УДК 512.622

М. М. Чернявский, аспирант
(ВГУ имени П. М. Машерова, г. Витебск)

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОЛИНОМА ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ ЧЕРЕЗ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОЛИНОМА ШЕСТОЙ СТЕПЕНИ ПРИ НАЛИЧИИ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗИ МЕЖДУ КОРНЯМИ ДАННЫХ ПОЛИНОМОВ

В работе установлены необходимые и достаточные условия, связывающие коэффициенты полинома комплексного аргумента шестой степени вида (1)

$$P(z) = z^6 + c_1 z^5 + c_2 z^4 + c_3 z^3 + c_4 z^2 + c_5 z + c_6 \tag{5}$$

с коэффициентами полинома четвертой степени вида (2)

$$Q_4(z) = z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 \tag{6}$$

при наличии линейной связи между корнями этих полиномов.

Обозначим корни полинома (2) через p_1, p_2, p_3, p_4 и, кроме того, обозначим попарно их суммы

$$q_1 = p_1 + p_2, \quad q_2 = p_1 + p_3, \quad q_3 = p_1 + p_4,$$

$$q_4 = p_2 + p_3, \quad q_5 = p_2 + p_4, \quad q_6 = p_3 + p_4.$$

Теорема. *Числа* q_j ($j = 1, 2, \ldots, 6$) *являются корнями полинома* (1), *тогда и только тогда, когда разрешима относительно* a_k ($k = 1, 2, 3, 4$) *система уравнений*

$$c_1 = 3a_1, \tag{7}$$

$$3a_1^2 + 2a_2 - c_2 = 0, \tag{8}$$

$$a_1^3 + 4a_1 a_2 - c_3 = 0, \tag{9}$$

$$2a_1^2 a_2 + a_1 a_3 + a_2^2 - 4a_4 - c_4 = 0, \tag{10}$$

$$a_1\left(a_1 a_3 + a_2^2 - 4a_4\right) - c_5 = 0, \tag{11}$$

$$a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 - c_6 = 0. \tag{12}$$

В свою очередь, необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости системы уравнений (3)–(8) *относительно* a_k ($k = 1, 2, 3, 4$) *являются соотношения*

$$c_3 = \frac{2}{3}c_1c_2 - \frac{5}{27}c_1^3, \tag{13}$$

$$c_5 = \frac{1}{81}c_1^5 - \frac{1}{27}c_1^3c_2 + \frac{1}{3}c_1c_4. \tag{14}$$

При этом,

$$a_1 = \frac{c_1}{3}, \quad a_2 = -\frac{1}{6}c_1^2 + \frac{1}{2}c_2,$$

$$a_3 = -\frac{7}{216}c_1^3 + \frac{1}{12}c_1c_2, \quad a_4 = -\frac{13}{2592}c_1^4 - \frac{1}{144}c_1^2c_2 + \frac{1}{16}c_2^2 - \frac{1}{4}c_4.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть числа q_j ($j = 1, 2, \ldots, 6$) являются корнями полинома (1), тогда коэффициенты данного полинома будут иметь вид

$$c_1 = -3\left(p_1 + p_2 + p_3 + p_4\right);$$

$$c_2 = 3\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2\right) + 8\left(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4\right);$$

$$c_3 = -\left(p_1 + p_2 + p_3 + p_4\right)\Big(6\left(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4\right) +$$
$$+\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2\right)\Big);$$

$$c_4 = 30p_1p_2p_3p_4 + \Big[2\left(p_1^3p_2 + p_1^3p_3 + p_1^3p_4 + p_1p_2^3 + p_1p_3^3 + p_1p_4^3 + p_2^3p_3 +\right.$$
$$\left. + p_2^3p_4 + p_2p_3^3 + p_2p_4^3 + p_3^3p_4 + p_3p_4^3\right) + 13\left(p_1^2p_2p_3 + p_1^2p_2p_4 + p_1^2p_3p_4 +\right.$$
$$+ p_1p_2^2p_3 + p_1p_2^2p_4 + p_1p_2p_3^2 + p_1p_2p_4^2 + p_1p_3^2p_4 + p_1p_3p_4^2 + p_2^2p_3p_4 +$$
$$\left. + p_2p_3^2p_4 + p_2p_3p_4^2\right) + 5\left(p_1^2p_3^2 + p_1^2p_4^2 + p_2^2p_3^2 + p_1^2p_2^2 + p_2^2p_4^2 + p_3^2p_4^2\right)\Big];$$

