

УДК 531+621.01:531.8

Г. И. Михасев, доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой биомеханики (БГУ);
А. Н. Шейко, магистрант (БГУ)

О ВЛИЯНИИ ПАРАМЕТРА УПРУГОЙ НЕЛОКАЛЬНОСТИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ УГЛЕРОДНОЙ НАНОТРУБКИ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

На основе теории тонких ортотропных цилиндрических оболочек, а также нелокального закона физического состояния Эрингена получена система дифференциальных уравнений, описывающая движение одностенной углеродной нанотрубки в упругой среде. В качестве примера рассмотрены осесимметричные формы свободных колебаний трубки, находящейся в кварце, стекле и ABS-пластике. Изучено влияние параметра упругой нелокальности, а также коэффициента постели упругой матрицы на собственные частоты трубки.

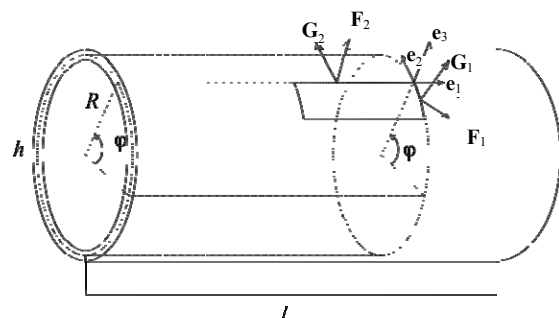
On the base of the theory of thin orthotropic cylindrical shells and the non-local constitutive equations of Eringen, the system of differential equations describing motion of a single-walled carbon nanotube in an elastic medium has been derived. As an example, axisymmetric forms of free vibrations of the tube lying in quartz, glass and ABS-plastic have been considered. The influence of the elastic nonlocality parameter and the coefficient of subgrade reaction of an elastic matrix as well on the natural frequencies has been studied.

Введение. В работах [1, 2] показано, что одностенная углеродная нанотрубка (УНТ), независимо от ее хиральности, может рассматриваться как ортотропная оболочка, чьи свойства зависят от строения решетки [2]. При этом погрешность данной модели составляет величину порядка $O[(a/R^2)]$, где $a \approx 0,14$ нм – характерный внутренний размер решетки, а R – радиус трубки. Следуя работам [1, 2], в статье [3] предложена модель многостенной УНТ, основанная на теории ортотропных оболочек и нелокальном законе физического состояния Эрингена [4], выведены уравнения движения с учетом сил ван-дер-ваальсового взаимодействия стенок трубки. Впоследствии было показано [5], что погрешность данных уравнений есть величина порядка $\sim \max\{h/R, (e_0 a/R)^2\}$, где h – эффективная толщина трубки, а e_0 – параметр упругой нелокальности Эрингена [4].

Целью настоящей статьи является исследование свободных колебаний одностенной УНТ в упругой среде с учетом эффекта упругой нелокальности, а также упругих свойств окружающей матрицы.

Уравнения движения. Следуя работам [3, 4], одностенную УНТ будем моделировать ортотропной цилиндрической оболочкой. Обозначим через $L = Rl$, R и h длину, эффективный радиус и толщину УНТ соответственно. Введем местную криволинейную ортогональную систему координат $\alpha = Rx$, $\beta = R\varphi$ с ортами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$, где x – безразмерная осевая координата, а φ – угол (рисунок). Выделим на срединной поверхности элемент, ограниченный координатными линиями $x, x + dx$ и $\varphi, \varphi + d\varphi$. Через \mathbf{F}_1 и \mathbf{G}_1 (\mathbf{F}_2 и \mathbf{G}_2) обо-

значим отнесенные к единице длины усилия и моменты внутренних микроскопических напряжений, которые действуют на боковые стенки данного элемента вдоль координатных линий $x = \text{const}$ ($\varphi = \text{const}$), а через $\mathbf{q}_t, \mathbf{q}_s$ – плотности сил инерции и поверхностных сил, отнесенные к единице площади срединной поверхности.



