратегий (A_i; B_j) называют *седловой точкой матричной игры*, элемент a_{ij} матрицы, стоящий на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца, – *седловым элементом платежной матрицы*, а число $v = \alpha = \beta$ – *чистой ценой игры*.

Ситуация, когда ни один из игроков не имеет разумных оснований для изменения своей стратегии, называется *ситуацией равновесия*.

Если матричная игра имеет седловую точку, т. е. в платежной матрице присутствует элемент, который является одновременно минимальным в строке и максимальным в столбце, то она решается в чистых стратегиях. Чистые стратегии A_i, B_j, образующие седловую точку, и будут оптимальными, а решением игры считается тройка объектов $\left\{A_i;\ B_j;\ v\right\}$.

Про игры с седловой точкой говорят, что они решаются в чистых стратегиях, т. к. последние полностью определяют рациональное поведение конфликтующих сторон. Платежная матрица может иметь несколько седловых точек.

Пример 2. Пусть первый игрок имеет m, а второй – n чистых стратегий, тогда каждую пару $(A_i; B_j)$ чистых стратегий первого и второго игроков можно представить в виде единичных векторов:

$$p_i = (0; \quad ...; \quad 0; \quad \underset{i\text{-е место}}{1}; \quad 0; \quad ...; \quad 0);$$

$$q_j = (0; \quad ...; \quad 0; \quad \underset{j\text{-е место}}{1}; \quad 0; \quad ...; \quad 0).$$

Пример 3. Пусть игра задана следующей платежной матрицей (табл. 53).

Таблица 53

Платежная матрица

Стратегии A	Стратегии B					
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	3	2	1	4	5	1
A_2	4	3	**2**	5	6	**2**
A_3	7	4	–3	4	–1	–3
β_j	7	4	**2**	5	6	–

Решение. A_2 – максиминная стратегия, B_3 – минимаксная стратегия, следовательно, $\alpha = \beta = 2$ и $v = 2$. Особенность этого примера в том, что если оппонент придерживается стратегии B_3, то игроку A невыгодно использовать какую-либо стратегию, кроме A_2. Но если игрок A использует стратегию A_2, то оппоненту придется использовать стратегию B_3. Причина состоит в том, что выигрыш $a_{23} = 2$ одновременно является минимальным для максиминной стратегии A_2 и максимальным для минимаксной стратегии B_3. Это игра с седловой точкой $(A_2; B_3)$, стратегии сторон A_2, B_3, соответствующие этой точке, являются оптимальными чистыми стратегиями. Чистая цена игры равна: $v = 2$.

Пример 4. Пусть игра задана следующей платежной матрицей (табл. 54).

Таблица 54

Платежная матрица

Стратегии A	Стратегии B					
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	4	5	5	6	6	4
A_2	7	9	3	–3	4	7
A_3	5	3	3	1	4	5
A_4	3	4	3	6	–6	3

Решение. Для определения нижней и верхней чистой цены игры следует определить, какой выигрыш гарантирует игроку A каждая из стратегий при самых неблагоприятных действиях оппонента. Это означает, что в каждой строке нужно найти минимальное значение $\alpha_i = \min_j a_{ij},\ i = \overline{1,\ 4}$.

Поскольку оппонент может провести такой же анализ для выбора одной из стратегий B_j, $j = \overline{1,\ n}$, то в каждом столбце он будет искать максимально возможные значения выигрыша игрока A: $\beta_j = \max_i a_{ij},\ j = \overline{1,\ 6}$. Дополним платежную матрицу этими значениями (табл. 55).

Таблица 55

Платежная матрица

Стратегии A	Стратегии B						
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	α_i
A_1	4	5	5	6	6	4	**4**
A_2	7	9	3	–3	4	7	–3
A_3	5	3	3	1	4	5	1
A_4	3	4	3	6	–6	3	–6
β_j	7	9	**5**	6	6	7	–

Из табл. 55 видно, что выбор стратегии A_1 гарантирует игроку A выигрыш не менее 4 ед. при любой стратегии оппонента. Таким образом, A_1 – максиминная стратегия. Соответствующее ей значение 4 ед. есть нижняя цена игры.

Для оппонента стратегия B_3 минимизирует максимально возможный проигрыш и называется минимаксной. Используя ее, оппонент не может проиграть больше верхней цены игры $\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 5$. Для рассматриваемого примера $4 \le v \le 5$.

Смешанной стратегией p первого (A) игрока называется вектор

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_m), \text{ где } p_i \ge 0,\ i = \overline{1,\ n},\ \text{и} \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Аналогично вектор q – смешанная стратегия игрока B:

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_n), \text{ где } q_j \ge 0,\ j = \overline{1,\ n},\ \text{и} \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Здесь p_i и q_j – вероятности, с которыми игроки A и B в ходе игры выбирают свои чистые стратегии A_i и B_j.

Чистая стратегия A_i игрока A может рассматриваться как частный случай смешанной стратегии, i-я компонента которой равна единице, а остальные равны нулю. Аналогично для игрока B.

Применяя смешанные стратегии, игроки выбирают свои чистые стратегии случайно и независимо друг от друга, и, таким образом, случайной становится величина выигрыша (проигрыша): $f(p;\ q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$ – *плата* (*платежная функция*) игры с платежной матрицей $\left[a_{ij} \right]_{m \times n}$.

Смешанные стратегии $p^* = (p_1^*,\ p_2^*,\ \dots,\ p_m^*)$; $q^* = (q_1^*,\ q_2^*,\ \dots,\ q_n^*)$ называются *оптимальными,* если для произвольных стратегий $p = (p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_m)$; $q = (q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_n)$ выполняется условие

$$f(p;\ q^*) \le f(p^*;\ q^*) \le f(p^*;\ q),$$

т. е. $(p^*;\ q^*)$ является седловой точкой функции $f(p;\ q)$.

Использование в игре оптимальных смешанных стратегий обеспечивает первому игроку выигрыш, не меньший, чем при использовании им любой другой стратегии p, второму игроку – проигрыш, не больший, чем при использовании им любой другой стратегии q.

Значение платежной функции при оптимальных стратегиях определяет цену игры v, т. е. $f(p^*;\ q^*) = v$, причем $\alpha \le v \le \beta$. Совокупность оптимальных стратегий и цены игры составляет *решение игры*.

Теорема о минимаксе. В смешанных стратегиях любая конечная матричная игра имеет седловую точку, причем $\min\limits_{q}\max\limits_{p} f(p;\ q) = \max\limits_{p}\min\limits_{q} f(p;\ q) = f(p^*;\ q^*)$, где p^*, q^* – оптимальные смешанные стратегии игроков A и B соответственно.

Чистые стратегии игрока, входящие в его оптимальную смешанную стратегию с вероятностями, отличными от нуля, называются *активными стратегиями* игрока.

Решение игры можно существенно упростить, если своевременно выявить имеющееся в платежной матрице доминирование одних стратегий над другими, т. к. это позволит предварительно сократить размеры матрицы.

Игрок A заинтересован в максимизации выигрыша. Поэтому в платежной матрице сравниваем элементы строк s и t, а именно элементы a_{sj} с элементами a_{tj} для всех $j = \overline{1,\ n}$. Если $a_{sj} \geq a_{tj}$, $j = \overline{1,\ n}$, то выигрыш игрока A при стратегии A_s будет больше, чем при стратегии A_t, какую бы чистую стратегию не применил игрок B. В этом случае стратегия A_s доминирует над стратегией A_t. Стратегию A_s называют *доминирующей*, а стратегию A_t – *доминируемой.*

Поскольку игрок B заинтересован в минимизации проигрыша, доминирующим будет столбец с наименьшими элементами. Например, сравниваем элементы r-го и l-го столбцов: если $a_{ir} \geq a_{il}$, $i = \overline{1,\ m}$, то игроку B выгодно выбрать стратегию B_l, которая доминирует над стратегией B_r. Стратегия B_l называется *доминирующей*, а стратегия B_r – *доминируемой.*

Если в матричной игре имеем строки (столбцы) с одними и теми же элементами, то такие строки (столбцы), а следовательно, и стратегии игроков A и B называются *дублирующими*.

В матричной игре доминируемые и дублирующие строки (столбцы) можно опускать, что не влияет на решение игры, но позволяет уменьшить размерность платежной матрицы.

Таким образом, если стратегия A_s доминирует над стратегией A_t, то вероятность применения последней в оптимальной смешанной стратегии p^* игрока A равна нулю, а поэтому t-ю строку можно исключить из платежной матрицы. Если стратегия B_l игрока B доминирует над стратегией B_r, то r-й столбец можно исключить из платежной матрицы.

Пример 5. Платежную матрицу можно упростить, прибавив, например, ко всем элементам достаточно большое положительное число. В результате можно получить новую матрицу с положительными (неотрицательными) элементами. Умножив элементы на подходящий положительный множитель (отличный от нуля), можно уменьшить (увеличить) элементы новой матрицы, что облегчит дальнейшие вычисления. При этом вероятности активных стратегий не меняются.

Так, разделив элементы матрицы

$$\begin{bmatrix} 400 & -300 \\ 200 & 600 \end{bmatrix}$$

на 100 (умножив на 0,01), а затем прибавив к элементам новой матрицы число 3, придем к матрице

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Работать с этой матрицей проще, чем с исходной.

Поскольку оптимальные смешанные стратегии игроков в результате рассмотренных упрощений платежной матрицы не меняются, то все получаемые в процессе преобразований матрицы называют эквивалентными.

Решение матричных игр 2×2. Игра 2×2 является наиболее простым случаем конечных матричных игр. В этой игре каждый из игроков обладает только двумя стратегиями.

Рассмотрим матричную игру 2×2 (табл. 56).

Таблица 56

Матричная игра 2×2

Стратегии A	Стратегии B	
	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Если игра 2×2 имеет седловую точку, то ее решение очевидно.

Предположим, что игра не имеет седловой точки, т. е. $\alpha \neq \beta$. Требуется найти оптимальные смешанные стратегии игроков $p^* = (p_1^*,\ p_2^*)$ и $q^* = (q_1^*,\ q_2^*)$, а также цену игры v.

Очевидно, что в игре 2×2, не имеющей седловой точки, обе стратегии игроков являются активными. Поэтому если игрок A будет применять свою оптимальную смешанную стратегию, то, независимо от действий игрока B, выигрыш его будет равен цене игры v.

Игрок A будет применять стратегию A_1 с вероятностью p_1 и стратегию A_2 с вероятностью p_2. Если игрок B отвечает своей стратегией B_1, то выигрыш игрока A определяется из уравнения

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v.$$

Если же игрок B будет применять стратегию B_2, то выигрыш игрока A не изменится и будет определяться равенством

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v.$$

Учитывая условие $p_1 + p_2 = 1$, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем оптимальное решение для игрока A: $p^* = (p_1^*,\ p_2^*)$ и цену игры v.

Аналогично определяется оптимальная стратегия игрока B из системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{21}q_2 = v, \\ a_{12}q_1 + a_{22}q_2 = v, \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, матричная игра сведена к системе линейных уравнений.

Графический метод применим к играм, в которых хотя бы один игрок имеет только две стратегии. Рассмотрим игру 2×n (табл. 57).

Таблица 57

Игра вида 2×*n*

Первый игрок (A)	Второй игрок (B)			
	q_1	q_2	...	q_n
p_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
$p_2 = 1 - p_1$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}

Предположим, что игра не имеет седловой точки. Введем обозначения: $p = p_1$ – вероятность применения первым игроком 1-й стратегии; p_2 – вероятность применения первым игроком 2-й стратегии, причем $p_2 = 1 - p$; q_1 – вероятность применения вторым игроком 1-й стратегии; q_2 – вероятность применения вторым игроком 2-й стратегии и т. д.; q_n – вероятность применения вторым игроком n-й стратегии.

Ожидаемый выигрыш v_1 первого игрока при применении вторым игроком 1-й стратегии составит:

$$v_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = a_{11}p + a_{21}(1-p) = (a_{11} - a_{21})p + a_{21}.$$

Аналогично найдем ожидаемые выигрыши первого игрока при применении вторым игроком 2, 3, ..., n-й стратегий. Полученные данные поместим в табл. 58.

Таблица 58

Ожидаемые выигрыши первого игрока

Чистые стратегии второго игрока	Ожидаемые выигрыши первого игрока
1	$v_1^p = (a_{11} - a_{21})p + a_{21}$
2	$v_2^p = (a_{12} - a_{22})p + a_{22}$
...	...
n	$v_n^p = (a_{1n} - a_{2n})p + a_{2n}$

Из табл. 58 видно, что ожидаемый выигрыш первого игрока линейно зависит от p_1. На плоскости Opv построим графики ожидаемых выигрышей первого игрока, которые представляют прямые, проходящие через точки (0; a_{2i}) и (1; a_{1i}), $i = \overline{1,\ n}$.

Первый игрок должен выбирать стратегии, позволяющие максимизировать его минимальный ожидаемый выигрыш. Поэтому оптимальная стратегия первого игрока определяется как точка пересечения прямых, максимизирующих его минимальный ожидаемый выигрыш. Поскольку игрок A может рассчитывать только на выигрыш $v = \overline{v}(p) = \min\{v_1(p),\ ...,\ v_n(p)\}$, то на плоскости Opv рисуем график зависимости $v = \overline{v}(p)$ и находим наивысшую точку $v = \overline{v}(p^*) = \max\limits_{p\in[0;1]} \overline{v}(p)$ на этом графике, ордината которой выражает цену игры v, а стратегия $(p^*,\ 1 - p^*)$ является оптимальной смешанной стратегией игрока A.

Аналогично определяется оптимальная стратегия второго игрока. Она находится как точка пересечения прямых, минимизирующих его максимальные ожидаемые проигрыши.

Статистические игры. Под *статистической игрой* (*игрой с природой*) будем понимать парную матричную игру, в которой один игрок заинтересован в наиболее выгодном для него исходе игры, а второй игрок (природа) безразличен к результату игры.

В отличие от матричных игр, в которых участвуют два игрока с противоположными интересами (один игрок старается максимизировать плату, а другой – минимизировать), в реальных задачах, приводящихся к игровым, зачастую имеется неопределенность, вызванная отсутствием информации об условиях, в которых осуществляется действие (погода, покупательский спрос и т. д.) и которые не зависят от сознательных действий другого игрока. Такие игры относят к играм с природой. Сознательный игрок в играх с природой старается действовать осмотрительно, второй игрок (природа, покупательский спрос и т. д.) действует случайно.

Предположим, что в игре с природой сознательный игрок A может использовать m чистых стратегий: $A_1, A_2, \ldots, A_m$, а природа П может реализовать n различных состояний: $П_1, П_2, ..., П_n$. Игроку A могут быть известны вероятности: $q_1, q_2, \ldots, q_n$, с которыми природа реализует свои состояния, но он может и не знать их.

Действуя против природы, игрок A имеет возможность использовать как чистые стратегии A_i, так и смешанные стратегии. Если игрок A в состоянии оценить (величиной a_{ij}) последствия применения каждой своей чистой стратегии A_i при каждом состоянии $П_j$ природы, то игру можно задать матрицей:

$$A_{m\times n} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ \ldots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} П_1 & \ldots & П_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array},$$

которая называется *платежной*.

