

УДК 539.3+612.311

**С. М. Босяков**, кандидат физико-математических наук, доцент (БГУ);  
**К. С. Юркевич**, ассистент (БГУ)

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ, РАЗВИВАЕМЫХ ОРТОДОНТИЧЕСКИМ АППАРАТОМ С ЧЕТЫРЬМЯ СТЕРЖНЯМИ И ВИНТОМ, С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ ПАРОДОНТА

В настоящей работе представлены результаты определения усилий, которые создает ортодонтический аппарат с четырьмя коронками и винтом, с учетом упругих свойств пародонта. Использовано уравнение поперечного изгиба стержня в предположении, что один из концов стержня получает перемещение, определяемое поворотом винта ортодонтического аппарата, а другой конец стержня упруго закреплен. Определены возникающие при этом сосредоточенные силы, действующие на зуб в вестибуло-оральном, медио-дистальном и вертикальном направлениях, а также моменты сил относительно этих направлений. Проведен анализ зависимостей сил от ориентации стержня аппарата по отношению к винту для случая, когда стержень аппарата располагается перпендикулярно пластинкам. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании ортодонтических аппаратов для расширения верхней челюсти.

The following research work is devoted to the definition of efforts, which appear under the action of orthodontic appliance with four crowns and screw; elastic characteristics of parodontium are taken into the account. The equation of cross bending rod is used. It is assumed that one of the ends of rod gets displacement. The displacement is determined by the rotation angle of screw of orthodontic appliance. Another end of screw is elastically strengthened. Concentrated force operates on tooth in vestibulo-oral, medio-distal and vertical directions are defined just as the moments of forces concerning these directions. The analysis of the dependences of forces and moments on the orientations of the rod of appliance against the screw is carried out for various clinical cases. The obtained results could be used for the projection of the orthodontic appliance for widening upper jaw.

**Введение.** Одним из факторов успешного лечения аномалий зубочелюстной системы является исследование биомеханического воздействия ортодонтических аппаратов на перемещаемые зубы [1]. Обзор некоторых теоретических и экспериментальных результатов, полученных в этом направлении, представлен, в частности, в монографии [2]. Здесь указано на важность корректного дозирования нагрузки, создаваемой ортодонтическими аппаратами, поскольку превышение развиваемых ими усилий или их некорректное приложение может привести к патологическим процессам, возникающим в периодонте и парадонте при перемещении зубов. Нахождение усилий, развиваемых ортодонтическим аппаратом с четырьмя коронками и винтом, применяемым при расширении верхней челюсти, выполнено в работе [3] для случая, когда конец стержня, закрепленный на коронке, предполагается жестко заделанным. Показано, что в этом случае могут возникать достаточно большие сосредоточенные силы (1,5–2,0 кН), действующие на корень зуба.

Настоящая работа развивает это актуальное для ортопедической стоматологии направление и посвящена нахождению сосредоточенных сил и моментов сил, создаваемых ортодонтическим аппаратом с четырьмя стержнями и винтом, с учетом упругости пародонта.

**Основная часть.** Неактивированный ортодонтический аппарат для расширения верхней челюсти с четырьмя коронками и винтом представлен на рис. 1.

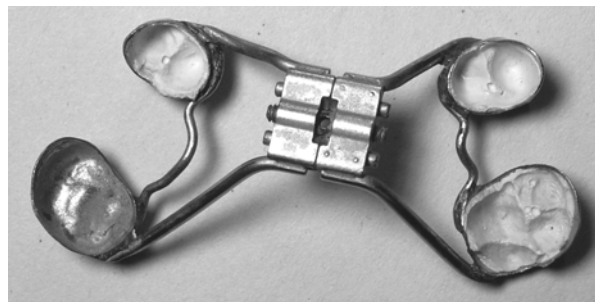


Рис. 1. Реальная конструкция ортодонтического аппарата

Аппарат развивает усилия, приводящие к перемещению зубов, за счет раскручивания винта, соединяющего пластинки, к которым прикреплены стержни с коронками, закрепленными на зубах. Верхний конец стержня получает перемещения, равные смещению пластинки аппарата. Нижний конец стержня, соединенный с коронкой при перемещении верхнего конца стержня, создает в точке закрепления реактивные силу и момент. Расчетная схема для стержня *AB* ортодонтического аппарата показана на рис. 2.

