УДК 62.50

А. В. Лапето, аспирант (БГТУ)

ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОМАТРИЦ И СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Работа посвящена исследованию применения процедуры вложения для систем, содержащих в своем составе звенья запаздывания. Выявлены недостатки и трудности при синтезе регуляторов и предкомпенсаторов в системах управления с запаздыванием по выходу и управлению. Рассмотрены два подхода для формирования проматриц и синтеза систем управления с учетом фактора запаздывания в объектах управления.

The paper is devoted to investigation of the procedure of enclosure systems containing delays elements. Shortcomings and difficulties in the synthesis of regulators and precompensators of control systems with delays in output and control channel where determined. Two approaches for the formation of promatrix and synthesis of control systems, taking into consideration the factor of delay in control objects are considered.

Введение. В связи с развитием теории автоматического управления и моделирования объектов управления в настоящее время все большее внимание уделяется объектам с запаздыванием [1]. Это явление заключается в том, что с началом изменения сигнала на входе объекта управления выходной сигнал начинает изменяться только через определенный промежуток времени.

Наиболее распространенными примерами объектов управления с запаздыванием могут служить процессы сушки и горения, прокалка металла, ленточные транспортеры, процессы измельчения и в некоторых случаях процессы в химических реакторах [2].

Моделирование процессов, протекающих в объектах управления с запаздыванием, осуществляется с помощью дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Трудности в математическом решении этих уравнений перетекают в проблемы технической реализации систем управления с запаздыванием [3].

Целью этого исследования является аналитический синтез системы управления объектами с запаздыванием по управлению, выходу и состоянию объекта, используя теорию вложения систем.

Основная часть. Пусть линейный стационарный объект с сосредоточенными запаздываниями может быть представлен в виде дифференциально-разностных уравнений:

$$\begin{gathered}\dot{x}(t)=\sum_{i=0}^{l}(A_i x(t-\tau_i))+\sum_{j=0}^{r}(B_j u(t-\theta_j)),\\ y(t)=\sum_{i=0}^{l}(C_i x(t-\tau_i)),\end{gathered} \tag{1}$$

где $\tau_0 = 0$, $0 < \tau$, τ_2, …, τ_l – постоянные времена запаздываний в каналах состояния и выхода; $\theta_0 = 0$, $0 < \theta_1$, θ_2, …, θ_r – постоянные времена запаздываний в каналах управления; $i = 0, \dots, l$; $j = 0, \dots, r$; $u(t) \in R^s$, $y(t) \in R^m$, $x(t) \in R^n$ – вектора входных, выходных переменных и фазовый вектор объекта управления соответственно. В нашем случае матрицы A_i имеют размер $n\times n$, C_i – $m\times n$, являются числовыми при временах запаздывания τ_i. Матрицы B_j размера $n\times s$ также являются числовыми и соответствуют временам запаздывания по управлению θ_j.

Начальные условия в рассматриваемой задаче примем с учетом задержки прохождения сигналов в объекте управления, т. е. формально будем рассматривать отрицательные моменты времени, предполагая, что в объекте происходили динамические процессы до начального момента времени:

$$\begin{gathered}x(t)=\varphi_x(t),\ \ t_0-\tau\le t\le t_0,\\ u(t)=\varphi_u(t),\ \ t_0-\theta\le t\le t_0,\end{gathered}$$

где τ, θ – наибольшие времена запаздывания по состоянию и управлению соответственно.

Задачу синтеза системы управления в нашем случае можно разделить на два этапа. На первом этапе стоит задача формирования проматрицы системы управления, а на втором – построение системы в зависимости от варианта ее синтеза.

Формирование проматрицы. В современной теории автоматического управления все более широко используется представление объектов в пространстве состояний [4]. От традиционных методов исследования (частотного, корневых годографов) метод пространства состояний отличают принципиально новые возможности. Этот тип представления объектов управления позволяет, например, судить, достижима ли цель управления (управляемость объекта), определить необходимый состав измерителей (наблюдаемость объекта), синтезировать управление на все входы многомерного объекта и др.