Решение статистической игры состоит из следующих этапов:

1) выявление и отбрасывание дублирующих и доминируемых стратегий лица, играющего с природой; стратегии природы отбрасывать нельзя;

2) построение и исследование матрицы рисков;

3) оценка выигрыша при различных игровых ситуациях: критерии Вальда, Байеса, Сэвиджа и Гурвица и др.;

4) вывод о выборе наилучшей стратегии.

Игры с природой, хотя и являются частным случаем парных матричных игр, обладают и некоторыми особенностями. Например, при упрощении платежной матрицы отбрасывать те или иные состояния природы нельзя, т. к. она может реализовать любое состояние, независимо от того, выгодно оно игроку A или нет. Кроме того, решение достаточно найти только для игрока A, поскольку природа в рекомендациях «не нуждается».

Также в играх с природой смешанные стратегии имеют ограниченное значение: они приобретают смысл только при многократном повторении игры.

Таким образом, цель при решении статистической игры заключается в определении такой стратегии сознательного игрока (чистой или смешанной), которая при ее применении обеспечила бы наибольший выигрыш.

Риском r_{ij} игрока A, когда он пользуется чистой стратегией A_i при состоянии Π_j природы, называется разность между максимальным выигрышем, который он мог бы получить, если бы точно знал, что природой будет реализовано именно состояние Π_j, и тем выигрышем, который он получит, используя стратегию A_i:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij} \geq 0,$$

где $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$ – максимальный элемент j-го столбца платежной матрицы. Элементы матрицы рисков (табл. 59), соответствующие стратегиям A_i и Π_j, характеризуют общую благоприятность или неблагоприятность для игрока A отдельных состояний природы.

Таблица 59

Матрица рисков

Стратегии A	Стратегии П			
	Π_1	Π_2	...	Π_n
A_1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1n}
A_2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2n}
…	…	…	…	
A_m	r_{m1}	r_{m2}	…	r_{mn}

Для принятия решений в статистических играх используются следующие критерии:

1. *Критерий Байеса* – критерий, основанный на известных вероятностях условий. Если известны вероятности q_j состояний $П_j$ природы, то пользуются *критерием Байеса*, в соответствии с которым оптимальной считается чистая стратегия A_i, при которой максимизируется средний выигрыш $\overline{a} = \max\limits_i \overline{a}_i = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$. Следует отметить, что в этом случае игроку A нет смысла пользоваться смешанными стратегиями. Применение в игре с природой любой смешанной стратегии p не увеличивает выигрыш игрока A, получаемый при оптимальной чистой стратегии.

2. *Принцип недостаточного основания Лапласа*. Если объективные оценки состояний природы получить невозможно, то вероятности состояний природы могут быть оценены субъективно на основе *принципа недостаточного основания Лапласа*, согласно которому все состояния природы полагаются равновероятными, т. е. $q_1 = ... = q_n = 1/n$, и оптимальной считается чистая стратегия A_i, обеспечивающая максимальное среднее значение выигрыша: $\max\limits_i \overline{a}_i = \frac{1}{n} \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$.

3. *Максиминный критерий Вальда.* По этому критерию рекомендуется применять максиминную стратегию. Она выбирается из условия $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$, $i = \overline{1,\ m}$; $j = \overline{1,\ n}$. Критерий является пессимистическим: считается, что природа будет действовать наихудшим для сознательного игрока образом.

4. *Критерий максимума.* Оптимальная стратегия выбирается из условия $m = \max\limits_i \max\limits_j a_{ij}$, $i = \overline{1,\ m}$; $j = \overline{1,\ n}$. Критерий является оптимистическим: считается, что природа будет играть наиболее благоприятно для сознательного игрока.

5. *Критерий Гурвица.* Критерий рекомендует стратегию, определяемую по формуле $s = \max\limits_i \left\{ \lambda \min\limits_j a_{ij} + (1-\lambda) \max\limits_j a_{ij} \right\}$, $i = \overline{1,\ m}$; $j = \overline{1,\ n}$, где λ (степень оптимизма) изменяется в диапазоне [0; 1].

Критерий придерживается некоторой промежуточной позиции, учитывающей возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения природы. При $\lambda = 1$ критерий превращается в критерий Вальда; при $\lambda = 0$ – в критерий максимума. На величину λ оказывает влияние степень ответственности лица, принимающего решение по выбору стратегии. Чем хуже последствия ошибочных решений, больше желание подстраховаться, тем степень оптимизма λ ближе к единице. В общем случае число λ выбирают из опыта или субъективных соображений.

6. *Критерий Сэвиджа.* Суть критерия состоит в выборе стратегии, позволяющей не допустить чрезмерно высоких потерь, к которым она может привести. Согласно этому критерию, рекомендуется выбирать ту стратегию, при которой в наихудших условиях величина риска принимает наименьшее значение: $r = \min_i \max_j r_{ij}$ – оптимальная стратегия, где r_{ij} – элементы матрицы рисков.

Модели управления запасами

Основные понятия. Для нормального функционирования предприятия и фирмы обычно имеют различные запасы: сырье, основные и вспомогательные материалы, полуфабрикаты (комплектующие изделия, готовая продукция, предназначенная для продажи, и т. д.). Совокупность подобных материалов, представляющих временно не используемые экономические ресурсы, называют *запасами предприятия*. Другими словами, под запасом понимается все, на что имеется спрос и что временно выключено из производства.

Под Q будем понимать количество изделий или материалов (товаров) только одного вида. Если на изделие поступает заявка, то оно отпускается, и значение Q падает. Предположим, что величина спроса непрерывна во времени. Если $Q = 0$, то имеет место дефицит.

Любая математическая модель, которая применяется для изучения определенной ситуации в управлении запасами, должна учитывать факторы, связанные с издержками. Различают следующие виды издержек:

1) *организационные издержки* – расходы, связанные с оформлением и доставкой товаров;

2) *издержки содержания запасов* – затраты, связанные с хранением. Они возникают из-за амортизации в процессе хранения (изделия могут портиться, устаревать, их количество может уменьшаться и т. д.);

3) *издержки, связанные с дефицитом*: если поставка со склада не может быть выполнена, то возникают дополнительные издержки, связанные с отказом (денежный штраф или ущерб, не осязаемый непосредственно, например ухудшение бизнеса в будущем и потеря потребителей);

4) *издержки, связанные с приобретением запасов*. Их учитывают, если цена единицы продукции зависит от величины партии. Количество товара, поставляемое на склад, называют *размером партии*.

Задача управления запасами состоит в определении объемов поставок и периодичности заказов, при которых издержки (функция затрат) принимают минимальное значение.

Основная модель управления запасами. Введем обозначения необходимых для составления модели величин. Данные поместим в табл. 60.

Таблица 60

Основные обозначения

Величина	Обозначение	Единица измерения	Предположения
Интенсивность спроса	ν	Единиц товара в единицу времени	Спрос постоянен и непрерывен; весь спрос удовлетворяется
Организационные издержки	k	Денежных единиц за одну поставку	Издержки постоянны, не зависят от размера партии
Стоимость товара	s	Денежных единиц за единицу товара	Цена единицы товара постоянна; рассматривается один вид товара
Издержки содержания запасов	h	Денежных единиц за единицу товара в единицу времени	Стоимость хранения единицы товара в течение периода времени постоянна
Размер партии	q	Единиц товара в одной партии	Размер партии постоянен; поступление товара происходит мгновенно, как только уровень запаса равен нулю

График изменения запасов представлен на рис. 25.

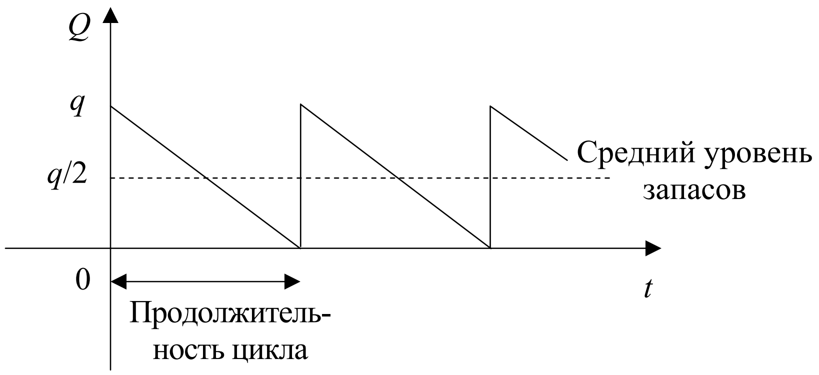


Рис. 25. График изменения запасов

Чтобы полностью удовлетворить годовой спрос ν при размере поставки q, необходимо обеспечить ν/q поставок или партий в единицу времени. Средний уровень запасов составляет $q/2$. Уравнение издержек имеет вид:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = \frac{k\nu}{q} + s\nu + \frac{hq}{2},$$

где L_1 – общие организационные издержки; L_2 – стоимость товаров; L_3 – общие издержки содержания запасов.

Оптимальный размер партии $q_{\text{опт}}$:

$$q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2k\nu}{h}}.$$

Данное равенство называется *формулой Уилсона*.

Сетевое планирование и управление

Основные понятия. Современное сетевое планирование начинается с разбиения программы работ на операции. Далее определяются оценки продолжительности операций и строится сетевая модель (график). Построение сетевой модели позволяет проанализировать все операции и внести улучшения в структуру модели до начала ее реализации. Затем строится календарный график (план), определяющий начало и окончание каждой операции, а также взаимосвязи с другими операциями графика. Календарный график выявляет критические операции, которым надо уделять особое внимание, чтобы закончить все работы в директивный срок. Что касается некритических операций, то календарный план позволяет определить резервы времени, которые можно выгодно использовать при задержке выполнения работ или эффективном применении как трудовых, так и финансовых ресурсов.

Сетевая модель – графическое изображение плана выполнения комплекса работ, состоящее из нитей (работ) и узлов (событий), которые отражают логическую взаимосвязь всех операций.

Работа – это любые операции, трудовые процессы, сопровождающиеся затратами ресурсов или времени. Это активный процесс, требующий затрат ресурсов, либо пассивный (ожидание), приводящий к достижению намеченного результата. На сетевых графиках работы изображают стрелками. Рядом со стрелкой указывают числовые характеристики: время выполнения работы, расход ресурса, количество исполнителей и т. д. Под работами подразумеваются не только реальные хозяйственные или технологические процессы, требующие затрат времени и ресурсов для их осуществления, но и процессы, потребляющие только время. Также принято считать работами и те процессы, которые не требуют затрат ни времени, ни ресурсов. Это так называемые *фиктивные работы*. Они показывают, что определенная работа не может совершаться раньше другой. На сетевых графиках фиктивные работы изображают пунктирными стрелками.

Событие – это результат (промежуточный или конечный) выполнения одной и/или нескольких предшествующих работ. *Событие* означает факт окончания всех работ, в него входящих, и/или начала работ, из него выходящих. Оно не имеет протяженности во времени. На сетевом графике события изображаются кружками с указанием номера события. В каждое событие может входить и выходить из него несколько работ, а каждая работа ограничена двумя событиями. Событие выражает логическую связь между работами, заключающуюся в том, что работы, входящие в это событие, непосредственно предшествуют работам, выходящим из него; ни одна выходящая из данного события работа не может начинаться до окончания всех работ, входящих в него.

Событие, с которого начинается выполнение работ, является *исходным*; оно не имеет предшествующих работ. Событие, которое констатирует факт завершения проекта, называется *завершающим*; оно не имеет последующих работ. Все прочие события являются *промежуточными*.

Любая последовательность работ сети, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы, называется *путем*. Под *длиной пути* $(i; j_1), (j_1; j_2), ..., (j_k; j)$ из события i в событие j будем понимать продолжительность выполнения всей последовательности работ, составляющих этот путь: $t_{i,j_1} + t_{j_1,j_2} + \ldots + t_{j_k,j}$. Путь, в котором начальная вершина совпадает с исходным событием, а конечная – с завершающим, называется *полным*. Путь от исходного события до любого промежуточного события i называется *предшествующим событию i путем*. Предшествующий событию i путь, имеющий наибольшую длину, будет *максимальным предшествующим.* Он обозначается $L_1(i)$, а его продолжительность – $t[L_1(i)]$. Путь от данного события i до завершающего события называется *последующим путем*. Такой путь с наибольшей длиной будет *максимальным последующим*. Он обозначается $L_2(i)$, его продолжительность – $t[L_2(i)]$. *Критическим* называется полный путь, имеющий наибольшую продолжительность. Таких путей в сети может быть несколько. *Критический путь* – это путь, не имеющий резервов и включающий самые напряженные работы комплекса. На сетевом графике критический путь выделяется двойной или жирной линией.

Работы и события, принадлежащие критическому пути, называются *критическими*. Все остальные работы являются некритическими (ненапряженными) и обладают резервами времени, которые позволяют передвигать сроки их выполнения, не влияя на общую продолжительность выполнения всего комплекса работ.

Суммарная продолжительность работ, принадлежащих критическому пути, называется *критическим временем* $t_{кр}$ выполнения всего комплекса работ.

Временные параметры сетевого графика. Основным временным параметром сетевого графика является *продолжительность критического пути*. Расчет критического пути включает два этапа. Первый называется *прямым проходом*. Вычисления начинают с исходного события и продолжают до тех пор, пока не будет достигнуто завершающее событие. Для каждого события определяется ранний срок его наступления. На втором этапе, называемом *обратным проходом*, вычисления начинают с завершающего события и продолжают до тех пор, пока не будет достигнуто исходное событие. Для каждого события вычисляется поздний срок его наступления.

Ранним сроком $t_р(i)$ *свершения события* i называется самый ранний момент времени, к которому завершаются все предшествующие этому событию работы, т. е.

$$t_{\text{р}}(i) = t[L_1(i)].$$

Поздним сроком $t_{\text{п}}(i)$ *свершения события* i является самый поздний момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для завершения всех работ, следующих за этим событием, без превышения критического времени $t_{\text{кр}}$. Очевидно, что $t_{\text{п}}(i)$ определяется разностью между $t_{\text{кр}}$ и длиной максимального из последующих путей:

$$t_{\text{п}}(i) = t_{\text{кр}} - t[L_2(i)].$$

Для событий критического пути ранний и поздний сроки свершения событий совпадают.

Разность между поздним и ранним сроками свершения события составляет *резерв времени события*

$$R(i) = t_{\text{п}}(i) - t_{\text{р}}(i).$$

Резервы критических событий равны нулю.

При расчете временных параметров вручную удобно проводить вычисления непосредственно на графе, воспользовавшись четырехсекторной схемой. В этом случае каждый кружок, обозначающий событие, делим на четыре сектора, в каждом из которых записываем следующую информацию.

1. Проставляем в верхних секторах номера событий (в соответствии с ранжированием).

2. Рассматривая события в порядке возрастания номеров, по входящим в данное событие работам определяем $t_{\text{р}}(i)$ и записываем в левом секторе.

3. Начиная с конечного события, для которого $t_{\text{п}}(n) = t_{\text{р}}(n) = t_{\text{кр}}$ (n – номер конечного события), для каждого события по выходящим из него работам определяем $t_{\text{п}}(i)$ и записываем в правом секторе.

4. В нижнем секторе записываем резерв времени события $R(i)$ (рис. 26).