Криволинейная система координат на поверхности нанотрубки. Усилия и моменты

Пусть $E_i, \nu_i, G, i = 1, 2$ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и модуль сдвига ортотропной оболочки в направлениях x и φ , где $E_2 \nu_1 = E_1 \nu_2$.

Силы, действующие на боковые поверхности УНТ, представимы в виде [6]

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= T_1 \mathbf{e}_1 + S_1 \mathbf{e}_2 + Q_1 \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{G}_1 &= H_1 \mathbf{e}_1 - M_1 \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{F}_2 &= T_2 \mathbf{e}_1 + S_2 \mathbf{e}_2 + Q_2 \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mathbf{q}_t = -\rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{i=1}^3 (u_i \mathbf{e}_i),$$

$$\mathbf{q}_s = \sum_{i=1}^3 (q_i \mathbf{e}_i),$$

где ρ – удельная масса трубки.

Уравнения движения цилиндрической оболочки в усилиях имеют следующий вид [6]:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_2}{\partial \beta} - \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \\
& \quad + q_1 + c_1 u_1 = 0, \\
& \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + \frac{\partial S_1}{\partial \alpha} - \frac{Q_2}{R} - \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \\
& \quad + q_2 + c_2 u_2 = 0, \\
& \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q_2}{\partial \beta} + \frac{T_2}{R} - \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \\
& \quad + q_3 + c_3 u_3 = 0, \\
& \frac{\partial H_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_2}{\partial \beta} + Q_2 = 0, \\
& \frac{\partial H_2}{\partial \beta} + \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} + Q_1 = 0, \\
& S_1 - S_2 - R^{-1} H_2 = 0,
\end{aligned} \quad (2)$$

где u_1, u_2 и u_3 – тангенциальные и нормальное перемещения точек срединной поверхности соответственно; t – время; c_i – коэффициенты постели винклеровского основания упругой среды, в которой лежит УНТ.

Введем в рассмотрение макроскопические мембранные усилия $T_i^{(m)}, S_i^{(m)}$ и моменты $H_i^{(m)}, M_i^{(m)}$, аналогичные тем, что фигурируют в (2). Исходя из нелокальной континуальной теории Эрингена [4], макроскопические и микроскопические напряжения связаны соотношением [7]

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(T_i, S_i, H_i, M_i) = \\
= (T_i^{(m)}, S_i^{(m)}, H_i^{(m)}, M_i^{(m)}), \quad (3)
\end{aligned}$$

где \mathbf{E} – дифференциальный оператор, действующий по следующей формуле:

$$\mathbf{E} = 1 - (e_0 a)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right). \quad (4)$$

Здесь e_0 – параметр упругой нелокальности. В теории Эрингена $e_0 = 0,39$, однако Л. Судак показал [8], что данный параметр должен быть на один или два порядка больше. Попутно отметим, что вопрос об его определении до сих пор остается открытым. Действуя оператором (4) на систему (2), а также подставляя соотношения, связывающие макроскопические усилия и моменты с перемещениями [6], получаем разрешающую систему из трех дифференциальных уравнений движения УНТ относительно u_1, u_2 и u_3 :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^3 (\mu^4 \mathbf{M}_{ij} u_j + \mathbf{L}_{ij} u_j) - (1 - \varepsilon^2 \Delta) \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \\
& \quad + (1 - \varepsilon^2 \Delta) [c_i u_i + q_i] = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5)
\end{aligned}$$

где $\mathbf{M}_{n,ij}, \mathbf{L}_{n,ij}$ – матричные дифференциальные операторы размерности 3×3 (см. уравнения (7) в [3]), $\mu^4 = \frac{h^2}{12 R^2}$, $\varepsilon = \frac{e_0 a}{R}$.

