УДК 532.51

А. М. Волк, кандидат технических наук, доцент (БГТУ)

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ПРОНИЦАЕМЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Рассмотрено плоское движение вязкой несжимаемой жидкости между вращающимися коаксиальными проницаемыми вертикальными цилиндрами бесконечной длины. Предполагается, что на оси цилиндров находится линейно распределенный источник или сток. Для уравнений Навье – Стокса получены точные решения в случае постоянного объемного расхода жидкости в нормальном к поверхности направлении и заданных угловых скоростях вращения цилиндров. Показано, что в основном потоке движение определяется вязкостью жидкости и скоростью поверхности с притоком. Выполнены исследования пограничного слоя на поверхности с оттоком, получены касательные напряжения сил трения и суммарный момент этих сил на этой поверхности. Показано, что данные величины, вообще говоря, не зависят от вязкости. Минимум суммарного момента сил трения на поверхности с оттоком достигается при равенстве количества движения на проницаемых поверхностях.

We consider the planar motion of a viscous incompressible fluid between rotating coaxial permeable vertical cylinder of infinite length. It is assumed that the axis of the cylinder is linearly distributed source or sink. For the Navier – Stokes equations exact solutions are obtained in the case of constant volumetric flow rate in the normal direction to the surface and the given angular velocity of rotation of the cylinder. It is shown that the main thread of the movement is determined by the viscosity of the liquid surface and the rate of influx. The studies of the boundary layer on the surface of the outflow, received the tangents of friction stress and the total moment of these forces on the surface. It is shown that these quantities, generally speaking, does not depend on the viscosity. A minimum total of the moment of friction forces on the surface of the outflow is achieved with equal amounts of motion on permeable surfaces.

Введение. Исследование механики движения вязкой жидкости в пространстве, ограниченном проницаемыми поверхностями, имеет научное и практическое значение. Структура потока в пространстве между поверхностями и в пограничном слое учитывается при решении задач тепломассообмена и разделения гетерогенных систем [1]. Разделение фаз в фильтрующих центрифугах и барабанных фильтрах происходит в процессе движения жидкости в проницаемом вращающемся цилиндре. В вихревых массообменных аппаратах закрученный газовый поток генерируется вращающимися проницаемыми цилиндрами.

При решении задач гидромеханики теоретического и прикладного характера особый интерес представляют точные решения составленных моделей, так как они позволяют анализировать гидродинамику потоков. Но такие решения получены лишь для некоторых частных случаев.

В научной литературе приводится точное автомодельное решение задачи движения вязкой жидкости между вращающимися коаксиальными непроницаемыми вертикальными цилиндрами бесконечной длины [2, 3]. Показано, что при совпадении угловых скоростей цилиндров жидкость вращается как твердое тело.

Исследование движения сплошной среды, ограниченной проницаемыми поверхностями, представляет определенный интерес как в теоретическом, так и в практическом плане [4, 5].

Основная часть. Рассмотрим установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости, заключенной между вращающимися вертикальными коаксиальными проницаемыми цилиндрами бесконечной длины. Предположим, что на оси цилиндров находится линейно распределенный источник или сток мощностью Q. Пусть цилиндр, через поверхность которого происходит приток жидкости под давлением P_0, имеет радиус R_1 и вращается с угловой скоростью Ω_1, а цилиндр с оттоком радиуса R_2 имеет угловую скорость Ω_2 (рисунок).

Выберем цилиндрическую систему координат r, φ, z с осью z по оси цилиндров. Рассмотрим случай, когда осевая скорость жидкости не изменяется вдоль оси z. Из соображений симметрии очевидно, что

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\equiv 0;\ \frac{\partial}{\partial z}\equiv 0;\ W_r=W_r(r);\ W_\varphi=W_\varphi(r);\ P=P(r).$$

Для данных условий запишем уравнения Навье – Стокса и уравнение неразрывности:

$$\rho\left(W_r\frac{\partial W_r}{\partial r}-\frac{W_\varphi^2}{r}\right)=-\frac{\partial P}{\partial r}+\mu\left(\frac{\partial^2 W_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W_r}{\partial r}-\frac{W_r}{r^2}\right),$$

$$\rho\left(W_r\frac{\partial W_\varphi}{\partial r}+\frac{W_rW_\varphi}{r}\right)=\mu\left(\frac{\partial^2 W_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W_\varphi}{\partial r}-\frac{W_\varphi}{r^2}\right),$$

$$\frac{\partial W_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rW_r)=0.$$