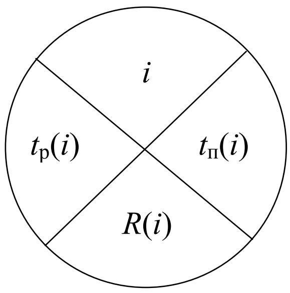


Рис. 26. Четырехсекторная схема расчета

Зная сроки свершения событий, можно определить *временные параметры работ*:

1. *Ранний срок начала работы* $(i;\ j)$, который равен раннему сроку свершения события i:

$$t'_{\text{р}}(i;\ j) = t_{\text{р}}(i).$$

2. *Ранний срок окончания работы* $(i;\ j)$, который равен сумме раннего срока свершения ее начального события и продолжительности работы:

$$t''_{\text{р}}(i;\ j) = t_{\text{р}}(i) + t_{ij}.$$

3. *Поздний срок окончания работы* $(i;\ j)$ совпадает с поздним сроком свершения ее конечного события:

$$t''_{\text{п}}(i;\ j) = t_{\text{п}}(j).$$

4. *Поздний срок начала работы* $(i;\ j)$, который равен разности между поздним сроком свершения ее конечного события и продолжительностью работы:

$$t'_{\text{п}}(i;\ j) = t_{\text{п}}(j) - t_{ij}.$$

Так как сроки выполнения работ находятся в границах, определяемых $t'_{\text{р}}(i;\ j)$ и $t''_{\text{п}}(i;\ j)$, то они могут иметь разного вида резервы времени.

5. *Полный резерв времени работы* – это максимально возможный запас времени, на который можно отсрочить начало работы или увеличить продолжительность ее выполнения при условии, что конечное для данной работы событие наступит не позднее своего позднего срока:

$$R_{\text{полн}}(i;\ j) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t_{ij}.$$

Таким образом, полный резерв времени работы есть максимальное время, на которое можно увеличить ее продолжительность, не изменяя продолжительности критического пути. Все некритические работы имеют полный резерв времени, отличный от нуля.

Построение линейного графика (графика Ганта). На графике Ганта каждая работа $(i;\ j)$ изображается горизонтальным отрезком, длина которого в соответствующем масштабе равна времени ее выполнения. Начало каждой работы совпадает с ожидаемым сроком свершения ее начального события. Полный резерв времени работы изображается пунктирной линией. По графику Ганта можно определить критическое время выполнения комплекса работ и критический путь.

При решении задач СПУ для каждой из работ иногда задается количество ресурсов, необходимых для ее выполнения, т. к. одновременное выполнение некоторых операций из-за ограничений, связанных с рабочей силой, оборудованием и другими видами ресурсов, иногда оказывается невозможным. Именно в этом отношении представляют ценность полные резервы времени некритических операций.

Пусть r_{ij} – потребности в трудовых ресурсах для выполнения каждой работы (интенсивности использования ресурсов); R – наличие трудовых ресурсов.

Выясним потребности в трудовых ресурсах. Для этого на основе сетевого графика составляем линейный график (график Ганта). На графике Ганта над каждой работой $(i; j)$ проставляем потребность в ресурсах r_{ij}. Проецируем на ось времени начало и конец каждой работы. Проекцию, совпадающую с началом координат, обозначаем τ_0, следующую – τ_1 и т. д. В строке $\sum r_{ij}$ записываем сумму ресурсов r_{ij} для каждого периода выполнения проекта. Полученные $\sum r_{ij}$ наносим на график интенсивности использования ресурсов. Пунктирная линия на графике проводится на уровне R ограничения наличного ресурса.

Пример 6. Комплекс работ представлен сетевым графиком (рис. 27).

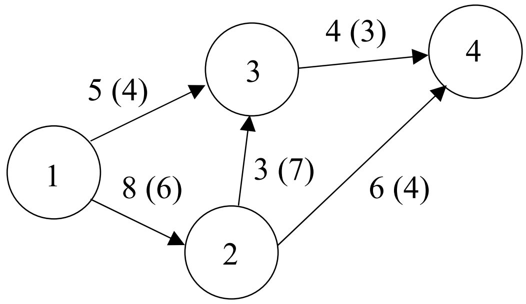


Рис. 27. Сетевой график

Для каждой работы известны продолжительность t_{ij} ее выполнения и количество r_{ij} (число в скобках) ресурса, расходуемого в единицу времени при выполнении этой работы (интенсивность потребления ресурса). В процессе выполнения работ расход ресурса не должен превышать заданной величины R. Требуется:

1) построить линейный график комплекса работ и определить по нему критическое время и сроки начала и окончания работ без учета ограничения на используемый ресурс;

2) построить график интенсивности использования ресурсов;

3) указать потребности в ресурсах в каждый момент времени.

Решение. Найдем ранние и поздние сроки и резервы времени свершения каждого события (рис. 28).

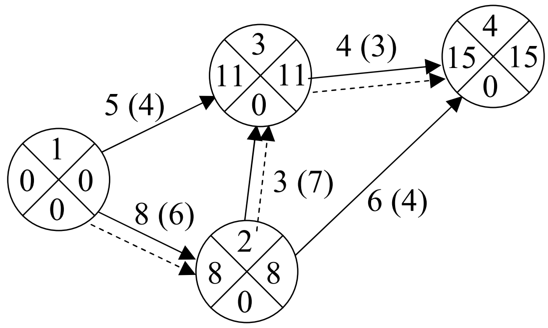


Рис. 28. Сетевой график

Итак, завершающее, четвертое событие может свершиться лишь на пятнадцатый день от начала разработки. Это минимальное время, за которое могут быть выполнены все работы проекта, оно определяется самым длинным полным путем. Ранний срок свершения события (4) совпадает с критическим временем. Критический путь выделим на графике.

Вычислим временные параметры работ и нанесем результаты на календарный график (рис. 29).

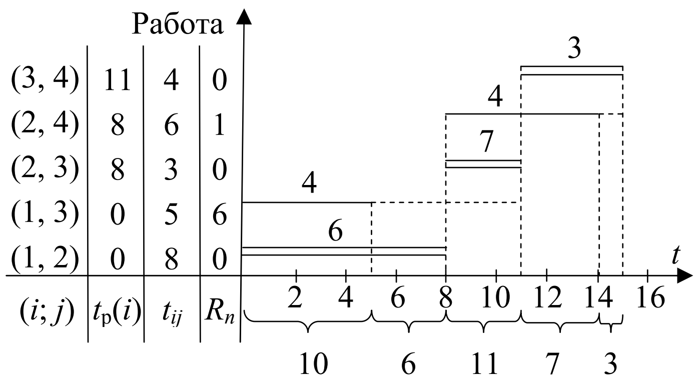


Рис. 29. Календарный график

По имеющемуся линейному графику построим график интенсивности использования ресурсов (рис. 30).

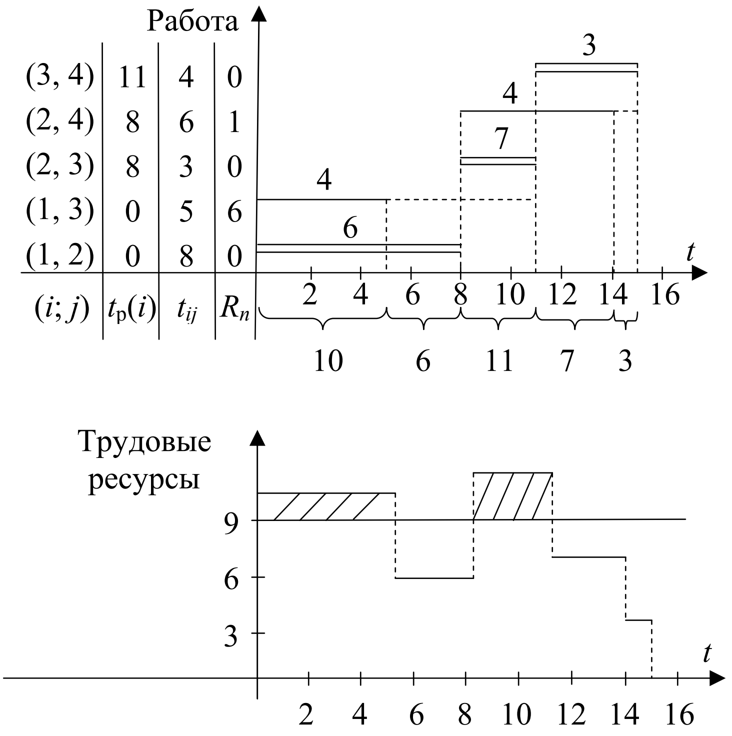


Рис. 30. График интенсивности использования ресурсов

Таким образом, ресурсов не хватает в течение первых пяти дней и с восьмого по одиннадцатый день. Рекомендуется либо увеличить запас ресурсов, либо сдвинуть сроки выполнения работы.

Вопросы для самоконтроля

Модели оптимального планирования

1. Что называется ЗЛП? Приведите примеры.
2. Что называется допустимым планом? Всегда ли он существует? Приведите примеры.
3. Что называется оптимальным планом? Всегда ли он существует? Приведите примеры.
4. Какие методы решения ЗЛП Вы знаете?
5. Сформулируйте правила составления двойственных задач.
6. Какой экономический смысл имеют переменные прямой и двойственной задач в задаче распределения ресурсов?
7. Какой экономический смысл имеют дополнительные переменные в задаче распределения ресурсов, в двойственной задаче?

8. Используя теоремы двойственности, ответить на вопросы:

• Прямая задача имеет оптимальный план. Что можно сказать про решение двойственной?

• Прямая задача не имеет допустимых планов. Что можно сказать про решение двойственной?

• Целевая функция прямой задачи не ограничена. Что можно сказать про решение двойственной?

• Некоторые переменные оптимального плана прямой задачи отличны от нуля. Что можно сказать про соответствующие ограничения двойственной задачи?

• Как изменится оптимальное значение целевой функции при изменении количества одного из ресурсов на единицу?

Модели межотраслевого баланса

1. Приведите примеры балансовых моделей.
2. Что называется стоимостным межотраслевым балансом, из каких квадрантов он состоит?
3. Что называется валовым продуктом, промежуточным и конечным продуктами, чистой продукцией?
4. Приведите схему МОБ.
5. Запишите экономико-математическую модель МОБ.
6. Что называется условно чистой продукцией?
7. Какого вида расчеты можно проводить по модели МОБ?
8. Что называется матрицей прямых материальных затрат?
9. Что называется матрицей полных материальных затрат?
10. Что называется косвенными материальными затратами? Как они связаны с прямыми?
11. Сформулируйте балансовое соотношение модели МОБ.

Методы и модели массового обслуживания

1. Приведите примеры систем обслуживания.
2. Что является предметом изучения теории массового обслуживания?
3. Что такое поток событий?
4. Какие потоки событий Вы знаете?
5. Назовите основные элементы модели массового обслуживания.
6. Какие типы систем массового обслуживания Вы знаете?
7. Как составляется система дифференциальных уравнений Колмогорова?

8. Что такое финальные вероятности состояний и как их найти?

9. Как можно истолковать финальные вероятности?

10. Перечислите основные понятия СМО с отказами.

11. Какие геометрические представления случайного процесса с дискретными состояниями Вы знаете?

Теория игр

1. Что называется игрой, партией, ходом, стратегией?

2. Как находятся верхняя и нижняя чистые цены матричной игры?

3. Всегда ли матричная игра имеет решение в чистых стратегиях?

4. Что называется оптимальным решением матричной игры?

5. Какие методы упрощения матричных игр Вы знаете?

6. Какие стратегии в матричной игре называются чистыми, а какие – смешанными?

7. Какие методы решения матричных игр Вы знаете?

Модели управления запасами

1. Какие ресурсы называются запасами предприятия?

2. Перечислите виды издержек, возникающие при управлении запасами.

3. Составьте уравнение издержек.

4. Как определить оптимальный размер партии?

5. Как выглядит график изменения запасов в основной модели управления запасами?

6. В каком случае применяется модель производственных запасов?

7. Как определить оптимальный размер партии производственных поставок?

8. Как выглядит график изменения запасов в модели производственных поставок?

9. Какие основные предположения в основной модели управления запасами Вы знаете?

Сетевое планирование и управление

1. Дайте определение сетевой модели.

2. Что называется событием, работой, фиктивной работой?

3. Какие события называются промежуточными, исходными, завершающими?

4. Дайте определение пути, полного пути, пути, предшествующего событию.

5. Дайте определение последующего пути, максимального последующего пути.

6. Дайте определение критического пути.

7. Какие работы называются критическими?

8. Какие временные параметры сетевого графика Вы знаете?

9. Что называется ранним, поздним сроком свершения события, резервом времени события?

10. Что называется ранним, поздним сроком начала (окончания) работы, полным резервом времени работы?

11. Как определить время выполнения всего комплекса работ?

12. Что называется линейным графиком (графиком Ганта)?

13. Какие виды резервов времени Вы знаете?

5.2. ПРАКТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

Примеры решения задач

Модели оптимального планирования

Пример 7. Исходя из специализации и своих технологических возможностей предприятие может выпускать четыре вида продукции. Сбыт любого количества обеспечен. Для изготовления этой продукции используются трудовые ресурсы, полуфабрикаты и станочное оборудование. Общий объем ресурсов (в расчете на трудовую неделю), расход каждого ресурса на единицу выпускаемой продукции и прибыль, полученная за единицу продукции, приведены в табл. 61.

Требуется определить план выпуска, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

Таблица 61

Исходные данные

Вид ресурса		Затраты на выпуск продукции				Запас ресурса
		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	
P_1	Трудовые ресурсы, чел.-ч	4	2	2	8	4800
P_2	Полуфабрикаты, кг	2	10	6	0	2400
P_3	Станочное оборудование, станко-ч	1	0	2	1	1500
Цена единицы продукции, ден. ед.		65	70	60	120	–

Решение. Математическая модель прямой задачи:

$$z(x) = 65x_1 + 70x_2 + 60x_3 + 120x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 \le 4800, \\ 2x_1 + 10x_2 + 6x_3 \le 2400, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \le 1500, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,\ 4}. \end{cases}$$

Представим прямую задачу в виде табл. 62.

Таблица 62

Прямая задача

z	65	70	60	120	$\to$	max
y_i	4	2	2	8	$\le$	4800
	2	10	6	0		2400
	1	0	2	1		1500

Составим двойственную задачу (табл. 63). Транспонируем таблицу.

Таблица 63

Двойственная задача

f	4800	2400	1500	$\to$	min
x_j	4	2	1	$\ge$	65
	2	10	0		70
	2	6	2		60
	8	0	1		120

Математическая модель двойственной задачи:

$$f(y) = 4800y_1 + 2400y_2 + 1500y_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 65, \\ 2y_1 + 10y_2 \ge 70, \\ 2y_1 + 6y_2 + 2y_3 \ge 60, \\ 8y_1 + y_3 \ge 120, \\ y_i \ge 0,\ i = \overline{1,\ 3}. \end{cases}$$

Решим прямую задачу с помощью симплексного метода: $x^* = (0; 0; 400; 500; 0; 0; 200)$, $z^* = z(x^*) = 84\ 000$. Последняя симплекс-таблица имеет вид, представленный в табл. 64.