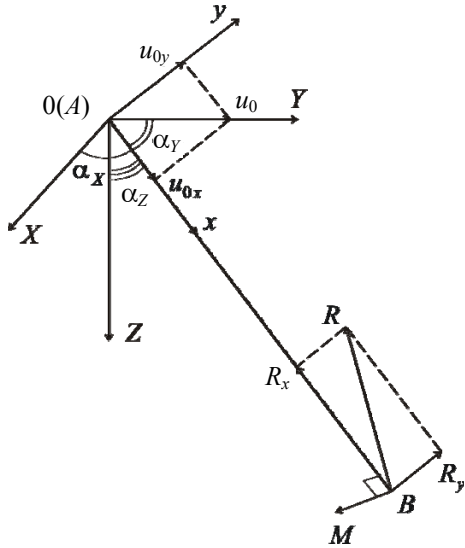


Рис. 2. Расчетная схема стержня ортодонтического аппарата

На рис. 2 точка  $A$ , совпадающая с началом координат системы  $OXYZ$ , в которой верхний конец стержня прикреплен к пластинке ортодонтического аппарата, при раскручивании винта получает перемещение  $u_0$ , направленное вдоль координатной оси  $OY$ . Для определения реактивных силы и момента силы перейдем в координатную плоскость  $xOy$ , проходящую через ось  $OY$  и сам стержень.

Перемещение  $u_y$  вдоль оси  $Oy$  найдем из уравнения поперечного изгиба стержня:

$$EI \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} - R_x \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

где  $E$  – модуль упругости;  $I = \pi r^4 / 4$  и  $r$  – осевой момент инерции и радиус поперечного сечения стержня соответственно;  $R_x = -c_x u_{0x}$  – реакция коронки, направленная вдоль оси  $Ox$ ;  $c_x$  – жесткость стержня в направлении оси  $Ox$ ;  $u_{0x} = u_0 \cos(\alpha_y)$  – полное перемещение точки  $A$  вдоль оси  $Ox$ ;  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  и  $\alpha_z$  – углы между стержнем аппарата и координатными осями  $Ox$ ,  $OY$  и  $OZ$  соответственно.

Поддерживающий аппарат зуба (пародонт) включает комплекс связанных между собой тканей, окружающих и фиксирующих зуб (десна, надкостница, кость альвеолярного отростка (стенка зубной альвеолы), периодонт (связка, удерживающая корень зуба в костной альвеоле), и покрывающий корень цемент [4]. Поскольку пародонт удерживает зуб в альвеоле, распределяя жевательную нагрузку и регулируя давление при жевании, одной из его основных функций является опорная и амортизирующая. Учитывая это обстоятельство, будем считать, что корень зуба упруго закреплен в пародонте. В этом случае граничные условия для уравне-

ния поперечного изгиба стержня (1) в точке  $B$  можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left( c_y u_y + EI \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^3} \right)_{x=l} &= 0, \\ \left( \mu \frac{\partial u_y}{\partial x} + EI \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right)_{x=l} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $c_y$  – жесткость пародонта при перемещении корня зуба в направлении оси  $Oy$ ;  $\mu$  – жесткость периодонта при поворотах корня;  $l$  – длина стержня.

Граничные условия для точки  $A$ , жестко закрепленной на пластинке аппарата, имеют вид

$$u_y|_{x=0} = u_{0y}, \quad \partial u_y / \partial x|_{x=0} = 0, \quad (3)$$

где  $u_{0y} = u_0 \sin(\alpha_y)$  – полное перемещение точки  $A$  вдоль оси  $Oy$ .