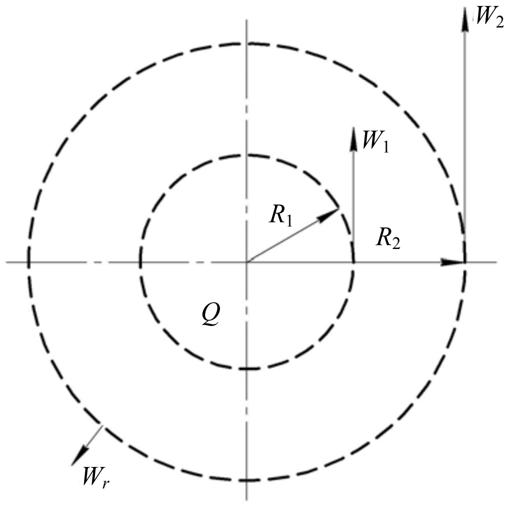

Схема плоского течения между вращающимися проницаемыми цилиндрами

Уравнение неразрывности имеет решение $W_r r$ = const, которое отражает постоянство объемного расхода Q жидкости через цилиндрические поверхности единичной длины. Радиальная скорость в области между цилиндрами будет $W_r = Q / (2\pi r)$. Скорость притока жидкости в пространство между цилиндрами составит $W_0 = Q / (2\pi R_1)$, а скорость оттока – $W_R = Q / (2\pi R_2)$. Уравнения Навье – Стокса преобразуются в систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dP}{dr} = \rho\left(\frac{W_\varphi{}^2}{r} + \frac{Q^2}{4\pi^2 r^3}\right), \tag{1}$$

$$\frac{d^2W_\varphi}{dr^2} - \frac{1}{r}\left(\frac{Q}{2\pi\nu} - 1\right)\frac{dW_\varphi}{dr} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{Q}{2\pi\nu} + 1\right)W_\varphi = 0 \tag{2}$$

с граничными условиями

$$P\big|_{r=R_1} = P_0;\quad W_\varphi\big|_{r=R_1} = \Omega_1 R_1 = W_1;\quad W_\varphi\big|_{r=R_2} = \Omega_2 R_2 = W_2. \tag{3}$$

Перейдем к относительному радиусу $\tilde{r} = r / R$, обозначим $r_0 = R_1 / R_2$ и получим уравнения

$$\frac{dP}{d\tilde{r}} = \rho\left(\frac{W_\varphi{}^2}{\tilde{r}} + \frac{Q^2}{4\pi^2 R_2^2 \tilde{r}^3}\right),$$

$$\frac{d^2W_\varphi}{d\tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}}\left(\frac{Q}{2\pi\nu} - 1\right)\frac{dW_\varphi}{d\tilde{r}} - \frac{1}{\tilde{r}^2}\left(\frac{Q}{2\pi\nu} + 1\right)W_\varphi = 0.$$

Граничные условия (3) преобразуются к виду

$$P\big|_{\tilde{r}=r_0} = P_0;\quad W_\varphi\big|_{\tilde{r}=r_0} = W_1;\quad W_\varphi\big|_{\tilde{r}=1} = W_2. \tag{4}$$

Решение уравнений ищем в виде r^n. При подстановке получаем

$$W_\varphi = c_1\tilde{r}^{n+1} + \frac{c_2}{\tilde{r}}.$$

Здесь $n = Q / (2\pi\nu)$. Абсолютное решение данной величины является числом Рейнольдса $\mathrm{Re}_Q = |Q| / (2\pi\nu)$ и характеризует интенсивность движения жидкости в радиальном направлении.

Из граничных условий (4) найдем произвольные постоянные и получим точное автомодельное решение:

$$W_\varphi = \frac{W_2 - W_1 r_0}{1 - \tilde{r}_0^{n+2}}\tilde{r}^{n+1} + \frac{W_1\tilde{r}_0 - W_2\tilde{r}_0^{n+2}}{1 - \tilde{r}_0^{n+2}}\frac{1}{\tilde{r}}. \tag{5}$$

Если в центральной области находится источник мощностью $Q > 0$, то $n > 0$ и $r_0 \le \tilde{r} \le 1$. В случае стока $Q < 0$, $n < 0$ и $1 \le \tilde{r} \le r_0$.

Найдем производную касательной скорости, касательные напряжения сил трения между цилиндрическими слоями единичной длины, суммарный момент этих сил относительно оси вращения цилиндров. С учетом выполненной замены

$$\tau_{r\varphi} = \frac{\mu}{R}\left[\tilde{r}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\frac{W_\varphi}{\tilde{r}}\right)\right];\quad L = \int_0^{2\pi}\tau_{r\varphi}R^2\tilde{r}^2\,d\varphi.$$

Для решения (5) получим соотношения

$$\frac{dW\varphi}{Rd\tilde{r}} = \frac{(n+1)(W_2 - W_1 r_0)}{1 - r_0^{n+2}}\tilde{r}^n - \frac{W_1 r_0 - W_2 r_0^{n+2}}{1 - r_0^{n+2}}\frac{1}{\tilde{r}^2},$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{\mu}{R}\left[\frac{n(W_2 - W_1 r_0)}{1 - r_0^{n+2}}\tilde{r}^n - \frac{2(W_1 r_0 - W_2 r_0^{n+2})}{1 - r_0^{n+2}}\frac{1}{\tilde{r}^2}\right],$$

$$L = 2\pi\mu R\left[\frac{n(W_2 - W_1 r_0)}{1 - r_0^{n+2}}\tilde{r}^{n+2} - \frac{2(W_1 r_0 - W_2 r_0^{n+2})}{1 - r_0^{n+2}}\right].$$

Данные выражения показывают, что при наличии источника (стока) достаточной интенсивности $n \gg 1$, $r_0^{n+1} \ll 1$ и течение у поверхности имеет большую касательную составляющую градиента скорости:

$$\left.\frac{dW_\varphi}{Rd\tilde{r}}\right|_{\tilde{r}=1} = \frac{Q(W_2 - W_1 r_0)}{2\pi\nu}.$$

У поверхности с оттоком существует пограничный слой, характер течения в котором описывается уравнениями, содержащими r^n. За толщину пограничного слоя примем расстояние δ, на котором составляющая $|n|\ r^n$ достаточно мала, т. е. $|n|\ (1-\delta)^n = \varepsilon$.

