

УДК 530.182:624

**М. А. Князев**, доктор физико-математических наук, доцент (БНТУ)**ФЛУКТУАЦИИ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ  
КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА**

Вычислена поправка первого порядка по теории возмущений к величине однородной деформации стержня на стадии разупрочнения. Использована упругопластическая модель, в которой текучесть материала зависит не только от напряжения и деформации, но и от градиента деформации второго порядка. Диаграмма материала аппроксимирована квадратичной функцией. Проанализировано полученное решение. Предложен способ обобщения на случай существенно нелинейных задач.

A first order correction to the uniform state of deformation of bar in a case of disstrengthening is calculated by perturbation method. The elastic-plastic model is applied. In this model a yield strength of material depends not only on strength and deformation but on a second order gradient of deformation also. A squared approximation for a diagram of material is used. The obtained solution is analyzed. Epy way for generalization on a case of essentially nonlinear case is suggested.

**Введение.** Нелинейные модели находят все более широкое применение при изучении развития и распространения деформаций в композитных материалах (например, в бетоне или геоматериалах). К числу таких моделей относится нелинейная упругопластическая модель, в которой текучесть материала определяется функцией, зависящей не только от напряжения и деформации, но также и от градиента деформации второго порядка [1–3]. В данной модели локальная деформация заменяется некоторой усредненной деформацией по объему структурной ячейки материала, размеры которой считаются малыми в сравнении с характерным размером задачи. Пластическая деформация и последующее разрушение рассматриваются как две последовательные составляющие одного процесса. На начальной стадии этот процесс обусловлен движением дислокаций в кристаллических зернах материала, а затем происходит зарождение и развитие микродефектов. При этом интенсивность потока дислокаций достигает максимально возможного значения, что приводит к возникновению аннигиляции дислокаций и процессу дисклинации зерен с образованием между ними пор. В результате отмечается разупрочнение материала.

В указанной модели применительно к задаче о динамике распространения деформаций в одномерном стержне на стадии разупрочнения, когда при уменьшении напряжений деформации растут, уравнение для возмущения деформации  $\varepsilon$  относительно однородного состояния  $\varepsilon_{од}$  можно представить в виде [4, 5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + k \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \delta^2 \frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial x^4} = \\ = \frac{1}{2} f \frac{\partial^2 (\varepsilon)^2}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\delta$  – малый безразмерный параметр, характеризующий неоднородность внутренней структуры материала;  $k$  и  $f$  – коэффициенты аппроксимации для диаграммы материала. Поскольку на стадии разупрочнения происходит увеличение амплитуды деформаций, то становится необходимым учитывать нелинейные члены в диаграмме материала. Уравнение (1) записано в случае квадратичного приближения для диаграммы материала  $\sigma_s(\varepsilon_{од})$ :

$$\frac{d\sigma_s(\varepsilon)}{d\varepsilon} = -k + f\varepsilon,$$

причем  $k > 0$ ,  $f < 0$ , так как рассматривается нисходящая ветвь диаграммы. В линейном приближении функция, описывающая возмущение деформаций относительно однородного состояния, представляет собой плоскую волну. Вызывает интерес вопрос о влиянии нелинейности уравнения (1) на поведение решения, соответствующего ему линейного уравнения. Будем считать, что коэффициент  $f$  достаточно мал, и можно применить теорию возмущений. Это возможно, если зависимость, описывающая ход нисходящей ветви диаграммы материала, не очень сильно отличается от линейной.

**Основная часть.** Будем искать интересующее нас решение в виде распространяющихся волн стационарного профиля. Тогда уравнение (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} (k + v^2) \frac{d^2 \varepsilon}{dz^2} + \delta^2 \frac{d^4 \varepsilon}{dz^4} = \\ = f \left[ \varepsilon \frac{d^2 \varepsilon}{dz^2} + \left( \frac{d\varepsilon}{dz} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где  $z = x - vt$ ,  $v$  – скорость распространения волны. В соответствии со сделанным выше предположением правую часть уравнения (2)

можно рассматривать как малую поправку к линеаризованному уравнению

$$(k + v^2) \frac{d^2 \varepsilon_0}{dz^2} + \delta^2 \frac{d^4 \varepsilon_0}{dz^4} = 0,$$

решение которого имеет вид [6]

$$\varepsilon_0(z) = C_1 \cos(pz) + C_2 \sin(pz), \quad (3)$$

где  $p = \sqrt{(k + v^2)/\delta^2}$ , а  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования, значения которых могут быть найдены с использованием граничных условий задачи.

Если представить решение уравнения (2) в виде ряда по малому параметру  $f$

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0(z) + f \varepsilon_1(z) + f^2 \varepsilon_2(z) + \dots, \quad (4)$$

то, последовательно применяя теорию возмущений, можно построить бесконечную систему линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений, решая которую можно в принципе определить все функции  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ). Для этого необходимо подставить соотношение (4) в уравнение (2) и приравнять к нулю выражения при одинаковых степенях параметра  $f$ .

