УДК 599.375+539.4

Б.Ж. Сапаров, стажер исследователь;
О.А. Шералиева, ст. преп.;Э.Б.Холикулов, ст. преп.;
Ж.С. Тавбаев, доц., канд. физ.-мат. наук (ТКТИ, г. Узбекистан)

МОДЕЛЬ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РАЗРУШЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ

Цилиндрические конструкции природы и техники в связи с особенностями их работы часто разрушаются вследствие развития трещин вдоль образующих цилиндра. Когда длина таких трещин становится достаточно большой, распределение напряжений и деформаций, а также саму форму трещин можно считать неизмененной в системе координат, связанной с движущейся трещиной. Скорость трещины может быть также равной нулю – этот случай не исключается из рассмотрения [1-2].

Теорию разрушения таких объектов наиболее удобно строить при помощи инвариантных Г-интегралов. При этом, как это ни странно, особо важную роль в окончательных расчетах играет классическая плоская теория упругости в условиях плоской деформации. Рассмотрим следующий интеграл Γ по поверхности Σ:

$$\Gamma = \int_{\Sigma} \left[(W+T) n_x - \delta_{ij} u_{i,x} n_j \right] \cdot d\Sigma, \quad (i,j=1,2,3) \qquad (1)$$

Здесь W – работа деформации твердого тела, приходящаяся на единицу объема; T –кинематическая энергия в расчете на единицу объема; δ_{ij} – компоненты тензора напряжений; u_j – компоненты вектора перемещений; n_i – компоненты единичного вектора внешней нормали к поверхности Σ в данной точке; индексы i и j пробегают значения 1,2,3; $0x_1x_2x_3$ –прямоугольная декартова система координат, эквивалентная системе координат $0xyz$ с соответствием $x_1 \Leftrightarrow x$, $x_2 \Leftrightarrow y$, $x_3 \Leftrightarrow z$. В качестве нижних индексов компонент векторов и тензоров будет употреблять двоякое обозначение: цифрами и буквами с очевидным соответствием

$$1 \Leftrightarrow x,\ 2 \Leftrightarrow y,\ 3 \Leftrightarrow x$$

Цифровое обозначение более удобно в общих формулировках, так как оно приводит к более компактной записи формул для тензорных и векторных величин путем использования правил суммирования по «слепому» индексу и обозначения дифференцирования по координате посредством запятой в индексе, например, имеем:

$$u_{i,x} = \frac{\partial u_i}{\partial x}, \quad \text{где, } x = x_1; \quad n_x = n_1; \quad \tau_{ij} u_{i,x} n_j = (\tau_{i1} n_1 + \tau_{i2} n_2 + \tau_{i3} n_3) u_{i,x} =$$

$$= (\tau_{11} n_1 + \tau_{12} n_2 + \tau_{13} n_3) u_{1,x} + (\tau_{21} n_1 + \tau_{22} n_2 + \tau_{23} n_3) u_{2,x} + (\tau_{31} n_1 + \tau_{32} n_2 + \tau_{33} n_3) u_{3,x} =$$

$$=(\tau_x n_x+\tau_{xy} n_y+\tau_{xz} n_z)\frac{\partial u_1}{\partial x}+(\tau_{xy} n_x+\tau_y n_y+\tau_{yz} n_z)\frac{\partial u_2}{\partial x}+(\tau_{xz} n_x+\tau_{yz} n_y+\tau_z n_z)\frac{\partial u_3}{\partial x} \quad (2)$$

Однако буквенное обозначение тензорных величин более удобно в конкретных вычислениях при решении частных задач и извлечении конечных интегралов определенной краевой задачи [4]. Здесь и всюду в дальнейшем предполагается, что:

а) объемные силы, за исключением сил инерции, отсутствуют.

б) Деформации твердого тела ε_{ij} малы, т.е.

$$\varepsilon_{ij}=1/2(u_{i,j}+u_{j,i}); \text{ например, } \quad \varepsilon_x=u_{1,x}\equiv U_{x,x} \quad (3)$$

Кинетическая энергия единицы объема твердого тела равна

$$T=\frac{\rho}{2}\dot{u}_i\dot{u}_i=\frac{\rho}{2}\left(\dot{u}_x+\dot{u}_y+\dot{u}_z\right) \quad (4)$$

где $\dot{u}_i$ – скорость материальной точки; ρ – плотность тела.