Воспользовавшись вторым замечательным пределом, получим оценку для толщины пограничного слоя:

$$P\big|_{\tilde r=r_0}=P_0;\ \exp(n\delta)\cong\frac{|n|}{\varepsilon};\ \delta\cong\frac{2\pi\nu\ln\left|Q/(2\pi\nu\varepsilon)\right|}{Q}.$$

Значение ε рекомендуется брать таким, чтобы производная касательной скорости на границе пограничного слоя отличалась от соответствующей производной в основном потоке на 1% [4]. Согласно этому находим

$$\varepsilon\cong 0{,}01\left|\frac{W_2R}{W_1R_0}-1\right|.$$

Получим касательные напряжения сил трения и суммарный момент этих сил на поверхности с оттоком:

$$\tau_{\tilde r\varphi}\big|_{\tilde r=1}\cong\frac{\rho Q\left(W_2R-W_1R_0\right)}{2\pi R_2^2};\ L\big|_{\tilde r=1}\cong\rho Q\left(W_2R-W_1R_0\right).$$

Данные величины, вообще говоря, не зависят от вязкости.

Вне пограничного слоя, учитывая полученные выше оценки, имеем движение по закону

$$W_\varphi\cong\frac{W_1r_0}{\tilde r}. \quad (6)$$

Таким образом, в основном потоке движение определяется вязкостью жидкости и скоростью поверхности с притоком:

$$\frac{dW\varphi}{Rd\tilde r}\cong-\frac{W_1r_0}{R_2\tilde r^2};\quad \tau_{\tilde r\varphi}\cong-\frac{2\mu W_1r_0}{R_2\tilde r^2};\quad L\cong-4\pi\mu W_1R_1.$$

Интегрируя (6), находим среднее значение касательной скорости:

$$\bar W_\varphi\cong\frac{W_1r_0\ln r_0}{r_0-1}.$$

При известном давлении на поверхность с притоком получим распределение давления в пространстве между цилиндрами:

$$\frac{P-P_0}{\rho}\cong\int_{r_0}^{r}\left(\frac{W_1^2r_0^3}{\tilde r^3}+\frac{Q^2}{4\pi^2R^2\tilde r^3}\right)d\tilde r=$$

$$=\left(\frac{W_1^2}{2}+\frac{W_2^2}{2}\right)\left(1-\frac{r_0^2}{\tilde r^2}\right).$$

Отсюда находим давление на поверхности с оттоком:

$$P\big|_{\tilde r=1}\cong P_0+\rho\left(\frac{W_1^2}{2}+\frac{W_R^2}{2}\right)\left(1-r_0^2\right). \quad (7)$$

Из условия минимума суммарного момента сил трения на поверхности с оттоком

$$L\big|_{\tilde r=1}=0;\ W_2R_2\cong\left(1+\frac{4\pi\nu}{Q}\right)W_1R_1$$

получим соотношение $W_1R_1\approx W_2R_2$, т. е. моменты количества движения на проницаемых поверхностях должны быть достаточно близки по значению.

Заключение. Полученные результаты могут быть применены при исследовании процессов фильтрования с использованием проницаемых перегородок или под давлением, а также для расчета тепломассообменных контактных аппаратов.

Обозначения. L – суммарный момент сил трения, Н/м; P – давление, Па; P_0 – давление на поверхности с притоком, Па; R_1, R_2 – радиусы цилиндров, через которые происходит приток и отток жидкости соответственно, м; Re – число Рейнольдса; W_φ, W_z, W_r – тангенциальная, осевая и радиальная составляющие скорости потока жидкости соответственно, м/с; ν – коэффициент кинематической вязкости, м^2/с; τ – касательные напряжения, Н/м^2; ρ – плотность жидкости, кг/м^3; φ, r, z – цилиндрическая система координат; Ω_1, Ω_2 – угловые скорости вращения цилиндров, через которые происходит приток и отток жидкости соответственно, 1/с.

Литература

1. Щукин, В. К. Теплообмен и гидродинамика внутренних потоков в полях массовых сил / В. К. Щукин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1980. – 240 с.

2. Лойтянский, Л. Г. Механика жидкости и газа: учеб. для вузов / Л. Г. Лойтянский. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1987. – 840 с.

3. Ландау, Л. Д. Механика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Гостехиздат, 1953. – 123 с.

4. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1969. – 742 с.

5. Ерощенко, В. М. Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях / В. М. Ерощенко, Л. И. Зайчик. – М.: Наука, 1984. – 274 с.

Поступила 27.02.2012