Таблица 64

Последняя симплекс-таблица

Номер итерации	БП	$c_Б$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
				65	70	60	120	0	0	0
2	x_4	120	500	5/12	–1/6	0	1	1/8	–1/24	0
	x_3	60	400	1/3	5/3	1	0	0	1/6	0
	x_7	0	200	–1/12	–19,6	0	0	–1/8	–7/24	1
	Оценки		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ_7
			84 000	5	10	0	0	15	5	0
	Соответствующие переменные двойственной задачи			y_4	y_5	y_6	y_7	y_1	y_2	y_3

Выпишем из индексной строки последней (второй) итерации компоненты искомого оптимального плана $y^* = (15; 5; 0; 5; 10; 0; 0)$ – двойственные оценки. Получим:

$$\min f = \max z = 84\ 000.$$

Запишем это равенство в развернутой форме:

$$4800 \cdot 15 + 2400 \cdot 5 + 1500 \cdot 0 = 65 \cdot 0 + 70 \cdot 0 + 60 \cdot 400 + 120 \cdot 500.$$

Учитывая, что компоненты $y_1^* = 15;\ y_2^* = 5;\ y_3^* = 0$ представляют собой оценки ресурсов P_1, P_2, P_3, заключаем: при оптимальном плане оценка ресурсов, затраченных на выпуск продукции, совпадает с оценкой произведенной продукции.

Таким образом, оптимальность плана означает точное воплощение в оценке произведенной по этому плану продукции оценки всех израсходованных ресурсов, т. е. полное отсутствие непроизводительных затрат.

Найден оптимальный план $x^* = (0; 0; 400; 500; 0; 0; 200)$ выпуска продукции. При этом плане третье ограничение прямой задачи выполняется как строгое неравенство: $0 + 2 \cdot 400 + 500 = 1300 < 1500$. Это означает, что расход ресурса P_3 меньше его запаса, т. е. ресурс P_3 избыточный. Именно поэтому в оптимальном плане $y^* = (15; 5; 0; 5; 10; 0; 0)$ двойственной задачи оценка y_3^* этого ресурса равна нулю.

А вот оценки y_1^* и y_2^* ресурсов P_1 и P_2 выражаются положительными числами 15 и 5, что свидетельствует о дефицитности этих ресурсов: при оптимальном плане они полностью используются. В самом деле, ограничения по этим ресурсам выполняются как строгие равенства: $4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 400 + 8 \cdot 500 = 4800$; $2 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 6 \cdot 400 = 2400$.

Поскольку $15 > 5$, ресурс P_1 считается более дефицитным, чем ресурс P_2.

Первое и второе ограничения двойственной задачи выполняются как строгие неравенства: $4 \cdot 15 + 2 \cdot 5 + 0 > 65$; $2 \cdot 15 + 10 \cdot 5 > 70$. Это означает, что оценки ресурсов, расходуемых на изготовление единицы продукции $П_1$ и $П_2$, превышают оценки единицы этой продукции. Понятно, что такую продукцию выпускать предприятию невыгодно, поэтому продукция $П_1$ и $П_2$ не вошла в оптимальный план. Что же касается продукции $П_3$ и $П_4$ $(x_3^* > 0;\ x_4^* > 0)$, то выпуск ее оправдан, поскольку оценка израсходованных ресурсов совпадает с оценкой произведенной продукции: $2 \cdot 15 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot 0 = 60$; $8 \cdot 15 + 0 = 120$.

Установлено, что ресурсы P_1 и P_2 являются дефицитными. В связи с этим можно утверждать, что каждая единица ресурса P_i, дополнительно введенная в производство, принесет дополнительную выручку $\Delta_i z$, численно равную y_i^*. В самом деле, при $\Delta b_1 = 1$ получаем: $\Delta_1 z = y_1^* \Delta b_1 = 15 \cdot 1 = 15$. По тем же причинам каждая дополнительная единица ресурса P_2 обеспечит прирост $\Delta_2 z$ выручки, равный 5 ден. ед. Поэтому ресурс P_1 считается более дефицитным по сравнению с ресурсом P_2: он может содействовать получению большей выручки.

Что же касается избыточного ресурса P_3, то увеличение его запаса не приведет к росту выручки, поскольку $\Delta_3 z = y_3 \Delta b_3 = 0 \cdot \Delta b_3 = 0$. Из этих рассуждений следует, что оценки ресурсов позволяют совершенствовать план выпуска продукции.

Выясним экономический смысл оценок $y_4^*, y_5^*, y_6^*, y_7^*$ продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$.

По оптимальному плану $x^* = (0; 0; 400; 500; 0; 0; 200)$ выпускать следует продукцию $П_3$ и $П_4$. Оценки y_6^* и y_7^* этих видов продукции равны нулю. Что это означает практически, станет ясно, если представить оценки в развернутой записи:

$$y_6^* = (2y_1^* + 6y_2^* + 2y_3^*) - 60 = (2 \cdot 15 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot 0) - 60 = 0;$$

$$y_7^* = (8y_1^* + y_3^*) - 120 = (8 \cdot 15 + 0) - 120 = 0.$$

Таким образом, нулевая оценка показывает, что эта продукция является неубыточной, поскольку оценка ресурсов, расходуемых на выпуск единицы такой продукции, совпадает с оценкой единицы изготовленной продукции.

Что же касается продукции $П_1$ и $П_2$, являющейся, как установлено ранее, убыточной, а потому и не вошедшей в оптимальный план, то для ее оценок $y_4^* = 5$ и $y_5^* = 10$ получаем:

$$y_4^* = (y_1^* + 2y_2^* + y_3^*) - 65 = 70 - 65 = 5;$$
$$y_5^* = (2y_1^* + 10y_2^*) - 70 = 80 - 70 = 10.$$

Отсюда видно, что оценка убыточной продукции показывает, насколько будет снижать каждая изготовленная единица такой продукции достигнутый оптимальный уровень выручки.

Выясним состав двойственной оценки. Для этого рассмотрим, например, первый ресурс (его запас $b_1 = 4800$). Он дефицитен. Увеличение запаса этого ресурса на единицу приведет к дополнительному выпуску продукции, что увеличит выручку на y_1^* = 15 ден. ед. За счет чего? Возьмем соответствующий столбец $\Delta_5 = (1/8;\ 0;\ -1/8)^T$ табл. 63. Его элементы характеризуют изменение объемов выпуска продукции и остатка ресурса при увеличении первого ресурса на единицу, т. е. если заменить b_1 на $b_1' = b_1 + 1 = 4800 + 1 = 4801$, то выпуск $x_4^* = 500$ продукции $П_4$ заменится на $x_4'^* = 500 + 1/8 = 500{,}125$; выпуск $x_3^* = 400$ продукции $П_3$ – на $x_3'^* = 400 + 0 = 400$. Резерв же третьего ресурса сократится до $x_7'^* = 200 - 1/8 = 199{,}875$. При этом выручка возрастет на $120 \cdot 1/8 + 60 \cdot 0 + 0 \cdot (-1/8) = 15$ ден. ед., что соответствует двойственной оценке первого ресурса. Аналогично при увеличении второго ресурса на единицу выручка возрастет на $120 \cdot (-1/24) + 60 \cdot 1/6 + 0 \cdot (-7/24) = 5$ ден. ед., что соответствует двойственной оценке второго ресурса. Полученные равенства показывают, какие составляющие образуют двойственные оценки.

Найдем коэффициент взаимозаменяемости ресурсов. В примере дефицитны трудовые ресурсы и полуфабрикаты. Если бы трудовые ресурсы уменьшили на единицу, то связанное с этим падение выручки (на 15 ден. ед.) можно было бы компенсировать увеличением полуфабрикатов на величину

$$\Delta b_2 = \frac{y_1^*}{y_2^*}\Delta b_1 = \frac{15}{5} \cdot 1 = 3.$$

Значит, обеспечив полуфабрикаты в объеме $b_2' = b_2 + \Delta b_2 =$ $= 2400 + 3 = 2403$ кг с трудовыми ресурсами $b_1' = b_1 - \Delta b_1 = 4800 - 1 =$ $= 4799$ чел.-ч, можно получить ту же выручку, что и при начальных ресурсах.

Проанализируем целесообразность расширения ассортимента выпускаемой продукции и установление цены на новую продукцию. Пусть в условиях примера изучается вопрос о целесообразности выпуска продукции $П_5$ с характеристиками, представленными в табл. 65.

Таблица 65

Затраты на выпуск продукции $П_5$

Вид ресурса		Затраты на выпуск продукции $П_5$
P_1	Трудовые ресурсы, чел.-ч	3
P_2	Полуфабрикаты, кг	6
P_3	Станочное оборудование, станко-ч	8
Цена единицы продукции, ден. ед.		95

Чтобы выпуск продукции $П_5$ был оправдан, оценка ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции $П_5$, должна быть не менее цены $c_5 = 95$ ден. ед.

Находим оценку затраченных ресурсов: $3 \cdot 15 + 6 \cdot 5 + 8 \cdot 0 = 75$. Поскольку $75 < 95$, выпускать продукцию $П_5$ целесообразно: каждая единица этой продукции принесет предприятию прибыль, равную $95 - 75 = 20$ ден. ед.

Модели межотраслевого баланса

Пример 8. По условным данным двух отраслей – межотраслевым потокам и вектору конечной продукции:

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 8 \end{bmatrix};\ Y = \begin{bmatrix} 14 \\ 22 \end{bmatrix}$$

необходимо:

1) определить в плановом периоде вектор конечного использования при валовом выпуске $X = \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \end{bmatrix}$;

2) привести схему МОБ на плановый период.

Решение.

Вектор конечного использования можно определить по формуле: $Y = (E - A)X$. Сначала найдем матрицу A – матрицу коэффициентов прямых материальных затрат:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \; i = \overline{1,\, n}; \;\; j = \overline{1,\, n}.$$

Валовой выпуск i-й отрасли равен: $X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i$, т. е.

$$X_1 = 2 + 4 + 14 = 20; \;\; X_2 = 10 + 8 + 22 = 40.$$

Тогда $X = \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \end{bmatrix}$.

Коэффициенты прямых затрат:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{X_1} = \frac{2}{20} = 0{,}1; \;\; a_{12} = \frac{x_{12}}{X_2} = \frac{4}{40} = 0{,}1;$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{X_1} = \frac{10}{20} = 0{,}5; \;\; a_{22} = \frac{x_{22}}{X_2} = \frac{8}{40} = 0{,}2.$$

Следовательно, $A = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}2 \end{bmatrix}$ – матрица коэффициентов прямых материальных затрат.

Значит,

$$E - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9 & -0{,}1 \\ -0{,}5 & 0{,}8 \end{bmatrix}.$$

Тогда вектор конечного использования имеет вид:

$$Y = \begin{bmatrix} 0{,}9 & -0{,}1 \\ -0{,}5 & 0{,}8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9 \cdot 30 - 0{,}1 \cdot 50 \\ -0{,}5 \cdot 30 + 0{,}8 \cdot 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы привести схему МОБ на плановый период, нужно найти новые межотраслевые поставки по формулам: $x_{ij} = a_{ij} X_j$, $i = \overline{1,\, n}$; $j = \overline{1,\, n}$.

$$x_{11} = a_{11} X_1 = 0{,}1 \cdot 30 = 3; \;\; x_{12} = a_{12} X_2 = 0{,}1 \cdot 50 = 5;$$

$$x_{21} = a_{21} X_1 = 0{,}5 \cdot 30 = 15; \;\; x_{22} = a_{22} X_2 = 0{,}2 \cdot 50 = 10.$$

Тогда схема МОБ имеет вид, представленный в табл. 66.

Таблица 66

Схема МОБ

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Продукция	
	1	2	конечная Y	валовая X
1	3	5	22	30
2	15	10	25	50
Z	12	35	47	–
X	30	50	–	80

Пример 9. Народное хозяйство представлено тремя отраслями: 1) тяжелая промышленность; 2) легкая промышленность; 3) сельское хозяйство. За отчетный период получены данные о межотраслевых поставках x_{ij} и вектор объемов конечного потребления Y_0 (табл. 67). Найти МОБ при валовом выпуске X, матрицу полных затрат B точным и приближенным методами, оценить погрешность.

Таблица 67

Исходные данные

Отрасль	Межотраслевые потоки			Y_0	X
	1	2	3		
1	80	15	25	80	300
2	10	60	5	225	400
3	10	30	30	30	400

Решение. По данным задачи находим вектор объемов валовых выпусков:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 80+15+25+80 \\ 10+60+5+225 \\ 10+30+30+30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Находим матрицу коэффициентов прямых затрат:

$$A = \begin{bmatrix} 80/200 & 15/300 & 25/100 \\ 10/200 & 60/300 & 5/100 \\ 10/200 & 30/300 & 30/100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,05 & 0,25 \\ 0,05 & 0,2 & 0,05 \\ 0,05 & 0,1 & 0,3 \end{bmatrix}.$$

Матрица «затраты – выпуск» примет вид:

$$(E-A)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0,4&0,05&0,25\\0,05&0,2&0,05\\0,05&0,1&0,3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,6&-0,05&-0,25\\-0,05&0,8&-0,05\\-0,05&-0,1&0,7\end{bmatrix}.$$

Новый вектор конечного потребления найдем по данному вектору валовых выпусков X:

$$Y=\left(E-A\right)X=\begin{bmatrix}0,6&-0,05&-0,25\\-0,05&0,8&-0,05\\-0,05&-0,1&0,7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}300\\400\\400\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}60\\285\\225\end{bmatrix}.$$

Чтобы построить таблицу МОБ на расчетный период нужно определить межотраслевые потоки:

$$x_{11}=0,4\cdot 300=120;\ x_{12}=0,05\cdot 400=20;\ x_{13}=0,25\cdot 400=100;$$

$$x_{21}=0,05\cdot 300=15;\ x_{22}=0,2\cdot 400=80;\ x_{23}=0,05\cdot 400=20;$$

$$x_{31}=0,05\cdot 300=15;\ x_{32}=0,1\cdot 400=40;\ x_{33}=0,3\cdot 400=120.$$

Межотраслевой баланс на расчетный период представлен в табл. 68.

