УДК 330.111.4

А.Ф. Проневич
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

ДВУХФАКТОРНЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ СО ВЗАИМОСВЯЗАННЫМИ СРЕДНЕЙ И ПРЕДЕЛЬНОЙ ОТДАЧЕЙ ФАКТОРОВ ПРОИЗВОДСТВА

Производство есть процесс преобразования одних благ в другие: факторов производства в готовую продукцию. Зависимость между количеством используемых факторов производства и максимально возможным при этом выпуском продукции называют производственной функцией (ПФ). Все факторы производства можно представить в виде двух агрегатов (капитал и труд), а моделирование производственного процесса P осуществлять на основании двухфакторной ПФ

$$Y = F(K, L) \quad \forall (K, L) \in G, \tag{1}$$

где K – капитал, L – труд, Y – объем выпущенной продукции, а неотрицательная функция F является дважды непрерывно дифференцируемой на области G из пространства затрат $\mathrm{R}_+^2 = \{(K, L): K \geq 0, L \geq 0\}$.

Выбор функциональной формы ПФ (1) является одним из наиболее сложных и ответственных этапов экономико-статистического моделирования. Здесь происходит «стыковка» информации об объекте моделирования и сведений о свойствах различных параметрических классов функций, из числа которых предстоит выбрать вид модели [1]. Параметрический вид большинства из применяемых в настоящее время ПФ (1) возник или может рассматриваться (см, например, [1 – 3]) как общий интеграл системы дифференциальных уравнений в частных производных, выражающий инвариантность некоторых характеристик ПФ или соотношений между ними при изменении аргументов.

Каждая из ПФ (1) характеризуется рядом экономико-математических показателей [1, с. 45 – 51]. Важнейшими из которых (см., например, [4]) являются *средняя производительность капитала* (*труда*)

$$AP_K(F) = \frac{F(K, L)}{K} \quad \left(AP_L(F) = \frac{F(K, L)}{L} \right),$$

которая показывает среднюю отдачу от каждой единицы капитала (труда), и *предельная производительность капитала* (*труда*)

$$MP_K(F) = \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} \quad \left(MP_L(F) = \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} \right),$$

которая приближенно показывает на сколько измениться объем выпуска продукции в случае использования дополнительной единицы капитала (труда) и неизменном количестве труда (капитала).

Так, например, в таблице 1 представлены средняя и предельная отдачи капитала и труда для двухфакторных ПФ Кобба–Дугласа

$$F(K,L)= AK^{\alpha}L^{\beta} \ \ \forall(K,L)\in \mathrm{R}_{+}^{2}, \ \ A>0, \ \ \alpha,\beta\in \mathrm{R}\setminus\{0\},$$

и ПФ CES (ПФ с постоянной эластичностью замещения)

$$F(K,L)= A\left(bK^{-\gamma}+(1-b)\,L^{-\gamma}\right)^{-\mu/\gamma} \forall(K,L)\in G,$$

$$A>0, \ \ \mu>0, \ \ b\in[0;1], \ \ \gamma\in[-1;0)\cup(0;+\infty).$$

При этом из таблицы 1 видно, что предельная и средняя отдачи капитала (труда) для ПФ Кобба–Дугласа связаны между собой линейной зависимостью и степенной зависимостью в случае CES-функции.

Таблица 1 – Средняя и предельная производительности капитала (труда) для ПФ с постоянной эластичностью замещения факторов производства $(k=K/L)$

№	Показатель	Функция Кобба–Дугласа	CES-Функция (при $\mu=1$)
1.	$AP_K(F)$	$A\,K^{\alpha-1}L^{\beta}$	$A\,(a+\,(1-a)\,k^{\gamma})^{-1/\gamma}$
2.	$AP_L(F)$	$A\,K^{\alpha}L^{\beta-1}$	$A\,(ak^{-\gamma}+1-a)^{-1/\gamma}$
3.	$MP_K(F)$	$\alpha\cdot AP_K(F)$	$\frac{a}{A^{\gamma}}(AP_K(F))^{\gamma+1}$
4.	$MP_L(F)$	$\beta\cdot AP_L(F)$	$\frac{1-a}{A^{\gamma}}(AP_L(F))^{\gamma+1}$

Источник: разработана автором.