Использование аппарата вложения предполагает представление системы управления в блочно-матричном виде:

$$\Omega(p)\begin{bmatrix} x \\ y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

где $\Omega(p)$ – проматрица системы управления; x_0 – вектор начальных условий.

Для задачи управления системами с запаздыванием матрица $\Omega(p)$ должна быть расширена и принимает вид

$$\Omega(p) = \begin{bmatrix} pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i e^{\tau_i p} & 0 & -\sum_{j=0}^{r} B_j e^{\theta_j p} & 0 \\ -\sum_{i=0}^{l} C_i e^{\tau_i p} & I_m & 0 & 0 \\ 0 & K(p) & I_s & -G(p) \\ 0 & 0 & 0 & I_s \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Квадратная и всегда полная (невырожденная) матрица $\Omega(p)$ называется проматрицей системы в пространстве состояний.

Представление системы с помощью проматрицы обладает исчерпывающей полнотой. В силу своей полноты проматрица всегда характеризуется двусторонней обратимостью независимо от задания матриц A, B, C системы. Отсюда следует единственность обратной к (3) матрицы или репроматрицы:

$$\Omega^{-1}(p) = \begin{bmatrix} E_x^{\varphi_x}(p) & * & * & E_x^{g}(p) \\ E_y^{\varphi_x}(p) & * & * & E_y^{g}(p) \\ E_u^{\varphi_x}(p) & * & * & E_u^{g}(p) \\ 0 & 0 & 0 & I_s \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

где $E_i^j(p)$ – матричная передаточная функция от параметра i к параметру j.

После выполнения процедур технологии вложения можно получить уравнения, которым должны удовлетворять матричные передаточные функции предкомпенсатора $G(p)$ и регулятора $K(p)$, для трех случаев: при синтезе по свободной и вынужденной составляющим $E_y^{\varphi_x}(p)$ и $E_y^{g}(p)$ соответственно, а также при совместном синтезе по свободной и вынужденной составляющим движения замкнутой динамической системы.

После выбора варианта синтеза и задания желаемых матричных передаточных функций системы они приравниваются к элементам репроматрицы, содержащим комбинации матриц системы, предкомпенсатора и регулятора.

Для решения полученных матричных уравнений можно использовать процедуру канонизации матриц системы.

Суть канонизации произвольной матрицы M размера $m\times n$ заключается в нахождении четверки матриц $(M)_{r,m}^{\sim L}$, $\overline{M}^{L}_{(m-r),n}$, $(M)_{n,r}^{\sim R}$, $\overline{M}^{R}_{n,(n-r)}$, удовлетворяющих равенству

$$\begin{bmatrix} (M)_{r,m}^{\sim L} \\ \overline{M}^{L}_{(m-r),n} \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} (M)_{n,r}^{\sim R} & \overline{M}^{R}_{n,(n-r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $(M)_{r,m}^{\sim L}$ ($(M)_{n,r}^{\sim R}$) – левый (правый) канонизатор матрицы M; $\overline{M}^{L}_{(m-r),n}$ ($\overline{M}^{R}_{n,(n-r)}$) – левый (правый) матричный делитель нуля матрицы M; $r = \operatorname{rank}(M)$; I_r – единичная матрица размера $r\times r$.

Сводный канонизатор, используемый при решении матричных уравнений, определяется по формуле

$$(M)^{\sim} = (M)^{\sim R}(M)^{\sim L}. \qquad (6)$$

Нахождение этих матриц может осуществляться как аналитически, так и с использованием пакета MatLab [5].

Определим параметры настройки регулятора и предкомпенсатора, опустив условия разрешимости полученных уравнений.

1. Синтез по свободной составляющей движения замкнутой динамической системы.