После решения уравнения (1) с учетом граничных условий (2) и (3) воспользуемся дифференциальными зависимостями, связывающими поперечные перемещения стержня с поперечной силой и моментом сил. После соответствующих преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} c_x u_{0x} \sqrt{4 + \frac{c_x}{K_1} c_y^2 u_{0x} u_{0y}^2} \times \\ &\times \left( 2EI c_x \mu u_{0x} (l c_y + c_x u_{0x}) \cos(\Phi_2) + \right. \\ &+ 2 \sin(\Phi_2) \left( \sqrt{EI c_x u_{0x}} \mu^2 (l c_y + c_x u_{0x}) \cos(\Phi_2) - \right. \\ &\left. \left. - EI c_y (l c_x u_{0x} + \mu) \left( \sqrt{EI c_x u_{0x}} + \mu \sin(\Phi_2) \right) \right) \right)^2, \\ K_1 &= \sqrt{EI} \left( \left| \mu \sqrt{c_x u_{0x}} (l c_y + c_x u_{0x}) \cos(\Phi_2) - \right. \right. \\ &\left. \left. - EI c_y (l c_x u_{0x} + \mu) \sin(\Phi_2) \right| \times \right. \\ &\left. \times \left| c_x^2 u_{0x}^2 - 2\mu c_y + c_y (l c_x u_{0x} + 2\mu) \cos(\Phi_2) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\Phi_2}{l} \sqrt{c_x u_{0x}} (l \mu c_y + \mu c_x u_{0x} - IE c_y) \sin(\Phi_2) \right| \right), \\ M &= \frac{2}{K_2} \mu c_x c_y u_{0x} u_{0y} \sin^2(\Phi_2) \times \\ &\times \left( \mu \sqrt{EI c_x u_{0x}} (l c_y + c_x u_{0x}) \cos(\Phi_2) + \right. \\ &\left. + EI c_y (\mu + l c_x u_{0x}) \sin(\Phi_2) \right), \\ K_2 &= EI \left( \frac{\Phi_2}{l} (l c_y + u_{0x} c_x) \mu \cos(\Phi_2) - \right. \end{aligned}$$

$$-(lc_x u_{0x} + \mu) c_y \sin(\Phi_2)) \times \\ \times \left( (c_x u_{0x})^2 - 2\mu c_y + (lc_x u_{0x} + 2\mu) c_y \cos(\Phi_2) + \right. \\ \left. + \frac{\Phi_2}{l} (\mu l c_y + \mu c_x u_{0x} - E l c_y) \sin(\Phi_2) \right),$$

где  $\Phi_2 = l \sqrt{c_x u_{0x} / (EI)}$ .

Для определения усилий, развиваемых ортодонтическим аппаратом в медио-дистальном (касательном к зубному ряду), вестибуло-оральном (перпендикулярном касательной к зубному ряду) и вертикальном направлениях, а также моментов сил, возникающих относительно этих направлений, найдем проекции реакции  $R$  на координатные оси системы  $OXYZ$  и реактивные моменты сил, действующие относительно осей этой системы:

$$R_X = - \frac{R \cos(\alpha_X)}{\sqrt{1 - \cos^2(\alpha_Y) + \sin^2(\alpha_Y) \cot^2(\alpha_Y + \delta_1)}},$$

$$R_Y = -R \cos(\alpha_Y + \delta_1),$$

$$R_Z = - \frac{R \cos(\alpha_Z)}{\sqrt{1 - \cos^2(\alpha_Y) + \sin^2(\alpha_Y) \cot^2(\alpha_Y + \delta_1)}},$$

$$\delta_1 = \arctan \left( \frac{\Phi u_{0y} \cos(\Phi)}{l(\Phi \cos(\Phi) - \sin(\Phi))} \right),$$

$$M_X = \frac{M \cos(\alpha_Z)}{\sin(\alpha_Y)}, \quad M_Y = 0, \quad M_Z = \frac{M \cos(\alpha_X)}{\sin(\alpha_Y)}.$$

На основании этих формул выражения для реакций  $R_{md}$  (медио-дистальное направление),  $R_{vo}$  (вестибуло-оральное направление),  $R_v$  (вертикальное направление) и моментов сил  $M_{md}$ ,  $M_{vo}$ ,  $M_v$ , действующих относительно соответствующих направлений, можно сформулировать следующим образом:

$$R_{md} = R_X \cos(\delta_2) - R_Y \sin(\delta_2),$$

$$R_{vo} = R_X \sin(\delta_2) + R_Y \cos(\delta_2), \quad R_v = R_Z,$$

$$M_{md} = M_X \cos(\delta_2), \quad M_{vo} = M_X \sin(\delta_2),$$

$$M_v = M_Z,$$

где  $\delta_2$  – угол между касательной к зубному ряду и координатной осью  $OX$ .