Данная работа продолжает исследования [2; 3] по изучению ПФ, обладающих заданными экономико-математическими характеристиками. В статье получены аналитические виды ПФ с заданной предельной производительностью капитала (труда). Способ построения ПФ основан на нахождении решений дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка методом характеристик. Основные результаты работы составляют таблицы 2 и 3 и утверждения относительно предельной производительности капитала (закономерности относительной предельной отдачи труда формулируются аналогично).

Теорема 1. *Производственный процесс P у которого предельная производительность капитала линейно зависит от выпуска продукции*

$$MP_K(F)=f(K,L)\cdot F+g(K,L) \ \ \forall(K,L)\in G, \ \ f,g\in C(G),$$

может быть описана одной из ПФ вида

$$F_{\varphi}:(K,L)\to h(K,L)\left(\varphi(L)+\int\frac{g(K,L)}{h(K,L)}dK\right)\ \forall(K,L)\in G,$$

где функция $h(K,L)=\exp\int f(K,L)dK\ \ \forall(K,L)\in G$ (*при интегрировании переменная* L *рассматривается как параметр*).

Следствие 1. *Если производственный процесс P такой, что у него предельная производительность капитала*

$$MP_K(F)=f(K,L)\cdot F\ \ \forall(K,L)\in G,\ \ f\in C(G),$$

то производственный процесс P может быть описан ПФ вида

$$F_{\varphi}:(K,L)\to\varphi(K,L)\exp\int f(K,L)dK\ \ \forall(K,L)\in G.$$

На основании следствия 1 при $f(K,L)=\dfrac{\alpha}{K}$ получаем множество ПФ $F_{\varphi}(K,L)=K^{\alpha}\varphi(L),$ описывающих производственный процесс P для которого предельная производительность капитала прямо пропорциональна средней производительности капитала, т.е. (таблица 2)

$$MP_K(F)=\alpha\cdot AP_K(F),\ \ \alpha\in \mathrm{R}\setminus\{0\}.$$

Таблица 2 – Аналитический вид ПФ $(\alpha,\beta,\gamma\in \mathrm{R}\setminus\{0\},\ \ \varphi\in C^1(0;+\infty))$

=	$\alpha\cdot AP_K(F)$	$\beta\cdot AP_L(F)$	$\gamma\cdot MP_K(F)$	$\gamma\cdot MP_L(F)$
$MP_K(F)$	$K^{\alpha}\varphi(L)$	$\varphi(L)\exp\left(\gamma\dfrac{K}{L}\right)$	□	$\varphi(\gamma K+L)$
$MP_L(F)$	$\varphi(K)\exp\left(\gamma\dfrac{L}{K}\right)$	$L^{\beta}\varphi(K)$	$\varphi(K+\gamma L)$	□

Источник: разработана автором.

Взаимосвязи между средней и предельной отдачей факторов производства для ПФ (1) описаны в таблицах 2 и 3. Отметим, что взаимосвязи между средней и предельной производительностью факторов на основе введенного Г.Б. Клейнером показателя эластичности влияния предельной отдачи факторов на среднюю производительность (мобильность отдачи фактора) были изучены в работе [5].

Таблица 3 – Аналитический вид ПФ $(\alpha \in \mathrm{R}\setminus\{0\},\ \beta \in \mathrm{R}\setminus\{1\},\ \varphi \in C^1(0;+\infty))$

$=$	$\alpha \cdot \left(AP_K(F)\right)^{\beta}$	$\alpha \cdot \left(AP_L(F)\right)^{\beta}$
$MP_K(F)$	$\left(\alpha K^{1-\beta} + \varphi(L)\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$	$L\left(\alpha(1-\beta)\dfrac{K}{L} + \varphi(L)\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$
$MP_L(F)$	$K\left(\alpha(1-\beta)\dfrac{L}{K} + \varphi(K)\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$	$\left(\alpha L^{1-\beta} + \varphi(K)\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$

Источник: разработана автором.