Таблица 68

МОБ на расчетный период

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Продукция	
	1	2	3	конечная Y	валовая X
1	120	20	100	60	300
2	15	80	20	285	400
3	15	40	120	225	400
Z	150	260	160	**570**	–
X	300	400	400	–	**1100**

Найдем матрицу коэффициентов полных материальных затрат B путем обращения матрицы $(E-A)$:

$$B=\left(E-A\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1,735&0,187&0,633\\0,118&1,273&0,133\\0,14&0,196&1,492\end{bmatrix}.$$

Косвенные затраты первого порядка равны: $A^1 = A \cdot A$, второго – $A^2 = A \cdot A^1$, третьего – $A^3 = A \cdot A^2$. Найдем сумму затрат $\tilde{B} = (E + A) + (A^1 + A^2 + A^3) = \left[\tilde{b}_{ij}\right]_{n\times n}$ и сравним ее с полными затратами:

$$A^1 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0{,}175 & 0{,}056 & 0{,}178 \\ 0{,}033 & 0{,}048 & 0{,}038 \\ 0{,}04 & 0{,}053 & 0{,}108 \end{bmatrix};$$

$$A^2 = A \cdot A^1 = \begin{bmatrix} 0{,}082 & 0{,}038 & 0{,}01 \\ 0{,}017 & 0{,}015 & 0{,}022 \\ 0{,}024 & 0{,}023 & 0{,}045 \end{bmatrix};$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 0{,}04 & 0{,}022 & 0{,}052 \\ 0{,}009 & 0{,}006 & 0{,}012 \\ 0{,}013 & 0{,}01 & 0{,}021 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица полных материальных затрат равна:

$$\tilde{B} = (E + A) + (A^1 + A^2 + A^3) = \begin{bmatrix} 1{,}7 & 0{,}16 & 0{,}58 \\ 0{,}11 & 1{,}27 & 0{,}12 \\ 0{,}13 & 0{,}19 & 1{,}47 \end{bmatrix}.$$

Относительные погрешности составят (в процентах):

$$\frac{b_{ij} - \tilde{b}_{ij}}{b_{ij}} \cdot 100\% = \begin{bmatrix} 2{,}24 & 12{,}53 & 8{,}47 \\ 7{,}46 & 0{,}44 & 9{,}06 \\ 9{,}72 & 4{,}76 & 1{,}32 \end{bmatrix}.$$

Пример 10. Рассчитать упрощенную модель экономической системы, в которой выделены три производящих сектора. В табл. 69 структура экономики описана в единицах стоимости.

Таблица 69

Исходные данные

Секторы	Сельское хозяйство	Промышленность	Транспорт	Конечный спрос	Общий выпуск
1	2	3	4	5	6
Сельское хозяйство	50	16	13	60	139

Окончание табл. 69

1	2	3	4	5	6
Промышленность	30	10	19	100	159
Транспорт	15	14	17	80	126

Требуется вычислить вектор выпуска для заданного вектора конечного спроса: $Y = \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 80 \end{bmatrix}$.

Задан вектор норм добавленной стоимости $v = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}5 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$, включающий зарплату, налоги, прибыль и инвестиции на единицу выпускаемой продукции для каждой отрасли. Определить вектор цен. Найти приращения равновесных цен, если норма добавленной стоимости для транспорта станет 0,5.

Решение. Для этого сначала необходимо рассчитать коэффициенты матрицы прямых затрат (матрица A) на единицу общего выпуска продукции отрасли, что требует следующих вычислений:

$$A = \begin{bmatrix} 50/139 & 16/159 & 13/126 \\ 30/139 & 10/159 & 19/126 \\ 15/139 & 14/159 & 17/126 \end{bmatrix}.$$

Получим:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}3957 & 0{,}1006 & 0{,}1032 \\ 0{,}2158 & 0{,}0629 & 0{,}1508 \\ 0{,}1079 & 0{,}0881 & 0{,}1349 \end{bmatrix}.$$

Запишем единичную матрицу:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и, вычитая поэлементно, найдем:

$$E - A = \begin{bmatrix} 0,6403 & -0,1006 & -0,1032 \\ -0,2158 & 0,9371 & -0,1508 \\ -0,1079 & -0,0881 & 0,8651 \end{bmatrix};$$

$$B = (E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,6691 & 0,2012 & 0,2341 \\ 0,4249 & 1,1361 & 0,2487 \\ 0,2515 & 0,1417 & 1,2105 \end{bmatrix}.$$

Каждый коэффициент b_{ij} матрицы полных затрат B показывает затраты i-го продукта на производство единицы j-го конечного продукта в стоимостном выражении.

Тогда искомый объем общего выпуска для удовлетворения заданного конечного спроса

$$X = BY = \begin{bmatrix} 215,8 \\ 232,8 \\ 143,1 \end{bmatrix}.$$

Умножая полученные величины общего выпуска по трем секторам на элементы матрицы A, найдем величины производственного потребления, т. е. три первых столбца. Для контроля правильности вычислений можно просуммировать построчно производственное потребление и конечный спрос, заданный вектором Y. Результаты расчетов приведены в табл. 70.

Таблица 70

Результаты расчетов

Секторы	Сельское хозяйство	Промышленность	Транспорт	Конечный спрос	Общий выпуск
Сельское хозяйство	77,635	23,426	14,764	100	215,825
Промышленность	46,581	14,642	21,578	150	232,801
Транспорт	23,290	20,498	19,306	80	143,094

Предположим, что нужно проанализировать изменения объемов производства по секторам при увеличении конечного спроса на транспорт на 5%, т. е. на 4 единицы. Для этого достаточно учесть, что третий столбец матрицы полных затрат B показывает приросты общего выпуска в отраслях при увеличении конечного спроса на транспорт на единицу. Следовательно, вектор прироста по секторам экономики составит:

$$\Delta x = 4 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}2341 \\ 0{,}2487 \\ 1{,}2105 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9366 \\ 0{,}9948 \\ 4{,}8419 \end{bmatrix}.$$

Пусть задан вектор норм добавленной стоимости $v = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}5 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$, включающий зарплату, налоги, прибыль и инвестиции на единицу выпускаемой продукции для каждой отрасли. Для определения вектора цен используем формулу $p = B^T v$. Получим:

$$p = \begin{bmatrix} 1{,}6691 & 0{,}4249 & 0{,}2515 \\ 0{,}2012 & 1{,}1361 & 0{,}1407 \\ 0{,}2341 & 0{,}2487 & 1{,}2105 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}5 \\ 0{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}0309 \\ 0{,}7330 \\ 0{,}9443 \end{bmatrix}.$$

Столбцы матрицы B^T показывают величины изменения равновесных цен в каждой отрасли при увеличении нормы добавленной стоимости для соответствующей столбцу продукции на единицу. Например, если для транспорта норма добавленной стоимости станет 0,5 (изменение на −0,1), то приращения равновесных цен будут:

$$\Delta p = -0{,}1 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}2515 \\ 0{,}1407 \\ 1{,}2105 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}02515 \\ -0{,}01407 \\ -0{,}12105 \end{bmatrix},$$

что составит −2,44% для сельского хозяйства, −1,92% для промышленности и −12,82% для транспорта.

Методы и модели массового обслуживания

Пример 11. Техническое устройство может находиться в одном из трех состояний: S_0, S_1, S_2. Интенсивности потоков, которые переводят устройство из одного состояния в другое, известны: $\lambda_{01} = 2$; $\lambda_{10} = 4$; $\lambda_{21} = 2$; $\lambda_{12} = 3$; $\lambda_{20} = 4$. Необходимо построить размеченный граф состояний, записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова, найти финальные вероятности состояний и проанализировать полученное решение.

Решение. Размеченный граф состояний представлен на рис. 31.

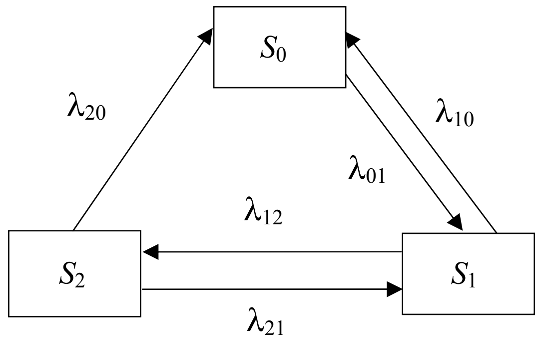


Рис. 31. Граф состояний

По графу запишем систему уравнений Колмогорова в общем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_{01}p_0(t) + \lambda_{10}p_1(t) + \lambda_{20}p_2(t), \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_{01}p_0(t) - (\lambda_{10} + \lambda_{12})p_1(t) + \lambda_{21}p_2(t), \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_{12}p_1(t) - (\lambda_{20} + \lambda_{21})p_2(t), \\ p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) = 1. \end{cases}$$

Вместо интенсивностей потоков λ_{ij} подставим их конкретные значения и получим искомую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -2p_0(t) + 4p_1(t) + 4p_2(t), \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = 2p_0(t) - 7p_1(t) + 2p_2(t), \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = 3p_1(t) - 6p_2(t), \\ p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) = 1. \end{cases}$$

Чтобы найти финальные вероятности состояний, в уравнениях Колмогорова отбросим первое уравнение, а по остальным составим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2p_0 - 7p_1 + 2p_2 = 0, \\ 3p_1 - 6p_2 = 0, \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $p_0 = 0,67;$ $p_1 = 0,22;$ $p_2 = 0,11$.

При достаточно большом времени работы техническое устройство будет находиться в состоянии S_0 с вероятностью $p_0 = 0,67$, в состоянии S_1 – с вероятностью $p_1 = 0,22$ и в состоянии S_2 – с вероятностью $p_2 = 0,11$.

Пример 12. В ОТК цеха работают три контролера. Если деталь поступает в ОТК, когда все контролеры заняты обслуживанием ранее поступивших деталей, то она проходит непроверенной. Среднее число деталей, поступающих в ОТК в течение часа, равно 24, среднее время, которое затрачивает один контролер на обслуживание одной детали, равно 5 мин. Определить вероятность того, что деталь пройдет ОТК необслуженной, насколько загружены контролеры и сколько их необходимо поставить, чтобы $P^*_{обсл} > 0,95$ (* – заданное значение $P_{обсл}$).

Решение. По условию задачи λ = 24 дет./ч = 0,4 дет./мин, $t_{обсл}$ = 5 мин, тогда $\mu = 0,2$, $\rho = 2$.

1. Вероятность простоя каналов обслуживания:

$$P_0 = \frac{1}{1 + 2 + 2 + 1,33} = 0,1587,$$

где 0! = 1.

2. Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{отк} = 8 \cdot \frac{0,1587}{3!} = 0,21.$$

3. Вероятность обслуживания:

$$P_{обсл} = 1 - 0,21 = 0,79.$$

4. Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$n_з = 2 \cdot 0,79 = 1,58.$$

5. Доля каналов, занятых обслуживанием:

$$k_з = \frac{1,58}{3} = 0,526.$$

6. Абсолютная пропускная способность:

$$A = 0,4 \cdot 0,79 = 0,316.$$

При $n = 3$ вероятность $P_{обсл} = 0,79 \leq P^*_{обсл} = 0,95$. Произведя аналогичные расчеты для $n = 4$, получим:

$$P_0 = 0,14; \quad P_{отк} = 0,093; \quad P_{обсл} = 0,907.$$

Так как $P_{обсл} = 0,907 < P^*_{обсл} = 0,95$, то, произведя расчеты для $n = 5$, получим:

$$P_0 = 0,137; \quad P_{отк} = 0,035; \quad P_{обсл} = 0,965 > P^*_{обсл} = 0,95.$$

Таким образом, вероятность того, что при $n = 3$ деталь пройдет ОТК необслуженной, составляет 21%, и контролеры будут заняты обслуживанием на 53%. Чтобы обеспечить вероятность обслуживания более 95%, необходимо не менее пяти контролеров.

Теория игр

Пример 13. Для отопления коттеджа зимой используется уголь, цена на который зависит от времени года и характера зимы. Летом тонна угля стоит 7,5 ден. ед., в мягкую зиму – 8,5, в обычную – 9,0, а в холодную – 9,5 ден. ед. Расход угля в отопительный сезон полностью определяется характером зимы: на мягкую зиму достаточно 6 т, на обычную требуется 7 т, а в холодную зиму расходуется 8 т. Понятно, что затраты домовладельца зависят от количества запасенного им с лета угля. При анализе возможных вариантов уровня запаса следует иметь в виду, что при необходимости недостающее количество угля можно приобрести и зимой. Кроме того, надо учесть, что продать непотребовавшийся уголь возможности не будет. Используя игровой подход, составить платежную матрицу и дать рекомендации, сколько угля следует закупить летом.

Решение. Одним из участников рассматриваемой ситуации является домовладелец, озабоченный необходимостью заготовки определенного количества угля на предстоящий отопительный сезон. Если описанной ситуации придать игровую схему, то домовладелец выступает в ней в качестве сознательного игрока A, заинтересованного в минимизации затрат на приобретение угля. Вторым участником является природа (игрок П), подчиняющаяся своим законам развития. В данном случае игрок П безразличен к результатам тех или иных действий сознательного игрока A (статистика). Подобная ситуация при моделировании представляется типичной для статистической игры.

Заготавливая летом уголь, домовладелец может ориентироваться либо на мягкую (первая чистая стратегия A_1), либо на обычную (вторая чистая стратегия A_2), либо на холодную зиму (третья чистая стратегия A_3), покупая соответственно 6, 7 или 8 т угля. Игрок П может реализовать либо мягкую (первая чистая стратегия – состояние $П_1$), либо обычную (второе возможное состояние $П_2$), либо холодную зиму (третье возможное состояние $П_3$), что потребует затрат 6, 7 или 8 т угля соответственно. Таким образом, платежная матрица статистической игры будет иметь размерность 3×3 (табл. 71).

Вычислим элемент, соответствующий ситуации (A_1; $П_1$). Это наиболее благоприятный случай. В самом деле, домовладелец в расчете на мягкую зиму купил летом 6 т угля, заплатив $6 \cdot 7{,}5 = 45$ ден. ед. Наступившая зима оказалась мягкой, и потому дополнительных затрат не потребовалось. Таким образом, «выигрыш» игрока A равен –45 ден. ед.

Рассмотрим теперь ситуацию (A_1; $П_2$), т. е. случай, когда домовладелец приобрел летом 6 т угля в расчете на мягкую зиму, а зима оказалась обыкновенной. Пришлось дополнительно купить зимой 1 т угля по цене 9 ден. ед., а потому общие расходы на отопление составили $45 + 9 = 54$ ден. ед. «Выигрыш» в этом случае равен –54 ден. ед.

В ситуации (A_1; $П_3$) общие расходы с учетом холодной зимы составили $45 + 2 \cdot 9{,}5 = 64$ ден. ед.

Рассуждая аналогично, находим и остальные элементы платежной матрицы (табл. 71).

Таблица 71

Платежная матрица

Стратегии A	Стратегии П			
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	α_i
A_1 (6)	–45	–54	–64	–64
A_2 (7)	–52,5	–52,5	–62	–62
A_3 (8)	–60	–60	–60	–60
β_j	–45	–52,5	–60	–

Как следует из платежной матрицы, $\alpha = \max(-64; -62; -60) = -60$, $\beta = \min(-45; -52{,}5; -60) = -60$, т. е. $v = -60$. Следовательно, игра обладает седловой точкой, которая и определяет оптимальные чистые стратегии A_3 и Π_3 игроков A и П и чистую цену $v = -60$. Поскольку данная игра является статистической (игрой с природой), то давать рекомендации игроку П (природе) по оптимальному поведению не имеет смысла, а вот сознательному игроку A (домовладельцу) следует рекомендовать чистую стратегию A_3, т. е. запасти летом 8 т угля, за что придется заплатить 60 ден. ед.

Пример 14. Упростить матричную игру, заданную платежной матрицей, которая представлена в табл. 72.

Таблица 72

Платежная матрица

Стратегии A	Стратегии B						
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	α_i
A_1	4	5	5	6	6	4	4
A_2	7	9	3	–3	4	7	–3
A_3	5	3	3	1	4	5	1
A_4	3	4	3	6	–6	3	–6
β_j	7	9	5	6	6	7	–

Решение. Легко заметить, что стратегии B_1 и B_6 полностью совпадают. Можно сказать, что стратегия B_6 *дублирует* стратегию B_1, и исключить одну из них. Сравнивая стратегии игрока A между собой, можно сделать вывод, что при любой стратегии оппонента выигрыш при использовании стратегии A_1 не ниже выигрыша при использовании стратегии A_4. В этом случае говорят, что стратегия A_1 *доминирует* над стратегией A_4, и последнюю следует исключить. Получим табл. 73.