Заметим, что перемещения u_1, u_2, u_3 в подвижной системе координат $0xyz$, связанной с резцом, не являются малыми

$$u_1=u_1^0-\upsilon t,\ u_2=u_2^0,\ u_3=u_3^0 \quad (5)$$

где u_1^0, u_2^0, u_3^0 – перемещения твердого тела в неподвижной системе координат $\xi\eta\zeta$, связанной с разрушаемым телом:

$$\xi=x+\upsilon t, \quad \eta=y, \quad \zeta=z \quad (6)$$

Здесь V – скорость движения системы $0xyz$ относительно системы $0\xi\eta\zeta$, т.е. скорость движения трещины относительно разрушаемого тела; t –время. Перемещения u_1^0, u_2^0, u_3^0 можно считать малыми по сравнению с характерным поперечным линейным размером цилиндра. (Заметим, что этот факт несущественен для дальнейшего).

Из сопоставления формул (5) и (6) вытекает следующая зависимость для любой функции $A=A(x,y,z,t)$.

$$\Big| A=\frac{dA}{dt}=\frac{d}{dt}A(x,y,z,t)=\frac{\partial A}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial t}=-V\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial t} \quad (7)$$

Процесс, описываемый некоторой функцией $A(x,y,z,t)$, называется стационарным в системе координат $0xyz$, если функция не зависит от времени, т. е.

$$\left(A(x,y,z,t)=A(x,y,z)u\,\frac{\partial A}{\partial t}=0\right) \quad (8)$$

Согласно формуле (7) для стационарного в системе $0xyz$ процесса полная (материальная) производная равна

$$\dot{A}=-V\frac{\partial A}{\partial t} \quad (9)$$

Работа деформаций твердого тела единице объема равна

$$W = \int_0^t \delta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dt\,, \qquad \dot{\varepsilon}_{ij} = 1/2\left(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}\right) \tag{10}$$

Здесь $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – тензор скорости деформаций, условное начало отсчета времени t=0 в каждой точке тела соответствует началу процесса деформирования в этой точке.

Согласно формулам (4), (7), (9) и (10) кинетическая энергия и работа деформаций твердого тела для стационарного в системе 0*xyz* процесса выражается следующими формулами:

$$T = \frac{\rho}{2}\left(V^2\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + 1\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2\right) \tag{11}$$

$$W = -\int_x^\infty \delta_{ij} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} dx \tag{12}$$

Процесс деформирования и разрушения твердого тела будем называть стационарным в системе 0*xyz*, связанной с трещиной если все напряжения, деформации (а также производные перемещений по координатам), и функции u_1^0, u_2^0, u_3^0 не зависят от времени, [3] т.е.

$$\delta_{ij}=\delta_{ij}(x,y,z); \quad \varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(x,y,z); \quad u_{ij}=u_{ij}(x,y,z); \quad u_i^0 = u_i^0\,(x,y,z) \tag{13}$$

Заметим, что согласно (5) и (7) для смещения $u_1(x,y,z,t)$ будет:

$$\frac{du_1}{dt} = -V \cdot \frac{du_1}{dx} - V \tag{14}$$

Сформулирована общая физическая и геометрическая модель установившегося разрушения твёрдых тел цилиндрической конфигурации, допускающая эффективную аналитическую теорию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мамасаидов М.Т., Эргашов М., Тавбаев Ж.С. Прочность гибких элементов и трубопроводов бурильных установок. Бишкек. Илим. 2001. 251 с.

2. Эргашов М., Тавбаев Ж.С.Прочность трубопроводов бурильных установок. Ташкент. Фан. 2002. 119 с.

3. Тавбаев Ж.С. О цилиндрических каналах в плотных слоях. Фергана. Научно-технический журнал. 2004 №3 с. 82.

4. Тавбаев.Ж.С., Усманов Х.У., Тавбаева Д.Ж. Приближенное аналитическое решение краевой задачи для упакованного слоя. Фергана. Научно-технический журнал. 2006. №4 с.5-6