Теорема 2. *Производственный процесс P у которого предельная отдача капитала* $MP_K(F) = f(K,L)\ \ \forall (K,L) \in G,\ \ f \in C(G),$ *может быть описана одной из двухфакторных ПФ вида*

$$F_{\varphi} : (K,L) \to \int f(K,L)dK + \varphi(L)\ \ \forall (K,L) \in G.$$

Следствие 2. *Производственный процесс P у которого предельная производительность капитала является линейной функцией относительно капитала и труда, т.е.*

$$MP_K(F) = \alpha K + \beta L + \gamma\ \ \forall (K,L) \in \mathrm{R}^2_+,\ \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{R},$$

может быть описана одной из двухфакторных ПФ вида

$$F_{\varphi} : (K,L) \to \frac{\alpha}{2}K^2 + \beta KL + \gamma K + \varphi(L)\ \ \forall (K,L) \in G.$$

Из следствия 2 получаем, что если предельная производительность капитала постоянна, т.е. $MP_K(F) = \gamma\ \ \forall (K,L) \in \mathrm{R}^2_+,\ \ \gamma \in \mathrm{R}$, то такой производственный процесс P может быть описан одной из ПФ вида

$$F_{\varphi} : (K,L) \to \gamma K + \varphi(L)\ \ \forall (K,L) \in G,$$

где φ – произвольная непрерывно дифференцируемая на открытом числовом луче $(0;+\infty)$ функция такая, что на экономической области G имеет место неравенство $\varphi(L) \geq -\gamma K$.

Полученные теоретические результаты (таблицы 2 и 3, теоремы 1 и 2, следствия 1 и 2) могут быть использованы при моделирования реальных производственных процессов P, которые имеют известные предельной производительности капитала (труда).

Список использованных источников

1. Клейнер, Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение / Г.Б. Клейнер. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.
2. Khatskevich, G.A. Production functions with given elasticities of output and production / G.A. Khatskevich, A.F. Pranevich // Journal of Belarussian State University. Economics. – 2018. – No. 2. – P. 13 – 21.
3. Khatskevich, G.A. Analytical forms of productions functions with given total elasticity of production / G.A. Khatskevich, A.F. Pranevich, Yu.Yu. Karaleu // Advances in Intelligent Systems and Computing. – 2019. – Vol. 1052. – P. 276 – 285.
4. Интрилигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор. – М.: Прогресс, 1975. – 607 с.
5. Клейнер, Г.Б. Взаимосвязи между средней и предельной отдачей факторов производственной функции / Г.Б. Клейнер // Экономика и математические методы. – 1994. – Т. 30. – Вып. 1. – С. 102 – 118.

УДК 004:415.25:336.71

Д.С. Рокало, М.А. Садовникова, К.А. Забродская
Белорусский государственный экономический университет

ИНТЕРФЕЙСЫ ПРИКЛАДНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (API) КАК ЧАСТЬ ЦИФРОВОГО БАНКИНГА

Повышение доступа к банковским услугам и вовлеченности населения в их использование является одной из ключевых задач развития банковского сектора как в развивающихся, так и в развитых странах и возможно благодаря активному развитию цифровых технологий, поскольку позволяет решить проблему неравномерного доступа к банковскому обслуживанию разных категорий граждан.

Согласно исследованиям McKinsey [1], применение цифровых технологий в странах с развивающимися рынками помогает значительно уменьшить годовые расходы банков на обслуживание клиентов, в том числе расходы, связанные с: открытием и обслуживанием счетов – на 65–75%; выдачей наличных денег –на 40–60%; проведением банковских переводов– на 90–95%.

В банковской сфере Республики Беларусь цифровой банкинг представлен различными электронными платежными инструментами, средствами платежа и технологиями дистанционного банковского обслуживания, в том числе банковскими платежными картами, электронными