УДК 519.711

И. Н. Хайруллаев, к.ф.-м.н., доц.,
С. Н. Нишонов, ст. преподаватель
(ТерГУ г.Термез,Узбекистан)

# О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Расмотрим однородную систему линейных частично интегралных уравнений вида

$$\begin{cases} f_0+\lambda_1\int\limits_a^b a_1(t)f_1(t)dt=0 \\ f_0+f_1(x)+\lambda_2 a_2(x)\int\limits_a^b a_2(t)f_1(t)dt+\lambda_3 a_3(x)\int\limits_a^b a_3(t)f_2(x,t)dt=0 \\ f_1(x)+f_2(x,y)+\lambda_4 a_4(x)\int\limits_a^b a_4(t)f_2(t,y)dt+\lambda_5 a_5(y)\int\limits_a^b a_5(t)f_2(x,t)dt=0 \end{cases}, \quad (1)$$

где фунции $a_j(\cdot)$, $j=\overline{1,5}$ принадлежат пространству $L_2[a,b]f_0\in C^1$, $\lambda_i$, $i=\overline{1,5}$ - числовые параметры; $f_2(x,y)\in L_2\left([a,b]^2\right)f_1(x)\in L_2[a,b]$ - искомые функции.

В этой заметке изучена разрешимост однородной системы (1) при всех значениях параметров $\lambda_i, i=\overline{1,5}$ кроме случая $\lambda_i\neq 0$, $i=\overline{1,5}$.

Всюду в далнейшем интеграл понимается по отрезку $[a,b]$.

Основными результатами являются следующие.

Пусть детерминанты $D_1(\lambda_1)=1+\lambda_1\int\limits_a^b a_1^2(t)dt$ Фредгольма [1] ядра с $a_1(t)$.

***Теорема 1.*** Пусть $\lambda_1\neq 0$ ,$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=0$, тогда

а) если $D_1(\lambda_1)\neq 0$, то система (1) имеет только нулевое решение:

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(x) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

б) если $D_1(\lambda_1)=0$, то однородная система имеет решение

$$f_0=f_0, f_1(x)=f_2(x,y)=f_0,\quad f_0\in C^1, f_0\neq 0$$

$D_2(\lambda_2)=1+\lambda_2\int a_2^2(t)dt$ детерминант Фредгольма ядро $K(x,t)=a_2(x)a_2(t)$.

$$D_2(\lambda_2)=1+\lambda_2\int a_2^2(t)\,dt\,.$$

***Теорема 2.*** Пусть $\lambda_2\neq 0,\ \lambda_1=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=0$. Тогда:

а) если $D_2(\lambda_2)=0$, то одноодная система (1) имеет решение вида

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(x) \\ f_2(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ ca_2(x) \\ -ca_2(x)\end{pmatrix}.$$

б) если $D_1(\lambda_1)\neq 0$, то система имеет только нулевое решение.

Аналогичные результаты как в теореме (2) получено и в случаях:

1) $\lambda_3\neq 0,\ \ \lambda_i=0,\ i=1,\ 2,\ 4,\ 5;$

2) $\lambda_4\neq 0,\ \ \lambda_i=0,\ \ i=4;$

3) $\lambda_5\neq 0,\ \ \lambda_i=0,\ \ i=5.$

***Теорема 3.*** Пусть $\lambda_1\neq 0,\ \ \lambda_2\neq 0,\ \ \lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=0$ и тогда:

а) если $D_1(\lambda_1)\neq 0$, то

1) при $\int a_1(t)a_2(t)\,dt=0$ имеет решение вида $f_0=0,$ $f_1(x)==-\lambda_2ca_2(x),\ f_2(x,y)=\lambda_2ca_2(x)$, где $c$ – произвольная постоянная;

2) при $\int a_1(t)a_2(t)\,dt\neq 0$ однородная система (1) имеет решение вида

$$f_0=A(a_1,a_2),\ f_1(x)=-c_1-\lambda_2c_2a_2(x),\ \ f_2(x,y)=c_1+\lambda_2c_2a_2(x),$$

где $A(a_1,a_2)=\dfrac{c\lambda_1\lambda_2\int a_1(t)a_2(t)\,dt}{D_1(\lambda_1)}=c'.c_1,c_2,c'$ постоянные.

б) если $D_1(\lambda_1)=0$, то

1) при $\int a_1(t)a_2(t)\,dt=0$ система (1) имеет решение вида

$$f_0=c_1,\ f_1(x)=-c_1-\lambda_2c_2a_2(x),\ \ f_2(x,y)=c_1+\lambda_2c_2a_2(x),$$

где $c_1$, $c_2$ - константы;

2) при $\int a_1(t)a_2(t)\,dt\neq 0$ однородная система (1) имеет решение вида

$$f_0=c_2\,,f_1(x)=-c_2-ca_2(x),\ f_2(x,y)=c_2+ca_2(x),$$

где $c$ - постоянная.

Отметим, что в случаях, когда двое из параметров отличны от нуля, а остальные равны нулю, имеют аналогичные теоремы.

Теперь пусть $D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 1 - \int \left[ \sum_{k=1}^{3} \lambda_k a_k^2(t) \right] dt$

детерминант Фредгольма ядро $(x,t) = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k a_k(x) a_k(t)$.

***<u>Теорема 4.</u>*** Пусть $\lambda_1 \neq 0, \ \lambda_2 \neq 0, \ \lambda_3 \neq 0, \lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Тогда:

а) если $D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq 0$, то система (1) имеет решение вида

$$f_0 = \lambda \sum_{k=1}^{3} c_k \lambda_k^2 \int a_k^2(t) dt = c, f_1(x) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i c_i a_i(x), \ f_2(x,y) = -\sum_{i=1}^{3} \lambda_i c_i a_i(x);$$

б) если $D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$, то система (1) имеет только нулевое решение.

Аналогичные теоремы можно сформулировать и при остальных случаях, когда трое из параметров отличны от нуля и остальные равны нулю.

***<u>Теорема 5.</u>*** Пусть $\lambda_i \neq 0, \ i = \overline{1,4}, \lambda_5 = 0$ и $D_4(\lambda_4) = 1 + \lambda_4 \int a_4^2(t) dt \neq 0$. Тогда:

а) если $D(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3') = 1 + \sum_{j=1}^{3} \lambda_j^2 \int a_j^2(t) dt = 0$, то система (1) имеет решение вида

$$f_0 = c_2, f_1(x) = A_1(x), \ f_2(x,y) = B_1(x),$$

где

$$c = -\lambda_1 \sum_{i=1}^{3} \lambda_i' c_i \int a_i(t) a_i'(t) dt, \ A_1(x) = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j' \hat{a}_j(x) c_j,$$

$$B_1(x) = \frac{\lambda_4 a_4(x)}{D_4(\lambda_4)} \sum_{i=1}^{3} \lambda_i' c_i \int a_4(t) \hat{a}_i(t) dt;$$

б) если $D(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3') \neq 0$, то система (1) имеет только нулевое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов, В. И. Курс высшей математики / В. И. Смирнов - М.: Наука, 1974. - Т. 4, ч. 1.

2. Рид, М. Методы современной математической физики. 1 Функциональный анализ / М. Рид, Б. М. Саймон. - Мир. - 1977. - 357с.

3. Хайруллаев, И. Н. Спектр и резольвента гамильтониана одной системы с несохраняюшимся ограниченным числом частиц / И. Н. Хайруллаев // Узбекский математический журнал. 1999. №6. С.70-78.