В качестве примера рассмотрим здесь трубку длиной L , которая шарнирно оперта по краям $x=0, l=L/R$. Подобные краевые условия не вполне соответствуют условиям упругого взаимодействия УНТ с окружающей матрицей. Однако данная задача может рассматриваться в качестве модельной для исследования зависимостей собственных частот от входящих в задачу параметров. Изучим осесимметричные колебания трубки. Тогда $\frac{\partial u_i}{\partial \varphi} = 0$, и решение

уравнений движения можно искать в виде

$$\begin{aligned}
u_1 &= B \cos(p_m x) e^{i\Omega t}, \\
u_2 &= 0, \\
u_3 &= A \sin(p_m x) e^{i\Omega t}, \\
p_m &= \pi m l^{-1}, \quad m = 1, 2, \dots
\end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим здесь модель упругого основания, в соответствии с которой коэффициент постели зависит от числа волн m на поверхности УНТ [6]:

$$\begin{aligned}
c_1 &= c_2 = 0, \\
c_3 &= \frac{2E_f (1 - \nu_f) m}{(1 + \nu_f)(3 - 4\nu_f)R}, \quad (7)
\end{aligned}$$

где E_f, ν_f – модуль Юнга и коэффициент постели упругой матрицы соответственно. Подстановка (6), (7) в (5) приводит к уравнению относительно искомой частоты Ω :

$$\Omega = \omega^* \sqrt{\hat{c}_3 + \frac{\hat{C}_{11} \hat{C}_{22} - \hat{C}_{12}^2 + \mu^4 P_m^4 \hat{C}_{11}^2}{(1 + \mu \delta_\varepsilon p_m^2) \hat{C}_{11}}}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
\omega^* &= \sqrt{\frac{E^*}{\rho R^2}}, \\
E^* &= \frac{2E_1 \nu_2}{\nu_1 + \nu_2}, \\
\hat{c}_3 &= \frac{R^2 c_3}{E^* h},
\end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_{ii} &= \frac{E_i}{E^* (1 - \nu_1 \nu_2)}, \\ \hat{C}_{12} &= \nu_2 \hat{C}_{11}, \\ \delta_\varepsilon &= \frac{e_0 a}{\mu R^2}. \end{aligned}$$

Были выполнены расчеты частоты собственных колебаний для длинной трубки ($L/(2R)=10$). Для простоты анализа, как частный случай, рассмотрим изотропную модель УНТ с параметрами [7]:

$$\begin{aligned} E &= 1,058 \cdot 10^{12} \text{ Н/м}^2, \\ \mu &= 0,2378, \\ \nu &= 0,27, \\ \rho &= 1,341 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ h &= 0,34 \cdot 10^{-9} \text{ м}, \\ R &= 1,735 \cdot 10^{-9} \text{ м}, \\ a &= 0,142 \cdot 10^{-9} \text{ м}, \\ L / (2R) &= 10. \end{aligned}$$

В табл. 1 приведены частоты как функции числа полуволн m при различных значениях параметра нелокальности $e_0 = e_0^3, 10e_0^3, 100e_0^3$, где $e_0^3 = 0,39$ – значение, предложенное Эрингеном [4]. Расчеты выполнены для случая, когда трубка лежит в кварце, для которого $E_f = 5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,07$. Как видно, увеличение параметра нелокальности приводит к снижению собственных частот колебаний

трубки. Данный эффект находится в полном соответствии с выводом Судак [8], согласно которому критическое осевое усилие, приводящее к бифуркации нанотрубки, моделируемой по нелокальной континуальной модели, оказывается значительно ниже, чем аналогичное значение усилия, найденное в рамках классической теории оболочек.