В этом случае свободное движение системы, обусловленное начальными условиями объекта, не зависит от выбора предкомпенсатора, и закон управления принимает вид

$$u(p) = -K(p)x(p).$$

Применение технологии вложения при синтезе по свободной составляющей дает следующее уравнение для определения регулятора $K(p)$:

$$E_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r} B_j e^{\theta_j p} K(p) = \sum_{i=0}^{l} C_i e^{\tau_i p} - \\ - E_y^{\varphi_x}(p)\left(pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i e^{\tau_i p} \right). \qquad (7)$$

Из уравнения (7) с использованием результатов [6] можно выразить множество регуляторов:

$$\{K(p)\}_{\mu} = \left(E_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r} B_j e^{\theta_j p} \right)^{\sim} \times \\ \times\left(\sum_{i=0}^{l} C_i e^{\tau_i p} - E_y^{\varphi_x}(p)\left(pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i e^{\tau_i p} \right) \right) + \\ + \overline{E_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r} B_j e^{\theta_j p}}^{R} \mu(p), \qquad (8)$$

где $\mu(p)$ – произвольная дробно-полиномиальная матрица соответствующих размеров.

2. Синтез по вынужденной составляющей движения замкнутой динамической системы.

Применение технологии вложения при синтезе по вынужденной составляющей дает следующие уравнения относительно искомых передаточных матриц $G(p)$ и $K(p)$:

$$\{K(p)\}_{T,\lambda,\vartheta} = \overline{\sum_{j=0}^{r} B_j e^{\theta_i p}}^{R} \vartheta(p) + $$

$$+\left(\sum_{j=0}^{r} B_j e^{\theta_i p}\right)^{\sim} \times$$

$$\times\left(T^{-1}(p)\begin{bmatrix} \left(\sum_{i=0}^{l} C_i e^{\tau_i p}\right)^{\sim L} \sum_{i=0}^{l} C_i e^{\tau_i p} \\ \lambda(p) \end{bmatrix} - \left(pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i e^{\tau_i p}\right) \right), \quad (9)$$

$$\{G(p)\}_{N,\xi,\kappa} = \left(\sum_{j=0}^{r} B_j e^{\theta_i p}\right)^{\sim} \times$$

$$\times N^{-1}(p)\begin{bmatrix} (E_y^g(p))^{\sim L} E_y^g(p) \\ \kappa(p) \end{bmatrix} +$$

$$+\overline{\sum_{j=0}^{r} B_j e^{\theta_i p}}^{R} \xi(p), \quad (10)$$

где T, N – произвольные обратимые матрицы; λ, κ, ξ – произвольные матрицы, дополняющие соответствующие им строчечные базисы до размерности пространства состояний n.

Аналогично происходит и одновременный синтез по свободной и вынужденной составляющим.

Ввиду наличия в уравнениях для нахождения численных значений регулятора и компенсатора (8)–(10) запаздываний в матрицах делителей нулей и канонизаторов возникают проблемы в их вычислении, и дальнейший синтез становится невозможным.

Из вышесказанного вытекает необходимость компенсации запаздываний для применения технологии вложения. Одним из возможных способов реализации является введение компенсаторов Смита (рис. 1) по каналу управления и выхода [7].

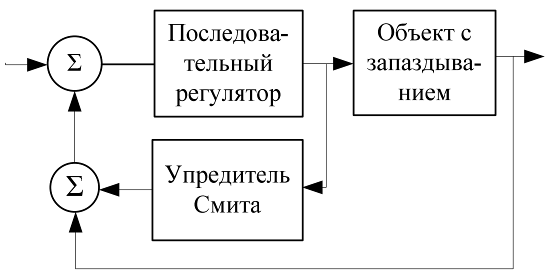

Рис. 1. Структурная схема системы управления с упредителем Смита

Применение преобразования Лапласа к уравнениям (1) дает операторную форму описания объекта:

$$px(p) = \sum_{i=0}^{l} A_i e^{-\tau_i p} x(p) + \sum_{j=0}^{r} B_j e^{-\theta_j p} u(p) +$$

$$+ \varphi_x(p) + \varphi_u(p), \quad (11)$$

$$y(p) = \sum_{i=0}^{l} C_i e^{-\tau_i p} x(p).$$

Матричная передаточная функция объекта управления, представленная уравнениями (11), может быть выражена следующим образом:

$$W(p) = \sum_{i=0}^{l} C_i e^{-\tau_i p}\left(pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i e^{-\tau_i p}\right)^{-1} \sum_{j=0}^{r} B_j e^{-\theta_j p}. \quad (12)$$