Таблица 73

Платежная матрица

Стратегии A	Стратегии B					
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	4	5	**5**	6	6	**4**
A_2	7	9	3	–3	4	–1
A_3	5	3	3	1	4	1
β_j	7	9	**5**	6	6	–

Из стратегий игрока A ни одну пока нельзя исключить, но у оппонента стратегия B_3 доминирует над стратегиями B_2 и B_5. Исключив эти стратегии, получим табл. 74.

Таблица 74

Платежная матрица

Стратегии A	Стратегии B			
	B_1	B_3	B_4	α_i
A_1	4	**5**	6	**4**
A_2	7	3	–3	–1
A_3	5	3	1	1
β_j	7	**5**	6	–

Пример 15. Решить игру с природой (табл. 75)

Таблица 75

Платежная матрица

Стратегии A	Стратегии П				
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A_1	0	0	0	13	6
A_2	1	11	8	6	2
A_3	2	4	3	5	2
A_4	10	1	8	1	5
β_j	10	11	8	13	6

Решение. Платежная матрица представлена в табл. 76.

Таблица 76

Платежная матрица

Стратегии A	Стратегии П							
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\min\limits_j a_{ij}$	$\max\limits_j a_{ij}$	По Гурвицу ($\lambda = 0{,}5$)
A_1	0	0	0	13	6	0	13	6,5
A_2	1	11	8	6	2	1	11	6
A_3	2	4	3	5	2	2	5	3,5
A_4	10	1	8	1	5	1	10	5,5
β_j	10	11	8	13	6	–	–	–

Элементы матрицы рисков $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$ представлены в табл. 77.

Таблица 77

Матрица рисков

Стратегии A	Стратегии П					
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\max\limits_j r_{ij}$
A_1	10	11	8	0	0	11
A_2	9	0	0	7	4	9
A_3	8	7	5	8	4	8
A_4	0	10	0	12	1	12

Лучшими стратегиями оказываются A_1 – для матрицы выигрышей и A_3 – для матрицы рисков.

Если бы результаты применения различных критериев совпадали, то мы имели бы основание для выбора стратегии. Однако есть основание сократить область выбора, опустив стратегии A_2 и A_4. Окончательное же решение зависит от склонности и готовности к риску лица, принимающего решения. Стратегия A_1 перспективна, хотя и несколько рискованна, стратегия A_3 представляется более осторожной. В подобной ситуации уместно поставить задачу сбора дополнительных статистических данных или проведения экспериментов для оценки вероятностей возможных состояний природы. Экономически такая работа будет оправдана, если затраты на ее проведение будут меньше ожидаемого выигрыша от уточнения стратегии.

Предположим, что вероятности состояний природы q_j, $j = \overline{1, n}$, известны и занесены в платежную матрицу (табл. 78) и матрицу рисков (табл. 79).

Таблица 78

Платежная матрица

Стратегии A	Стратегии П					
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\overline{a}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$
A_1	0	0	0	13	6	3,1
A_2	1	11	8	6	2	4,2
A_3	2	4	3	5	2	2,7
A_4	10	1	8	1	5	6,3
q_j	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3	–

Таблица 79

Матрица рисков

Стратегии A	Стратегии П					
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\overline{r_i} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j$
A_1	10	11	8	0	0	5,7
A_2	9	0	0	7	4	4,6
A_3	8	7	5	8	4	6,1
A_4	0	10	0	12	1	2,5
q_j	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3	–

В этом случае пользуются критерием Байеса для выбора стратегии, максимизирующей средний выигрыш $\max \overline{a_i}$ или минимизирующей средний проигрыш $\min \overline{r_i}$. Для принятых значений вероятности в обоих случаях предпочтительной оказывается стратегия A_4.

Если объективные оценки состояний природы отсутствуют, но нет оснований предпочесть одно состояние другому, то можно принять их равными, полагая $q_j = 1/n$. Такой подход называют *принципом недостаточного основания Лапласа*. Легко убедиться, что в этом случае лучшие результаты дает стратегия A_2.

Пример 16. Определение производственной программы предприятия в условиях риска и неопределенности с использованием матричных игр.

Фирма «Фармацевт» – производитель медикаментов и биомедицинских изделий в регионе. Известно, что пик спроса на некоторые лекарственные препараты приходится на летний период (препараты сердечно-сосудистой группы, анальгетики), на другие – на осенний и весенний периоды (антиинфекционные, противокашлевые).

Затраты на 1 усл. ед. продукции за сентябрь – октябрь составили: по первой группе (сердечно-сосудистые препараты и анальгетики) – 20 ден. ед.; по второй группе (антиинфекционные, противокашлевые препараты) – 15 ден. ед.

По данным наблюдений за несколько последних лет, службой маркетинга фирмы установлено, что она может реализовать в течение рассматриваемых двух месяцев в условиях теплой погоды 3050 усл. ед. продукции первой группы и 1100 усл. ед. продукции второй группы; в условиях холодной погоды – 1525 усл. ед. продукции первой группы и 3690 усл. ед. продукции второй группы.

В связи с возможными изменениями погоды ставится задача – определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую максимальный доход от реализации при цене продажи 40 ден. ед. за 1 усл. ед. продукции первой группы и 30 ден. ед. за 1 усл. ед. второй группы.

Решение. Фирма располагает двумя стратегиями:

• A_1 – в этом году будет теплая погода;

• A_2 – погода будет холодная.

Если фирма примет стратегию A_1 и в действительности будет теплая погода (стратегия природы $П_1$), то выпущенная продукция (3050 усл. ед. препаратов первой группы и 1100 усл. ед. препаратов второй группы) будет полностью реализована и доход составит:

$$3050 \cdot (40 - 20) + 1100 \cdot (30 - 15) = 77\ 500 \text{ ден. ед.}$$

В условиях прохладной погоды (стратегия природы $П_2$) препараты второй группы будут проданы полностью, а препараты первой группы – только в количестве 1525 усл. ед., и часть препаратов останется нереализованной. Доход составит:

$$1525 \cdot (40 - 20) + 1100 \cdot (30 - 15) - 20 \cdot (3050 - 1525) = 16\ 500 \text{ ден. ед.}$$

Если фирма примет стратегию A_2 и в действительности будет холодная погода, то доход составит:

$$1525 \cdot (40 - 20) + 3690 \cdot (30 - 15) = 85\ 850 \text{ ден. ед.}$$

При теплой погоде доход составит:

$$1525 \cdot (40 - 20) + 1100 \cdot (30 - 15) - (3690 - 1100) \cdot 15 = 8150 \text{ ден. ед.}$$

Рассматривая фирму и погоду в качестве двух игроков, получим платежную матрицу

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} П_1 & \quad П_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 77\ 500 & 16\ 500 \\ 8150 & 85\ 850 \end{bmatrix}, \end{array}$$

$\alpha = \max\{16\ 500;\ 8150\} = 16\ 500$ ден. ед.

$\beta = \min\{77\ 500;\ 85\ 850\} = 77\ 500$ ден. ед.

Цена игры лежит в диапазоне $16\ 500 \le v \le 77\ 500$.

Из платежной матрицы видно, что при любых условиях доход фирмы будет не меньше 16 500 ден. ед., но если погодные условия совпадут с выбранной стратегией, то доход фирмы может составить 77 500 ден. ед.

Найдем решение игры.

Обозначим вероятность применения фирмой стратегии A_1 через x_1, стратегии A_2 – через x_2, причем $x_1 = 1 - x_2$. Если решить игру графическим методом, получим: $x_{\text{опт}} = (0{,}56;\ 0{,}44)$, при этом цена игры $v = 46\ 986$ ден. ед.

Оптимальный план производства лекарственных препаратов составит:

$$0{,}56 \cdot (3050;\ 1100) + 0{,}44 \cdot (1525;\ 3690) = (2379;\ 2239{,}6).$$

Таким образом, фирме целесообразно производить в течение сентября и октября 2379 усл. ед. препаратов первой группы и 2239,6 усл. ед. препаратов второй группы, тогда при любой погоде она получит доход не менее 46 986 ден. ед.

В условиях неопределенности, если не представляется возможным использовать смешанную стратегию (договоры с другими организациями), для определения оптимальной стратегии фирмы используем критерии природы.

1. Критерий Вальда:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max\{16\ 500;\ 8150\} = 16\ 500 \text{ ден. ед.},$$

фирме целесообразно использовать стратегию A_1.

2. Критерий максимума:

$$\max_i \max_j a_{ij} = \max\{77\ 500;\ 85\ 850\} = 85\ 850 \text{ ден. ед.},$$

целесообразно использовать стратегию A_2.

3. Критерий Гурвица: для определенности примем $\lambda = 0{,}4$, тогда для стратегии A_1 фирмы

$$\lambda \min a_{ij} + (1-\lambda)\max a_{ij} = 0{,}4 \cdot 16\ 500 + (1-0{,}4) \cdot 77\ 500 =$$

$$= 53\ 100 \text{ ден. ед.},$$

для стратегии A_2

$$\lambda \min a_{ij} + (1-\lambda)\max a_{ij} = 0{,}4 \cdot 8150 + (1-0{,}4) \cdot 85\ 850 =$$

$$= 54\ 770 \text{ ден. ед.};$$

$$\max\{53\ 100;\ 54\ 770\} = 54\ 770 \text{ ден. ед.},$$

фирме целесообразно использовать стратегию A_2.

4. Критерий Сэвиджа. Максимальный элемент в первом столбце – 77 500, во втором столбце – 85 850.

Элементы матрицы рисков находятся из выражения:

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij},\ i = \overline{1,\ 2};\ j = \overline{1,\ 2},$$

откуда r_{11} = 77 500 – 77500 = 0; r_{12} = 85 850 – 16 500 = 69 350; r_{21} = 77 500 – 8150 = 69 350; r_{22} = 85 850 – 85 850 = 0. Матрица рисков имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 69\ 350 \\ 69\ 350 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\min_i \max_j r_{ij} = \min\{69\ 350;\ 69\ 350\} = 69\ 350 \text{ ден. ед.},$$

целесообразно использовать стратегию A_1 или A_2.

Таким образом, в результате решения статистической игры по различным критериям чаще других рекомендовалась стратегия A_2, а значит, фирме целесообразно применять именно эту стратегию.

Отметим, что каждый из рассмотренных критериев не может быть признан вполне удовлетворительным для окончательного выбора решений, однако их совместный анализ позволяет более наглядно представить последствия принятия тех или иных управленческих решений.

При известном распределении вероятностей различных состояний природы критерием принятия решения является максимум математического ожидания выигрыша.

Пусть для рассматриваемой задачи известно, что вероятности теплой и холодной погоды равны и составляют 0,5, тогда оптимальная стратегия фирмы определяется так:

$$\max\{(0{,}5\cdot 77\ 500 + 0{,}5\cdot 16\ 500);\ (0{,}5\cdot 8150 + 0{,}5\cdot 85\ 850)\} =$$

$$\max\{47\ 000;\ 47\ 000\} = 47\ 000 \text{ ден. ед.}$$

Фирме целесообразно использовать стратегию A_1 или A_2.

Пример 17. После k лет эксплуатации промышленное оборудование может оказаться в одном из следующих состояний: 1) требуется незначительный ремонт; 2) необходимо заменить отдельные детали и узлы; 3) дальнейшая эксплуатация возможна лишь после капитального ремонта. Накопленный на предприятии опыт свидетельствует, что вероятности указанных состояний оборудования составляют соответственно 0,3, 0,6 и 0,1. В зависимости от сложившейся ситуации руководство предприятия может принять такие решения: 1) произвести ремонт своими силами, что потребует затрат, равных 2, 6 или 10 ден. ед, в зависимости от состояния оборудования (в затраты включены стоимость ремонта и заменяемых деталей и узлов, убытки, связанные с ухудшением качества выпускаемой продукции, простоем неисправного оборудования и др.); 2) произвести ремонт с помощью специалистов-ремонтников, что вызовет затраты, равные 10, 4 или 8 ден. ед.; 3) заменить оборудование новым, на что будет израсходовано соответственно 14, 12 или 6 ден. ед. Используя игровой подход, высказать рекомендации по оптимальному образу действий руководства предприятия.

Решение. В рассматриваемой ситуации в качестве игрока A выступает руководство предприятия, обладающее тремя стратегиями: A_1 – произвести ремонт своими силами; A_2 – ремонт будут выполнять приглашенные специалисты; A_3 – заменить оборудование. Вторым игроком здесь следует считать природу П – комплекс внешних условий, в которых функционировало оборудование на протяжении k лет и которые определили три возможных состояния $П_1$, $П_2$ и $П_3$, указанные в условии задачи. «Выигрышами» игрока A будут затраты, связанные с реализацией решений (чистых стратегий) A_1, A_2 и A_3 и составляющие платежную матрицу (табл. 80).

Таблица 80

Платежная матрица

Стратегии A	Стратегии П				
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$\min_j a_{ij}$	$\overline{a}_i$
A_1	–2	–6	–10	–10	–5,2
A_2	–10	–4	–8	–10	–6,2
A_3	–14	–12	–6	–14	–12
q_j	0,3	0,6	0,1	–	–
β_j	–2	–4	–6	–	–

Так как $\alpha = -10$; $\beta = -6$, игра не имеет седловой точки и у игрока A нет доминируемых стратегий. Поскольку известны вероятности q_j состояний природы П, то пользуемся критерием Байеса.

Находим средние «выигрыши» $\overline{a}_i$ игрока A при каждой его чистой стратегии:

$$\overline{a}_1 = -2 \cdot 0,3 + (-6) \cdot 0,6 + (-10) \cdot 0,1 = -5,2;$$

$$\overline{a}_2 = -6,2;$$

$$\overline{a}_3 = -12.$$

Оптимальной по Байесу будет чистая стратегия A_1, т. к. именно при ней средний «выигрыш» достигает максимального значения:

$$\max_i \overline{a}_i = \max\{-5,2;\ -6,2;\ -12\} = -5,2 = \overline{a}_1.$$

Таким образом, руководству предприятия следует произвести ремонт своими силами, т. к. средние затраты при этом будут минимальными (5,2 ден. ед.).

Модели управления запасами

Пример 18. Интенсивность равномерного спроса составляет 2000 телевизоров в год. Организационные издержки для одной партии составляют 20 тыс. ден. ед. Цена единицы товара равна 1 тыс. ден. ед., а издержки содержания телевизоров составляют 0,1 тыс. ден. ед. за один телевизор в год. Найти оптимальный размер партии, число поставок и продолжительность цикла.

Решение. По условию задачи $\nu = 2000$; $k = 20$; $s = 1$; $h = 0,1$.