В табл. 2 представлены значения частот УНТ, находящейся в разных упругих средах, в зависимости от числа полуволн. Расчеты выполнены при $e_0^3 = 0,39$ и следующих значениях упругих характеристик матрицы:

1) стекло:

$$\begin{aligned} E_f &= 0,56 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, \\ \nu &= 0,23; \end{aligned}$$

2) кварц:

$$\begin{aligned} E_f &= 0,5 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, \\ \nu &= 0,07; \end{aligned}$$

3) ABS-пластик:

$$\begin{aligned} E_f &= 0,23 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ \nu &= 0,38. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, уменьшение модуля упругости среды, в которой находится трубка, приводит к снижению собственных частот. При этом данный эффект становится наиболее заметным для высших мод колебаний, характеризующихся образованием большого числа волн.

Таблица 1

Собственные частоты Ω ($\times 10^{13}$ Гц) одностенной УНТ в кварце в зависимости от числа полуволн и коэффициента нелокальности

Параметр нелокальности e_0	Число полуволн m				
	1	5	10	15	20
e_0^3	1,63833	1,71303	1,81068	1,94019	2,13718
$10e_0^3$	1,63003	1,54691	1,39052	1,34319	1,38804
$100e_0^3$	1,15657	0,64261	0,81213	0,9817	1,13011

Таблица 2

Собственные частоты Ω ($\times 10^{13}$ Гц) одностенной УНТ, лежащей в разных упругих средах, в зависимости от числа полуволн

Среда	Число полуволн m				
	1	5	10	15	20
Стекло	1,6311	1,55253	1,40299	1,3625	1,41292
Кварц	1,63003	1,54691	1,39052	1,34319	1,38804
ABS-пластик	1,61133	1,44563	1,15211	0,94598	0,84516

Заключение. В работе предложена модель одностенной углеродной нанотрубки в упругой матрице, основанная на нелокальном законе упругости Эрингена. Получена система дифференциальных уравнений в перемещениях, описывающая движение УНТ с учетом сил упругого основания. В отличие от классической модели Винклера, рассмотрена модель упругого основания, в соответствии с которой реакция отпора зависит от числа волн на поверхности УНТ. Исследование осесимметричных колебаний и выполненные численные расчеты показали, что учет параметра упругой нелокальности приводит к снижению собственных частот трубки. При этом обнаружено, что в менее жестких упругих средах это влияние становится более сильным.

Работа выполнена в рамках задания 2.2.02 ГПНИ «Функциональные и машиностроительные материалы и технологии, наноматериалы и нанотехнологии в современной технике».

Литература

1. Can a single-wall carbon nanotube be modeled as a thin shell / J. Peng [et al.] // *J. Mech. Phys. Solids*. – 2008. – Vol. 56. – P. 2213–2224.
2. Chang, T. A molecular based anisotropic shell model for single-walled carbon nanotubes / T. Chang // *J. Mech. Phys. Solids*. – 2010. – Vol. 58. – P. 1422–1433.
3. Михасев, Г. И. Уравнения движения многостенной углеродной нанотрубки, основанные на нелокальной теории ортотропных оболочек / Г. И. Михасев // *Докл. НАН Беларуси*. – 2011. – Т. 55, № 6. – С. 119–123.
4. Eringen, A. C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves / A. C. Eringen // *J. Appl. Phys.* – 1983. – Vol. 54. – P. 4703–4710.
5. Михасев, Г. И. Вывод уравнений движения многостенной углеродной нанотрубки с использованием нелокальной континуальной теории ортотропных цилиндрических оболочек / Г. И. Михасев, А. Н. Шейко // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2012. – Вып. 27. – С. 70.
6. Михасев, Г. И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках / Г. И. Михасев, П. Е. Товстик // *Асимптотические методы*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 292 с.
7. Usuki, T. Beam equations for multi-walled carbon nanotubes derived from Flugge shell theory / T. Usuki, K. Yogo // *Proc. R. Soc. A*. – 2009. – Vol. 465. – P. 1199–1226.
8. Sudak, L. J. Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal continuum mechanics / L. J. Sudak // *J. Appl. Phys.* – 2003. – Vol. 94 (11). – P. 7281–7287.

Поступила 06.03.2012