Упредитель Смита (рис. 1) основан на принципе динамической компенсации запаздываний, который заключается в предварительной компенсации влияния запаздываний на переходные процессы в контуре упреждения. В случае полного упреждения этот контур включает в себя разность модели объекта управления с запаздываниями. Следовательно, задачу регулирования можно решать без учета фактора запаздывания.

В многосвязных системах управления для решения задачи аддитивной компенсации запаздываний по управлению и выходу можно использовать идею упреждения Смита (рис. 2).

Следуя этому принципу, добавляется параллельно к объекту контур компенсации запаздываний по управлению $R(p)$ и контур компенсации запаздываний по выходу $H(p)$.

Контур $R(p)$, компенсирующий запаздывания по управлению, можно получить как разность модели объекта без запаздываний по управлению и модели объекта с запаздываниями по управлению. Контур $H(p)$, компенсирующий запаздывания по выходу, можно получить как разность модели объекта без запаздывания по выходу и модели объекта с запаздываниями по выходу. Тем самым используется идея, предложенная в схеме Смита: компенсация запаздываний с помощью подсистем, представляющих собой разность моделей объекта без запаздываний и с запаздываниями.

Контур, компенсирующий запаздывания по входу (рис. 2), может быть представлен в виде матричной передаточной функции:

$$R(p) = \sum_{i=0}^{l} C_i e^{-\tau_i p}\left(pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i e^{-\tau_i p}\right)^{-1} \times$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{r} B_j - \sum_{j=0}^{r} B_j e^{-\theta_j p}\right), \quad (13)$$

а контур, компенсирующий запаздывания по выходу:

$$H(p)=\left(\sum_{i=0}^{l}C_i-\sum_{i=0}^{l}C_ie^{-\tau_i p}\right)\times$$
$$\times\left(pI_n-\sum_{i=0}^{l}A_ie^{-\tau_i p}\right)^{-1}\sum_{j=0}^{r}B_j. \qquad (14)$$

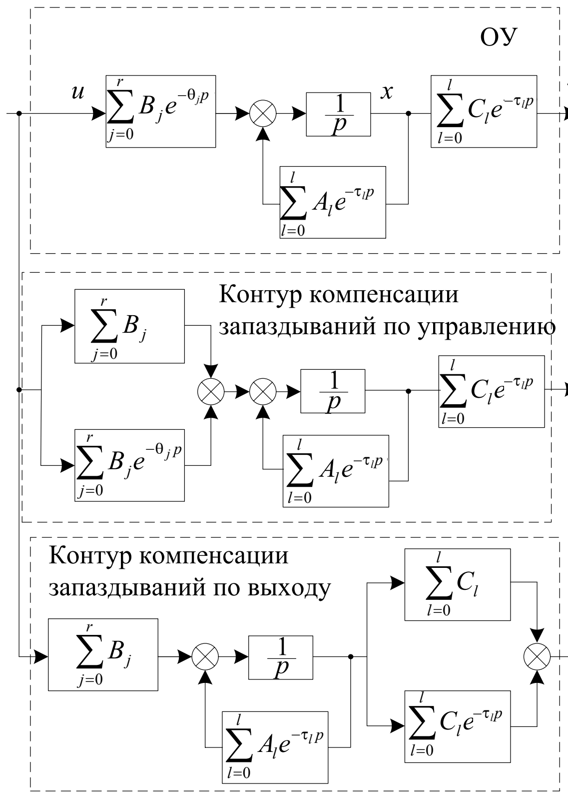

Рис. 2. Структурная схема параллельной компенсации запаздываний с упредителем Смита