$$c_5 = -\left(p_1 + p_2 + p_3 + p_4\right)\Big[\Big(6p_1p_2p_3p_4 + \left(p_1^2p_2^2 + p_1^2p_3^2 + p_1^2p_4^2 + p_2^2p_3^2 +\right.$$
$$\left. + p_2^2p_4^2 + p_3^2p_4^2\right) + 3\left(p_1^2p_2p_3 + p_1^2p_2p_4 + p_1^2p_3p_4 + p_1p_2^2p_3 + p_1p_2^2p_4 +\right.$$
$$\left. + p_1p_2p_3^2 + p_1p_2p_4^2 + p_1p_3^2p_4 + p_1p_3p_4^2 + p_2^2p_3p_4 + p_2p_3^2p_4 + p_2p_3p_4^2\right)\Big)\Big];$$

$$c_6 = \Big(p_1^3p_2^2p_3 + p_1^3p_2^2p_4 + p_1^3p_2p_3^2 + p_1^3p_2p_4^2 + p_1^3p_3^2p_4 + p_1^3p_3p_4^2 + p_1^2p_2^3p_3 +$$
$$+ p_1^2p_2p_3^3 + p_1^2p_2^3p_4 + p_1^2p_3p_4^3 + p_1^2p_2p_4^3 + p_1^2p_3^3p_4 + p_1p_2^3p_3^2 + p_1p_2^3p_4^2 +$$

$$+p_1p_2^2p_3^3+p_1p_2^2p_4^3+p_2^2p_3p_4^3+p_2p_3^3p_4^2+p_2p_3^2p_4^3+p_1p_3^3p_4^2+p_1p_3^2p_4^3+$$

$$+p_2^3p_3^2p_4+p_2^3p_3p_4^2+p_2^2p_3^3p_4\Big)+\Big[2\Big(p_1^2p_2^2p_3^2+p_1^2p_2^2p_4^2+p_1^2p_3^2p_4^2+$$

$$+p_2^2p_3^2p_4^2\Big)+2\Big(p_1p_2^3p_3p_4+p_1^3p_2p_3p_4+p_1p_2p_3^3p_4+p_1p_2p_3p_4^3\Big)+$$

$$+4\Big(p_1p_2^2p_3^2p_4+p_1p_2^2p_3p_4^2+p_1p_2p_3^2p_4^2+p_1^2p_2^2p_3p_4+p_1^2p_2p_3^2p_4+p_1^2p_2p_3p_4^2\Big)\Big].$$

Равенства (3), (4) и (5) получаются непосредственно из соотношений Виета для полинома четвертой степени.

Суммы, стоящие в круглых скобках в выражениях c_4, c_5, c_6, представляют собой симметричные полиномы от переменных p_i ($i = 1, 2, 3, 4$) и, согласно известной теореме ([1], с. 322) о возможности их представления через элементарные симметрические полиномы, могут быть выражены через коэффициенты полинома (2). Проделав соответствующие преобразования, получаем оставшиеся уравнения системы (6)–(8).

Осуществляя несложные преобразования над уравнениями системы (3)–(8), получаем уравнения (9) и (10) как критерии разрешимости рассматриваемой системы относительно a_k ($k = 1, 2, 3, 4$), а также однозначные выражения коэффициентов полинома (2) через коэффициенты полинома (1).

Достаточность. Пусть выполнены равенства (9) и (10) и коэффициенты уравнения (1) выражаются через a_k ($k = 1, 2, 3, 4$) в соответствии с системой (3)–(8). Полагая

$$a_1=-\left(p_1+p_2+p_3+p_4\right),\ a_2=p_1p_2+p_1p_3+p_1p_4+p_2p_3+p_2p_4+p_3p_4,$$

$$a_3=-\left(p_1p_2p_3+p_1p_2p_4+p_1p_3p_4+p_2p_3p_4\right),\ a_4=p_1p_2p_3p_4,$$

получаем, что коэффициенты полинома (1) выражаются следующим образом:

$$c_1=-\left(q_1+q_2+\ldots+q_6\right),\ c_2=q_1q_2+q_1q_3+\ldots+q_5q_6,\ \ldots\ c_6=q_1q_2q_3q_4q_5q_6,$$

т. е. в силу теоремы Виета числа q_1, q_2, …, q_6 являются его корнями.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры: учебник. 17-е изд., стер. / А. Г. Курош. – СПб.: Лань, 2008. - 432 с.