Общие издержки в течение года:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = \frac{k\nu}{q} + s\nu + \frac{qh}{2} = \frac{40\ 000}{q} + 2000 + \frac{q}{20};$$

$$\frac{dL}{dq} = -\frac{40\ 000}{q^2} + \frac{1}{20} = 0;$$

$$q_{\text{опт}} = \sqrt{800\ 000} \approx 894 \text{ ед.};$$

$$n_{\text{опт}} = \frac{2000}{q_{\text{опт}}} \approx 2,24;$$

$$t_{\text{опт}} = \frac{365}{n_{\text{опт}}} \approx 163 \text{ дня.}$$

Оптимальный размер партии составляет 894 телевизора, число поставок – 2,24, продолжительность цикла – 163 дня.

Пример 19. Интенсивность равномерного спроса выпускаемых фирмой видеомагнитофонов составляет 2000 шт. в год. Организационные издержки равны 20 тыс. ден. ед. Цена видеомагнитофона составляет 1 тыс. ден. ед., издержки хранения равны 0,1 тыс. ден. ед. в год в расчете на один видеомагнитофон. Запасы на складе пополняются со скоростью 4000 видеомагнитофонов в год. Производственная линия начинает действовать, как только уровень запасов на складе становится равным нулю, и продолжает работу до тех пор, пока не будет произведено q видеомагнитофонов.

Найти размер партии, который минимизирует все затраты. Определить число поставок в течение года, время, в течение которого продолжается поставка, продолжительность цикла, максимальный уровень запасов и средний уровень запасов при условии, что размер поставки оптимален.

Решение. Данная модель задачи является моделью производственных поставок со следующими параметрами: $\nu = 2000$; $k = 20$; $h = 0{,}1$; $s = 1$; $\lambda = 4000$.

График изменения запасов представлен на рис. 32.

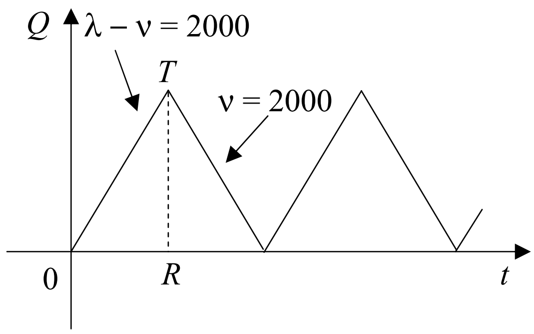


Рис. 32. График изменения запасов

Число партий в течение года: $n = \dfrac{\nu}{q} = \dfrac{2000}{q}$.

Продолжительность поставки: $t = \dfrac{q}{\lambda} = \dfrac{q}{4000}$.

Продолжительность цикла: $\tau = \dfrac{1}{n} = \dfrac{q}{\nu} = \dfrac{q}{2000}$.

Максимальный уровень запасов: $RT = (\lambda - \nu)t = 2000 \cdot \dfrac{q}{4000} = \dfrac{q}{2}$.

Средний уровень запасов: $\dfrac{RT}{2} = \dfrac{q}{4}$.

Уравнение издержек:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = kn + s\nu + \frac{qh}{2}.$$

Решив уравнение $\frac{dL}{dq} = 0,$ получим:

$$q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4000 \cdot 20 \cdot 2000}{2000 \cdot 0{,}1}} = 1265 \text{ видеомагнитофонов.}$$

Найдем оптимальные значения поставок, продолжительность поставки, продолжительность цикла:

$$n_{\text{опт}} = \frac{2000}{1265} \approx 1{,}6 \text{ поставки;}$$

$$t_{\text{опт}} = \frac{1265}{4000} \approx 115 \text{ дн.;}$$

$$\tau_{\text{опт}} = \frac{365}{1{,}6} \approx 230 \text{ дн.}$$

За каждую поставку необходимо доставлять на склад 1265 видеомагнитофонов, оптимальное число поставок составляет 1,6, продолжительность поставки − 115 дней, продолжительность цикла − 230 дней.

Сетевое планирование и управление

Пример 20. Для организации производства и сбыта новой продукции необходимо выполнить комплекс работ (табл. 81). С этой целью создана группа из R = 10 специалистов.

Таблица 81

Комплекс работ

Работа	Описание работы	Непосредственно предшествующие работы	Продолжительность, дн.	Число исполнителей
1	2	3	4	5
А	Разработка технических условий	–	4	6
Б	Эскизное проектирование	–	1	4
В	Техническое проектирование	Б	2	7
Г	Закупка необходимых комплектующих	А	3	5
Д	Изготовление деталей	А, В	5	6

Окончание табл. 81

1	2	3	4	5
Е	Согласование сроков поставки, заключение договоров	В	10	3
Ж	Сборка изделий	Г, Д	4	8
З	Отправка продукции потребителям	Е, Ж	2	6

1. Составить сетевой график выполнения проекта.

2. Найти ранние и поздние сроки свершения событий и их резервы времени. Определить критический путь.

3. Определить ранние и поздние сроки начала и окончания работ. Найти резервы времени работ (четыре типа).

4. Построить график Ганта и график интенсивности использования ресурса.

Решение. Составим сетевой график комплекса работ. Исходное событие (1) означает момент начала выполнения проекта. Работам А и Б не предшествуют никакие работы, следовательно, на графике они изображены дугами, выходящими из исходного события. Работе В предшествует работа Б, поэтому на графике дуга В непосредственно следует за дугой Б. Событие (2) означает момент окончания работы А и начала работ, которым она предшествует. Работе Д предшествуют работы А и В. На графике эта зависимость отражена с помощью введения фиктивной работы (2; 4). Аналогично с учетом взаимосвязей изображаются на графике (рис. 33) все оставшиеся работы. Завершающее событие (7) означает момент выполнения всего проекта.

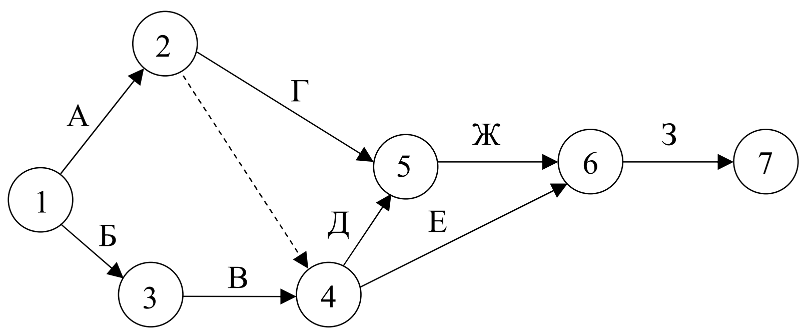


Рис. 33. Сетевой график

Номера, присвоенные событиям (рис. 33), соответствуют правилам ранжирования. Работу, соединяющую соседние события с номерами i и j, теперь будем обозначать $(i; j)$. В новых обозначениях работа В примет вид (3; 4), ее продолжительность $t_{34} = 4$.

Найдем ранний срок свершения каждого события:

$$t_р(1)=0;\ t_р(2)=t_р(1)+t_{12}=0+4=4;\ t_р(3)=t_р(1)+t_{13}=0+1=1;$$

$$t_р(4)=\max\left\{t_р(2)+t_{24};\ t_р(3)+t_{34}\right\}=\max\left\{4+0;\ 1+2\right\}=4;$$

$$t_р(5)=\max\left\{t_р(2)+t_{25};\ t_р(4)+t_{45}\right\}=\max\left\{4+3;\ 4+5\right\}=9;$$

$$t_р(6)=\max\left\{t_р(4)+t_{46};\ t_р(5)+t_{56}\right\}=\max\left\{4+10;\ 9+4\right\}=14;$$

$$t_р(7)=t_р(6)+t_{67}=14+2=16.$$

Итак, завершающее событие (7) может свершиться лишь на шестнадцатый день от начала разработки. Это минимальное время, за которое могут быть выполнены все работы проекта, оно определяется самым длинным полным путем. Ранний срок свершения события (7) совпадает с критическим временем: $t_р(7)=t_{кр}$.

Найдем поздний срок свершения каждого события:

$$t_п(7)=t_{кр}=16;\ t_п(6)=t_п(7)-t_{67}=16-2=14;$$

$$t_п(5)=t_п(6)-t_{56}=14-4=10;$$

$$t_п(4)=\min\left\{t_п(5)-t_{45};\ t_п(6)-t_{46}\right\}=\min\left\{10-5;\ 14-10\right\}=4;$$

$$t_п(3)=t_п(4)-t_{34}=4-2=2;$$

$$t_п(2)=\min\left\{t_п(4)-t_{24};\ t_п(5)-t_{25}\right\}=\min\left\{4-0;\ 10-3\right\}=4;\ t_п(1)=0.$$

Расчеты для данного примера приведены на рис. 34.

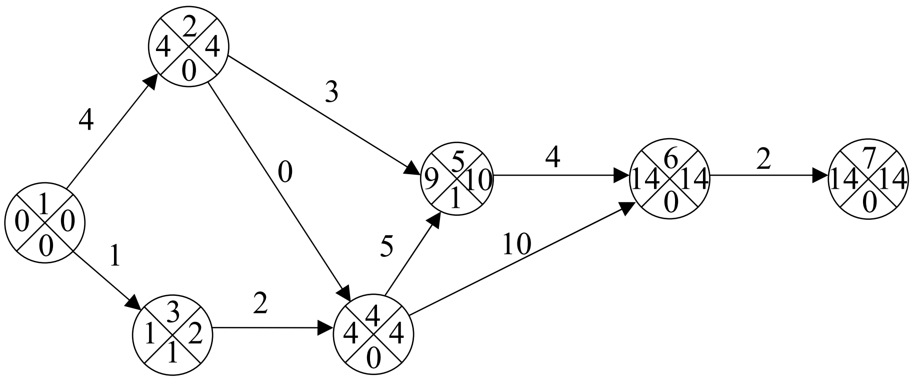


Рис. 34. Сетевой график

Вычисляем временные параметры работ примера и заносим результаты в табл. 82.

Таблица 82

Временные параметры работ

$(i; j)$	t_{ij}	$t'_р$	$t''_р$	$t''_п$	$t'_п$	$R_{полн}$	$R_{нез}$	R'	R''
(1; 2)	4	0	4	4	0	0	0	0	0
(1; 3)	1	0	1	2	1	1	0	1	0
(2; 4)	0	4	4	4	4	0	0	0	0
(2; 5)	3	4	7	10	7	3	2	3	2
(3; 4)	2	1	3	4	2	1	0	0	1
(4; 5)	5	4	9	10	5	1	0	1	0
(4; 6)	10	4	14	14	4	0	0	0	0
(5; 6)	4	9	13	14	10	1	0	0	1
(6; 7)	2	14	16	16	14	0	0	0	0

Получим критический путь из событий с нулевыми резервами:

$$L_{кр} = \{1-2-4-6-7\}.$$

Построим график Ганта (рис 35).

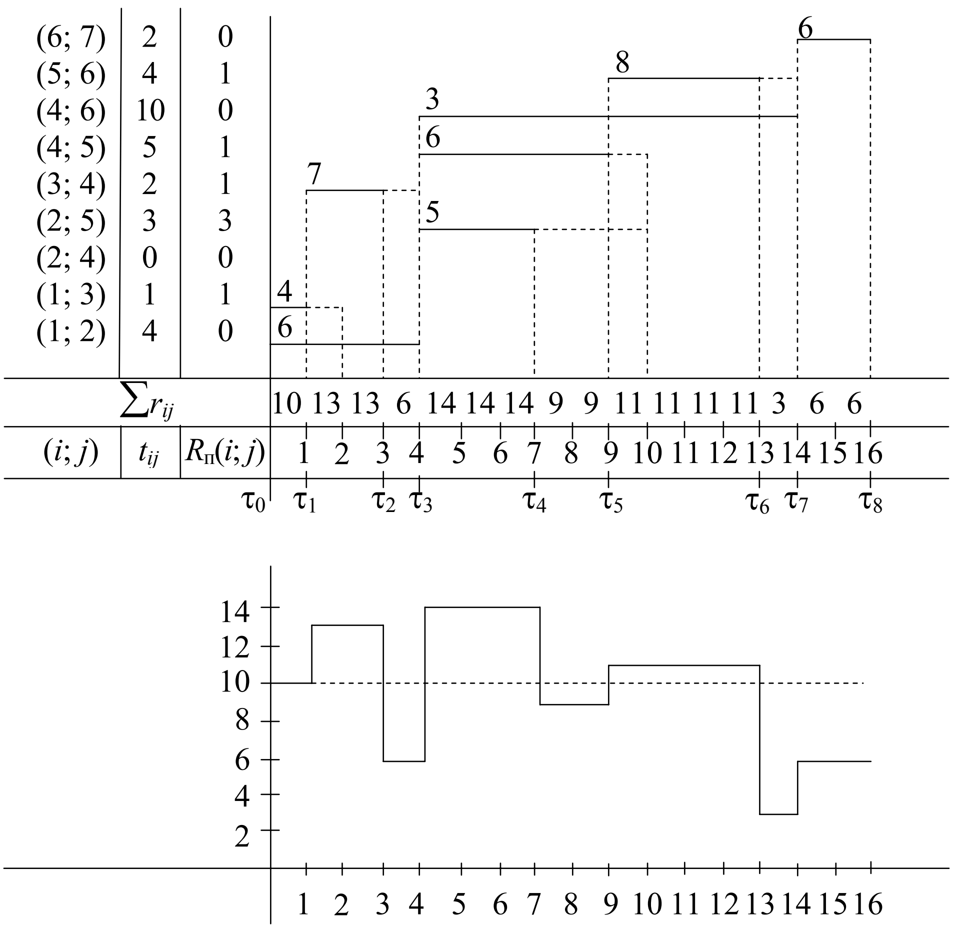


Рис. 35. График Ганта

Из рис. 35 видно, что на промежутках (τ_1; τ_2), (τ_3; τ_4), (τ_5; τ_6) имеющихся ресурсов в количестве R = 10 чел. недостаточно для удовлетворения потребности в них. Поэтому график подлежит корректировке с целью приведения сроков выполнения работ в соответствие с имеющимися трудовыми ресурсами.

5.3. МИНИМУМ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

Занятие 4: 3А28; 3А29; 3А30.
Занятие 5: 3А36; 3А37; 3А38.
Занятие 6: 3А45; 3А46; 3А47.
Занятие 7: 3А56; 3А57; 3А58.
Занятие 8: 3А71; 3А72; 3А73.

6. ПРИЛОЖЕНИЯ

6.1. ТРЕНИРОВОЧНАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1А. По условным данным – матрице коэффициентов прямых затрат A и вектору $Y_{\text{пл}}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 \end{bmatrix}; \quad Y_{\text{пл}} = \begin{bmatrix} 99 \\ 66 \end{bmatrix}$$

определить валовую продукцию первой отрасли и количество продукции, которое вторая отрасль будет поставлять первой отрасли в плановом периоде.

2А. По заданному сетевому графику (рис. 36) найти: 1) критическое время; 2) полный резерв времени работы (2; 6) и работы (3; 4).

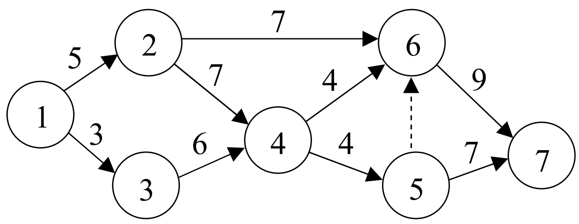


Рис. 36. Сетевой график

3А+Б. Построить размеченный граф состояний устройства, записать систему уравнений Колмогорова, найти финальные вероятности и сделать анализ полученных решений. Устройство может находиться в одном из трех состояний: S_0, S_1, S_2. Интенсивности потоков, переводящих устройство из состояния в состояние, приведены в табл. 83.