Рассчитав значения компенсаторов для контуров управления и выхода можно говорить о том, что задачу синтеза регулятора и предкомпенсатора (8)–(10) возможно решить без учета фактора запаздывания. Однако этот метод можно использовать лишь в том случае, если модель объекта управления рассчитана максимально точно и, что наиболее важно, не изменяется с течением времени. К сожалению, в большинстве технологических процессов наблюдается обратная ситуация (изменение режима работы оборудования, изменение параметров сырья, окружающей среды и т. д.) [8]. При изменении параметров модели объекта управления значения компенсаторов Смита для контуров управления и выхода остаются прежними, и, как следствие, явление запаздывания полностью не компенсируется. В результате в моменты времени, соответствующие временам запаздывания, проявляются скачкообразные изменения значений переменных состояния объекта. В случае объектов управления, находящихся на границе устойчивости, эти изменения могут существенно повлиять на качественные характеристики объекта.

С другой стороны, влияние запаздываний может быть учтено путем разложения запаздываний в различные ряды [9]. В системах автоматизации наиболее часто используется разложение в ряд Паде (15), как наиболее просто реализующееся:

$$W_\tau(p)=\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)!}{k!(n-k)!}(-\tau p)^{n-k}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)!}{k!(n-k)!}(\tau p)^{n-k}}, \qquad (15)$$

где n – порядок разложения.

Пусть исходная система представлена в виде дифференциально-разностных уравнений (1). Применив преобразование Лапласа, получим модель в операторной форме записи. Раскладывая запаздывание в ряд Паде и проводя алгебраические преобразования, получим модель объекта в виде полинома, содержащего оператор Лапласа в различных степенях и переменные объекта управления (выход, управление и состояние). Для применения процедуры вложения необходимо представить модель объекта в пространстве состояний, для чего наиболее целесообразно воспользоваться структурными формами перехода [10].

Применим структурную схему представления модели объекта управления, названную канонической формой наблюдаемости (рис. 3).

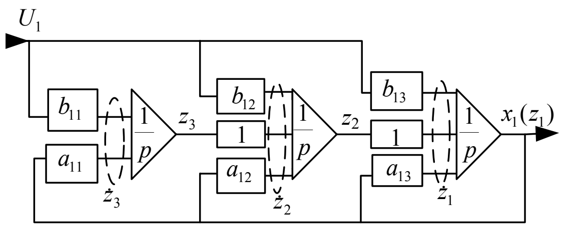

Рис. 3. Каноническая форма наблюдаемости

Обобщив приведенную структурную форму для многомерных систем, перейдем в пространство состояний.

Главным достоинством такого способа перехода в пространство состояний является сохранение физического смысла переменных состояния объекта, так как на одной стадии синтеза регулятора и предкомпенсатора необходимо задавать желаемые передаточные функции именно для них.

Разложив запаздывания в ряд Паде, получим стандартную форму записи модели системы в пространстве состояний:

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=0}^{l}(A_i x(t-\tau_i))+B^* u(t),$$
$$y(t)=C^* x(t), \quad (16)$$

где B^*, C^* – числовые матрицы пространства состояний, полученные при переходе от структурной формы системы.

Для полученной системы управления можно применить процедуру вложения в более простом виде, чем (8)–(10):

– для синтеза по свободной составляющей замкнутой динамической системы:

$$\{K(p)\}_{\mu}=\left(E_y^{\varphi_x}(p)B^*\right)^{\sim}\times$$
$$\times\left(C^*-E_y^{\varphi_x}(p)\left(pI_n-\sum_{i=0}^{l}A_i e^{\tau_i p}\right)\right)+$$
$$+\overline{E_y^{\varphi_x}(p)B^*}^{R}\mu(p); \quad (17)$$