В качестве примера на рис. 3 представлены зависимости усилий  $R_{md}$ ,  $R_{vo}$ ,  $R_v$  при изменении положения стержня в плоскости  $OYZ$  по отношению к координатной оси  $OY$ . Перемещение верхней точки стержня составляет 0,4 мм (соответствует раскручиванию винта на четверть оборота).

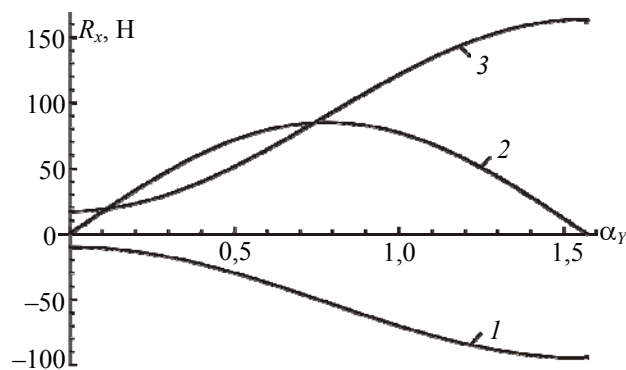


Рис. 3. Зависимости усилий  $R_{md}$  (1),  $R_{vo}$  (2) и  $R_v$  (3), развиваемых стержнем, от угла  $\alpha_Y$

При расчете реакций длина стержня принимается равной 25 см, радиус 1 мм; жесткости пародонта  $c_x = c_y = 50$  кН/м,  $\mu = 10$  Н · м [1]; модуль упругости  $E = 200$  ГПа; угол  $\delta_2 = 30^\circ$ .

**Заключение.** Полученные в работе результаты численных расчетов сил и моментов, действующих на зуб при перемещении пластинок ортодонтического аппарата, показывают, что значения наибольших моментов сил значительно меньше максимальных моментов, создаваемых силами давления. Поэтому можно сделать вывод о том, что повороты зубов в ходе ортодонтического лечения рассматриваемым аппаратом обусловлены не конструкцией самого аппарата, а теми моментами, которые создают силы давления. Эти моменты сил будут принимать тем большие значения, чем больше расстояние от точки закрепления стержня на коронке до соответствующего центра сопротивления зуба. Это важно учитывать при атрофии костной ткани, приводящей к существенному снижению жесткостей периодонта.

## Литература

1. Маилян, П. Д. Новые средства ортодонтического лечения / П. Д. Маилян. – Коломна: Коломенская типография, 1998. – 124 с.
2. Чуйко, А. Н. Особенности биомеханики в стоматологии / А. Н. Чуйко, В. Е. Вовк. – Харьков: Прапор, 2006. – С. 304.
3. Михасев, Г. И. Определение силовых факторов, развиваемых ортодонтическим аппаратом для расширения верхней челюсти / Г. И. Михасев, С. М. Босьяков, К. С. Юркевич // Российский журнал биомеханики. – 2010. – Т. 14, № 1. – С. 74–85.
4. Наумович, С. А. Биомеханика системы зуб – периодонт / С. А. Наумович, А. Е. Крушевский. – Минск: Эконом. технологии, 2000. – 132 с.

Поступила 27.02.2012

УДК 531.19

Г. С. Бокун, кандидат физико-математических наук, доцент (БГТУ);

Д. В. Гапанюк, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель (БГТУ)

**ПРЯМАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РАСЧЕТА  
СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ РЕШЕТОЧНОЙ СИСТЕМЫ  
С ПОМОЩЬЮ ПОТЕНЦИАЛОВ СРЕДНИХ СИЛ**

В работе выполнены конкретные расчеты и показано, что обобщение подхода на многочисленные потенциалы средних сил позволяет найти значение статистической суммы в случае плоской квадратной решетки с достаточно высокой точностью.