Вычислим поправку первого порядка. Соответствующее уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \delta^2 \frac{d^4 \varepsilon_1}{dz^4} + (k + v^2) \frac{d^2 \varepsilon_1}{dz^2} = \\ = \varepsilon_0 \frac{d^2 \varepsilon_0}{dz^2} + \left( \frac{d \varepsilon_0}{dz} \right)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Общее решение данного уравнения определяется суммой общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (5), известно и оно имеет вид, аналогичный соотношению (3)

$$\varepsilon_{1,о.о}(z) = A_1 \cos(pz) + A_2 \sin(pz), \quad (6)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – постоянные интегрирования. Частное решение неоднородного уравнения (5) можно построить при помощи метода вариации произвольных постоянных [7]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,ч.н}(z) = \cos(pz) \int \frac{\sin(pz) \varphi(z)}{W} dz + \\ + \sin(pz) \int \frac{\cos(pz) \varphi(z)}{W} dz, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\varphi(z)$  – правая часть уравнения (5); вронскиан системы функций, определяемых соотношением (3), будет постоянной величиной, так как

уравнение (5) не содержит производных первой степени и  $W = p$ . Окончательно для частного решения неоднородного уравнения (5) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,ч.н}(z) = \frac{C_1^2 - C_2^2}{3} \cos(4pz) + \\ + \frac{C_1 C_2}{3} \sin(4pz). \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь решение уравнения (5) с точностью до членов первого порядка по  $f$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon'(z) = C_1 \cos(pz) + C_2 \sin(pz) + \\ + f A_1 \cos(pz) + f A_2 \sin(pz) + \\ + f \frac{C_1^2 - C_2^2}{3} \cos(pz) + f \frac{C_1 C_2}{3} \sin(pz). \end{aligned} \quad (9)$$

**Заключение.** Вычисление общего решения уравнения (2) с точностью до первого порядка по параметру разложения показывает, что это решение в целом носит осциллирующий характер. В линейном приближении для диаграммы материала возмущение деформации относительно однородного состояния также описывается осциллирующей функцией (плоской волной). Учет нелинейности диаграммы материала в рамках теории возмущений приводит к тому, что в первом порядке малости спектр колебаний становится более сложным, появляются высшие гармонические составляющие, но колебательный характер зависимости по-прежнему имеет место. Теперь наряду с колебаниями, определяемыми основной модой с аргументом  $pz$ , решение содержит также колебания, описываемые четвертой гармонической составляющей. Следовательно, учет нелинейности не вносит существенных поправок в упомянутый выше механизм протекания пластической деформации и появление микродефектов, хотя ясно, что теперь в процессе разупрочнения материала появляется дополнительное взаимодействие между ячейками.

Отсутствие второй и третьей гармонических составляющих указывает на то, что по крайней мере в первом приближении по параметру  $f$  учет нелинейного квадратичного характера диаграммы материала не приводит к возбуждению этих гармоник и они не участвуют в переносе энергии при формировании и распространении деформации. Даже если в системе в силу случайных причин появятся колебания с аргументом  $2pz$  или  $3pz$ , то они будут затухать достаточно быстро по сравнению с характерным временем распространения колебаний, определяемым соотношением (3).

Дальнейшее изучение локализации деформаций связано с рассмотрением существенно нелинейных процессов, т. е. таких процессов, при которых вследствие того, что амплитуда взаимодействующих волн очень велика, использование теории возмущений оказывается недостаточным [8]. Возникает необходимость исследования решений не в виде распространяющихся волн, а в виде локализованных волн.

Проведенный в работах [4, 5] в рамках такого подхода анализ показал, что при попытке построить простейшее локализованное решение уравнения (1) в виде одиночного солитона не удается избежать характерного осциллирующего поведения соответствующего состояния, описывающего деформацию. Даже в случае, когда параметр  $f$  достаточно велик, волновой характер уравнения (1) оказывается преобладающим над нелинейным поведением диаграммы материала. Формальное построение одиночного солитона для уравнения (1) приводит к тому, что он оказывается нелокализованной в пространстве комплексно-значной функцией, что невозможно в принципе. Следовательно, в уравнении (1) отсутствует баланс между нелинейностью и дисперсией и с точки зрения теории нелинейных волн оно оказывается неинтегрируемым [9]. Однако для случая решения в виде связанного состояния двух одиночных солитонов возможно построить решение, которое будет описываться действительной функцией. Хотя уравнение (1) является нелинейным и простое суммирование двух одиночных солитонов невозможно, тем не менее, можно подобрать такие значения параметров решения, при которых мнимые составляющие будут компенсировать друг друга.

Возможно дальнейшее обобщение результатов, полученных в работах [4, 5]. Для того чтобы установить в указанной модели баланс между дисперсией и нелинейностью, требуется учесть в упругопластической модели и диссипативные процессы, которые имеют место при

распространении деформаций. В этом случае удастся построить решение в виде локализованного односолитонного состояния без дополнительных условий.

### Литература

1. Kukudzhanov, V. Modelling of the strain softening and localization in dynamical problems / V. Kukudzhanov // J. Phys. IV (France). – 1998. – Vol. 8, № PR8. – P. 207–214.
2. Кукуджанов, В. Н. О структуре полос локализации деформации в нелокальной теории пластичности при динамическом нагружении / В. Н. Кукуджанов // Механика твердого тела. – 1998. – № 6. – С. 104–114.
3. Кукуджанов, В. Н. Микромеханическая модель разрушения неупругого материала и ее применение к исследованию локализации деформаций / В. Н. Кукуджанов // Механика твердого тела. – 1999. – № 5. – С. 72–87.
4. Мягков, Н. Н. Моделирование локализации деформации в задаче о динамике разупрочняющегося стержня / Н. Н. Мягков // Письма в ЖТФ. – 1999. – Т. 25, вып. 20. – С. 48–53.
5. Мягков, Н. Н. О динамической локализации деформации в разупрочняющемся стержне / Н. Н. Мягков // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1999. – Т. 5, № 3. – С. 28–32.
6. Зайцев, В. Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
7. Матвеев, Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1955. – 656 с.
8. Косевич, А. М. Введение в нелинейную физическую механику / А. М. Косевич, А. С. Ковалев. – Киев: Наукова думка, 1989. – 304 с.
9. Инфельд, Э. Нелинейные волны, солитоны и хаос / Э. Инфельд, Дж. Роуландс. – М.: Физматлит, 2005. – 480 с.

Поступила 27.02.2012