Таблица 83

Интенсивности потоков

Интенсивность	λ_{01}	λ_{10}	λ_{02}	λ_{20}	λ_{12}	λ_{21}
Значение	0	3	2	1	5	1

4Б. Мастерская по ремонту обуви рассчитана на выполнение не более 10 тыс. заявок в год. Будем считать, что поток заявок выражается цифрами 4, 6, 8 и 10 тыс. в год. Накопленный опыт аналогичных предприятий показывает, что прибыль от ремонта пары обуви составляет 10 ден. ед., а потери, вызванные отказом в ремонте из-за недостатка мощностей, оцениваются в 5 ден. ед., убытки от простоя специалистов и оборудования при отсутствии заявок составляют 4 ден. ед. в расчете на каждую пару. Используя различные критерии (параметр критерия Гурвица $\lambda = 0{,}7$), составить платежную матрицу и выяснить, какое решение о работе мастерской целесообразно принять, чтобы минимизировать потери.

Вариант 2

1А. В справочное бюро аэропорта поступает в среднем 8 запросов за 1 мин. Заявки принимают 2 телефонистки. Средняя длительность разговора 0,5 мин. Изобразить граф состояний системы. Установить все характеристики СМО.

2А. За бригадой закреплено 210 га пашни. Трудовые ресурсы составляют 2500 чел.-дней, запас минеральных удобрений – 600 ц. С 1 га посевов планируется получить 40 ц зерновых и 120 ц овощей. Для обеспечения такой урожайности на 1 га зерновых культур необходимо внести 2 ц минеральных удобрений, на 1 га овощных культур – 5 ц, а также затратить на 1 га посевов зерновых 7 чел.-дней, на 1 га посевов овощей – 20 чел.-дней. Цены на зерновые и овощные культуры составляют 45 и 20 ден. ед. за 1 ц. Составить математическую модель задачи; найти такое сочетание посевных площадей зерновых и овощных культур, которое обеспечило бы максимум денежных поступлений от реализации произведенной продукции.

3А+Б. Для развития трех отраслей в плановом году необходимо произвести 100 ед. валовой продукции II отрасли, а для I и III отраслей выпустить в сферу конечного потребления соответственно 44 и 10 ед. конечной продукции. Матрица коэффициентов прямых затрат известна: $A = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{bmatrix}$.

Найти, чему равен валовой выпуск I отрасли и конечная продукция II отрасли.

4Б. Построить сетевой график, если он включает семь работ и при этом работы a_3 и a_4 выполняются после работы a_1, работа a_5 – после работ a_2 и a_3, работа a_6 может быть выполнена после работ a_2 и a_3, работа a_7 – после работ a_4 и a_5. Известны также продолжительности работ: a_1 – 4 дн.; a_2 – 6 дн.; a_3 – 2 дн.; a_4 – 6 дн.; a_5 – 3 дн.; a_6 – 3 дн.; a_7 – 5 дн. Найти критическое время выполнения всего проекта, построить линейный график выполнения работ проекта.

6.2. ВАРИАНТЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

Вариант 1

Вопрос	Варианты ответов
1. В модели межотраслевого баланса X_i обозначает:	а) общий объем продукции отрасли i за данный промежуток времени – валовой выпуск отрасли i; б) объем продукции отрасли i, расходуемый отраслью в процессе производства; в) объем продукции отрасли i, предназначенный к потреблению в непроизводственной сфере, – объем конечного потребления; г) вектор валового выпуска; д) ни один из приведенных ответов не верен.
2. Нижняя чистая цена матричной игры определяется формулой:	а) $\min\limits_i a_{ij}$; б) $\max\limits_i a_{ij}$; в) $\min\limits_i \min\limits_j a_{ij}$; г) $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$.
3. Наиболее раннее время наступления события равно:	а) минимальной длине пути из данного узла в конечный; б) максимальной длине пути из данного узла в конечный; в) максимальной длине пути из начального узла в данный; г) максимальному времени наиболее раннего окончания работ, входящих в данный узел; д) минимальному времени наиболее позднего начала работ, выходящих из данного узла.
4. В модели задачи линейного программирования (оптимального распределения ресурсов) компоненты вектора $C = (c_1, ..., c_n)$ обозначают:	а) объем i-й продукции; б) расход i-го ресурса на единицу j-й продукции; в) стоимость произведенной продукции; г) ни один из приведенных ответов не верен.

5. Одна работница обслуживает 30 ткацких станков, обеспечивая их запуск после разрыва нити. Модель такой системы массового обслуживания можно охарактеризовать как:	а) многоканальную с ограниченной очередью; б) одноканальную с неограниченной очередью; в) одноканальную с ограниченной очередью; г) многоканальную с неограниченной очередью; д) систему с отказами.
6. В основной модели управления запасами оптимальный размер заказа:	а) прямо пропорционален величине спроса на продукт за период, обратно пропорционален удельным издержкам хранения за период и стоимости заказа; б) прямо пропорционален величине спроса на продукт за период и стоимости заказа, обратно пропорционален удельным издержкам хранения за период; в) прямо пропорционален величине спроса на продукт за период и удельным издержкам хранения за период, обратно пропорционален стоимости заказа; г) прямо пропорционален стоимости заказа и удельным издержкам хранения за период, обратно пропорционален величине спроса на продукт за период; д) прямо пропорционален удельным издержкам хранения за период, обратно пропорционален величине спроса на продукт за период и стоимости заказа.

Вариант 2

Вопрос	Варианты ответов
1. В модели межотраслевого баланса X_i обозначает:	а) общий объем продукции отрасли i за данный промежуток времени – валовой выпуск отрасли i; б) объем продукции отрасли i, расходуемый отраслью в процессе производства; в) объем продукции отрасли i, предназначенный к потреблению в непроизводственной сфере, – объем конечного потребления;

	г) объем продукции отрасли i, расходуемый отраслью j в процессе производства.
2. Указать, какой из следующих векторов является некоторой смешанной стратегией матричной игры:	а) p = (0; 3/2; 0; –1/2; 0); б) p = (1/3; 1/3; 0; 1/3; 0); в) p = (0; 1; 0; 0); г) p = (1/4; 3/4; 0; 0).
3. Для того чтобы сократить время выполнения проекта, необходимо:	а) сократить время выполнения каждой работы на критическом пути; б) сократить время выполнения одной работы на критическом пути; в) сократить время выполнения каждой работы проекта; г) сократить время выполнения одной работы проекта; д) увеличить длину критического пути.
4. В модели задачи линейного программирования (оптимального распределения ресурсов) компоненты вектора – решения задачи обозначают:	а) стоимость произведенной продукции; б) расход i-го ресурса на единицу j-й продукции; в) объем i-й продукции; г) ни один из приведенных ответов не верен.
5. Ремонт вышедших из строя компьютеров осуществляют 3 специалиста, работающих одновременно и независимо друг от друга. Модель такой системы массового обслуживания можно охарактеризовать как:	а) многоканальную с ограниченной очередью; б) одноканальную с неограниченной очередью; в) одноканальную с ограниченной очередью; г) многоканальную с неограниченной очередью.
6. Оптимальный размер заказа в идеальной модели управления запасами вычисляется по формуле:	а) Эрланга; б) Уилсона; в) Колмогорова; г) Маркова.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Дегтярев, Ю. И. Исследование операций: учебник для вузов по специальности АСУ / Ю. И. Дегтярев. – М.: Высшая школа, 1986. – 320 с.

2. Кузнецов, А. В. Высшая математика. Математическое программирование: учебник для вузов / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Минск: Вышэйшая школа, 1994. – 351 с.

3. Кузнецов, А. В. Руководство к решению задач по математическому программированию: учеб. пособие / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: Вышэйшая школа, 2001. – 448 с.

4. Курицкий, Б. Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0 / Б. Я. Курицкий. – СПб.: BHV-Санкт-Петербург, 1997. – 384 с.

5. Марченко, В. М. Методы оптимизации и статистической обработки результатов измерений: учеб. пособие для студентов физ.-хим. и инж.-техн. специальностей / В. М. Марченко, Т. Б. Копейкина. – Минск: БГТУ, 2007. – 140 с.

6. Экономико-математические методы и модели. Компьютерные технологии решения: учеб. пособие / И. Л. Акулич [и др.]. – Минск: БГЭУ, 2003. – 348 с.

7. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие / Н. И. Холод [и др.]; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд. – Минск: БГЭУ, 2000. – 412 с.

Дополнительная

8. Альсевич, В. В. Математическая экономика. Конструктивная теория: учеб. пособие для студентов экон. специальностей вузов / В. В. Альсевич. – Минск: ДизайнПРО, 1998. – 240 с.

9. Вентцель, Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология: учеб. пособие / Е. С. Вентцель. – М.: Дрофа, 2004. – 208 с.

10. Герасимович, А. И. Математическая статистика: учеб. пособие для инж.-техн. и экон. специальностей вузов / А. И. Герасимович. – Минск: Вышэйшая школа, 1983. – 279 с.

11. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 12-е изд., перераб. – М.: Высшее образование, 2006. – 479 с.

12. Гурский, Е. И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для техн. и экон. вузов / Е. И. Гурский. – 3-е изд., перераб. – Минск: Вышэйшая школа, 1984. – 223 с.

13. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / Н. Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 543 с.

14. Маталыцкий, М. А. Теория массового обслуживания и ее применение: учеб. пособие / М. А. Маталыцкий, О. М. Тихоненко, А. В. Паньков. – Гродно: ГрГУ, 2008. – 771 с.

15. Мацкевич, И. П. Высшая математика: теория вероятностей и математическая статистика / И. П. Мацкевич, Г. П. Свирид. – Минск: Вышэйшая школа, 1993. – 272 с.

16. Минюк, С. А. Математические методы и модели в экономике: учеб. пособие / С. А. Минюк, Е. А. Ровба, К. К. Кузьмич. – Минск: ТетраСистемс, 2002. – 432 с.

17. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике / Д. Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 256 с.

18. Пыжкова, О. Н. Линейное программирование: учеб.-метод. пособие для студентов специальностей 1-36 05 01 «Машины и оборудование лесного комплекса», 1-46 01 01 «Лесоинженерное дело», 1-46 01 02 «Технология деревообрабатывающих производств», 1-75 01 01 «Лесное хозяйство», 1-75 02 01 «Садово-парковое строительство» / О. Н. Пыжкова, Л. Д. Яроцкая. – Минск: БГТУ, 2007. – 70 с.

19. Рыжиков, Ю. И. Управление запасами / Ю. И. Рыжиков. – М.: Наука, 1969. – 344 с.

20. Харин, Ю. С. Основы имитационного и статистического моделирования: учеб. пособие / Ю. С. Харин [и др.]; под общ. ред. Ю. С. Харина – Минск: ДизайнПРО, 1997. – 287 с.

21. Шинкевич, Е. А. Экономико-математические методы и модели: практикум для студентов специальностей 1-25 01 07 «Экономика и управление на предприятии», 1-25 01 08 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», 1-26 02 02 «Маркетинг», 1-26 02 03 «Менеджмент» / Е. А. Шинкевич, В. И. Янович. – Минск БГТУ, 2003. – 78 с.

22. Экономико-математические методы и модели: учеб.-метод. пособие по выполнению расчетных заданий с использованием табличного процессора Excel для студентов экономических специальностей / авт.-сост. Е. А. Шинкевич. – Минск: БГТУ, 2005. – 72 с.

23. Янович, В. И. Экономико-математические методы и модели: лабораторный практикум для студентов специальностей 1-25 01 07 «Экономика и управление», 1-25 01 08 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», 1-26 02 02 «Маркетинг», 1-26 02 03 «Менеджмент» / В. И. Янович, Н. В. Балашевич. – Минск: БГТУ, 2002. – 66 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3
1. Учебная программа 4
1.1. Тематический план курса 4
1.2. Содержание дисциплины 6
2. Конспект лекций 8
2.1. Модели оптимального планирования 8
2.1.1. Задачи и этапы экономико-математического моделирования 8
2.1.2. Модели оптимального планирования в промышленности и АПК 9
2.1.3. Модели финансов и кредита. Модели в коммерческой деятельности 11
2.2. Модели межотраслевого баланса 14
2.2.1. Основные понятия 14
2.2.2. Стоимостной межотраслевой баланс 17
2.2.3. Экономико-математическая модель МОБ 22
2.2.4. Динамические модели МОБ 27
2.3. Методы и модели массового обслуживания 28
2.3.1. Основные понятия 28
2.3.2. Аналитический расчет характеристик СМО. Уравнения Колмогорова 32
2.3.3. СМО с отказами 34
2.3.4. СМО с неограниченным ожиданием 36
2.3.5. СМО с ожиданием и с ограниченной длиной очереди 37
2.4. Элементы теории игр 39
2.4.1. Основные понятия 39
2.4.2. Матричные игры с нулевой суммой 42
2.4.3. Решение матричных игр 2×2 48
2.4.4. Статистические игры 50
2.5. Модели управления запасами 54
2.5.1. Основные понятия 54
2.5.2. Основная модель управления запасами 56
2.5.3. Модель производственных запасов 57
2.5.4. Модель запасов, включающая штрафы 59
2.5.5. Точка заказа 61

2.6. Сетевое планирование и управление 62
2.6.1. Основные понятия 62
2.6.2. Временные параметры сетевого графика................. 66
2.6.3. Построение линейного графика (графика Ганта). Учет потребностей в ресурсах 69

3. Практикум 72
3.1. Занятие 4. Модели межотраслевого баланса 72
3.2. Занятие 5. Методы и модели массового обслуживания 75
3.3. Занятие 6. Элементы теории игр 77
3.4. Занятие 7. Модели управления запасами 83
3.5. Занятие 8. Сетевое планирование и управление................. 86

4. Лабораторный практикум.. 91
4.1. Лабораторная работа «Модели распределения ресурсов. Элементы теории двойственности» 91
4.2. Лабораторная работа «Экономико-математические методы и модели теории игр»...105
4.3. Лабораторная работа «Модели межотраслевого баланса» 114
4.4. Лабораторная работа «Элементы сетевого планирования и управления» 121

5. Теоретический и практический минимум 128
5.1. Теоретический минимум 128
5.2. Практический минимум 172
5.3. Минимум для аудиторной работы 203

6. Приложения 204
6.1. Тренировочная контрольная работа...................................204
6.2. Варианты тестовых заданий 206

Литература 209

Учебное издание

Марченко Владимир Матвеевич
Можей Наталья Павловна
Шинкевич Елена Алексеевна

ЭКОНОМЕТРИКА И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

В 2-х частях

Часть 2. Экономико-математические методы и модели

Учебное пособие

Редактор *О. А. Семенец*
Компьютерная верстка *О. А. Семенец*
Корректор *О. А. Семенец*

Подписано в печать 01.02.2012. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 12,4. Уч.-изд. л. 12,8.
Тираж 350 экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение:
«Белорусский государственный технологический университет».
ЛИ № 02330/0549423 от 08.04.2009.
ЛП № 02330/0150477 от 16.01.2009.
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.