In work concrete calculations are executed and is shown that approach generalization on numerous potentials of average forces allows to find value of the statistical sum in case of a flat square lattice with enough split-hair accuracy.

**Введение.** С помощью одночастичных потенциалов статистическая сумма представляется средним от произведения некоторых сомножителей, наибольшее и наименьшее значения которых используются для формирования верхней и нижней границ искомой величины. Зависимость названных граничных значений от введенных потенциалов применяется для минимизации расстояния между обеими границами и определения статистической суммы с соответствующей точностью.

Рассмотрим плоскую квадратную решетку из  $N$  узлов, заселенность которых характеризуется числами заполнения  $n_i = 0, 1$ . В соответствии с моделью Изинга энергия системы представляется в форме

$$U_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j(i)} J n_i n_j, \quad (1)$$

где  $J$  – энергия парного взаимодействия частиц, являющихся ближайшими соседями;  $\sum_{j(i)}$  озна-

чает суммирование по ближайшим узлам вокруг  $i$  узла.

**1. Использование одночастичных потенциалов.** Наряду с исходной, рассмотрим базисную подсистему с одночастичным взаимодействием [1]:

$$U_N^0 = \sum_{i=1}^N \sum_{j(i)} \varphi_i n_i. \quad (2)$$

В дальнейшем для однородной среды все  $\varphi_j$  одинаковы, т. е.  $\varphi_j = \varphi$ .

Определения (1) и (2) используем для записи большой статистической суммы исходной системы в форме тождества:

$$Z_N = Z_N^0 \times \sum_{n_1, n_2, \dots} \prod_{i=1}^N \prod_{j(i)}^* \exp\{-\beta(J n_i n_j - \varphi_{(n_i)} - \varphi_{(n_j)})\} c_{n_i}, \quad (3)$$

где  $\prod^*$  означает, что учитываются только два  $j j^*$  узла, расположенные соответственно справа и снизу от  $i$  узла;  $\beta$  – обратная температура;  $c_i$  – средняя заселенность  $i$  узла в базисной системе, равная

$$c_{n_i} = \frac{\exp(\beta(\mu - 4\varphi)n_i)}{\exp(1 + \exp(\beta(\mu - 4\varphi)n_i))}, \quad (4)$$

здесь  $\mu$  – химический потенциал.

Следовательно, статистическая сумма базисной системы вычисляется по формуле

$$Z_N^0 = (1 + \exp(\beta(\mu - 4\varphi)))^N = \frac{1}{c_0^N}. \quad (5)$$

Выделим в (3) составляющую, соответствующую первому узлу (2 и 2\* отвечают узлам, расположенным справа и снизу по отношению к первому узлу), и перепишем  $Z_N$  в форме

$$Z_N = \frac{1}{c_0} \sum_{n_2, n_{2^*}} \left[ c_0 \exp\{\beta(\varphi_{n_2} + \varphi_{n_{2^*}})\} + c_1 \exp\{J n_2 + J n_{2^*} - 2\varphi - \varphi_{n_2} - \varphi_{n_{2^*}}\} \right] S_{(n_2, n_{2^*})}, \quad (6)$$

где

$$S_{(n_2, n_{2^*})} = \frac{1}{c_0^N} \times \sum \prod_{n_3, \dots} \prod_{i=2}^N \prod_{j(i)} c_{n_i} \exp\{-\beta(J n_i n_j - \varphi_{n_i} - \varphi_{n_j})\}. \quad (7)$$

Отметим, что

$$\sum_{n_2, n_{2^*}} S_{(n_2, n_{2^*})} = Z_{N-1}, \quad (8)$$

где  $Z_{N-1}$  соответствует статистической сумме системы из  $N-1$  узлов.

Выражение в квадратных скобках (6) перепишем в форме

$$K_{(n_2, n_{2^*})} = X^{-(n_2 + n_{2^*})} + e^{\beta\mu} W^{(n_2 + n_{2^*})} X^{(2 - n_2 - n_{2^*})}. \quad (9)$$