– для синтеза по вынужденной составляющей замкнутой динамической системы:

$$\{K(p)\}_{T,\lambda,\vartheta}=\overline{B^*}^{R}\vartheta(p)+\left(B^*\right)^{\sim}\times$$
$$\times\left(T^{-1}(p)\begin{bmatrix}\left(C^*\right)^{\sim L}C^*\\ \lambda(p)\end{bmatrix}-\left(pI_n-\sum_{i=0}^{l}A_i e^{\tau_i p}\right)\right), \quad (18)$$

$$\{G(p)\}_{N,\xi,\kappa}=\left(B^*\right)^{\sim}N^{-1}(p)\begin{bmatrix}(E_y^g(p))^{\sim L}E_y^g(p)\\ \kappa(p)\end{bmatrix}+$$
$$+\overline{B^*}^{R}\xi(p). \quad (19)$$

В полученных уравнениях отсутствуют времена запаздываний в канонизируемых матрицах, а следовательно, синтез системы управления становится возможным.

Заключение. В ходе проведенного анализа особенностей формирования проматриц и синтеза регуляторов для систем управления с запаздыванием были выявлены основные трудности по применению процедуры вложения к этим системам. Для многомерных систем управления с наличием запаздывания по каналам состояния, управления и выхода синтез регуляторов и предкомпенсаторов становится невозможным. Это связано с необходимостью канонизации матриц управления и выхода, а при наличии в них запаздываний она становится невозможной.

Рассмотрены два варианта синтеза для систем управления такого рода, а именно использование компенсаторов Смита и аппроксимации запаздываний рядом Паде.

При использовании компенсаторов Смита главным недостатком является невысокая робастность системы либо ее отсутствие, так как при изменении модели объекта управления регуляторы и компенсаторы становятся неэффективными.

При аппроксимации запаздываний рядами различного типа озвученный недостаток можно устранить, увеличивая порядок разложения. Для получения модели объекта управления в пространстве состояний показана возможность использования структурных форм перехода от дифференциально-разностных уравнений к модели в пространстве состояний. В этом случае сохраняется физический смысл переменных состояния объекта, что облегчает синтез по желаемому поведению системы, а также построение наблюдателей (при необходимости) для систем, содержащих звенья запаздывания.

Литература

1. Гурецкий, Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием / Х. Гурецкий; пер. с пол. – М.: Машиностроение, 1974. – 328 с.

2. Янушевский, Р. Т. Управление объектами с запаздыванием / Р. Т. Янушевский. – М.: Наука, 1978. – 416 с.

3. Лапето, А. В. Анализ методов синтеза систем автоматического управления с запаздыванием / А. В. Лапето // Труды БГТУ. – 2011. – № 6: Физ.-мат. науки и информатика. – С. 78–80.

4. Буков, В. Н. Анализ и синтез матричных линейных систем. Сравнение подходов / В. Н. Буков, С. В. Горюнов, В. Н. Рябченко // Автоматика и телемеханика. – 2000. – Вып. 11. – С. 3–43.

5. Асанов, А. З. Канонизация матриц произвольного размера средствами MATLAB / А. З. Асанов, И. З. Ахметзянов // Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB: труды 2-й всерос. науч. конф. – М.: ИПУ РАН, 2004. – С. 798–804.

6. Буков, В. Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем / В. Н. Буков. – Калуга: Изд-во научной лит-ры Н. Ф. Бочкаревой, 2006. – 720 с.

7. Асанов, А. З. Решение задачи синтеза системы автоматического управления многосвязным объектом с запаздываниями / А. З. Асанов, В. С. Каримов // Вестник УГАТУ. – 2009. – Т.13, Управление, ВТиИ. – С. 24–32.

8. Дорф, Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп; пер. с англ. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.

9. Бейкер, Дж. Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986. – 502 с.

10. Кузьмицкий, И. Ф. Теория автоматического управления / И. Ф. Кузьмицкий, Г. Т. Кулаков. – Минск: БГТУ, 2010. – 574 с.

Поступила 02.03.2012