$$J_{q+1} \equiv \left\langle \alpha^{(q)}(0)\left[\psi(0)+a_1\varphi'(0)\right]+\gamma^{(q)}(0)\varphi(0)\right\rangle +$$

$$+q\left\{\alpha^{(q-1)}(0)\left\langle a_2\left[\psi'(0)+a_1\varphi''(0)\right]+f(0,0)\right\rangle+\gamma^{(q-1)}(0)\psi(0)\right\}+$$

$$+\sum_{i=2}^{q-1}C_q^i\left\{\alpha^{(q-i)}(0)a_2^i\left[\psi^{(i)}(0)+a_1\varphi^{(i+1)}(0)\right]+\alpha(0)a_2^q\left[\psi^{(q)}(0)+a_1\varphi^{(q+1)}(0)\right]+\right.$$

$$+\gamma^{(q-i)}(0)\left\langle a_2\frac{a_2^{i-1}-(-a_1)^{i-1}}{a_1+a_2}\left[\psi^{(i-1)}(0)+a_1\varphi^{(i)}(0)\right]+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=0}^{i-2}\frac{a_2^{k+1}-(-a_1)^{k+1}}{a_1+a_2}f^{(k;i-k-2)}(0,0)+(-a_1)^{i-1}\psi^{(i-1)}(0)\right\rangle\right\}+$$

$$+\sum_{i=2}^{q-1}C_q^i\alpha^{(q-i)}(0)\sum_{j=0}^{i-1}a_2^jf^{(j;i-j-1)}(0,0)+$$

$$+\alpha(0)\frac{\partial}{\partial\vec{\nu}_2}\left(\sum_{j=0}^{(q-2)/2}a_2^{2j}f^{(2j;q-2j-2)}(x,t)\right)(0,0)=\mu^{(q)}(0),\ q=0,1,\ldots,m-1,$$

где $(\partial(\bullet)/\partial\vec{\nu}_2)(0,0)$ – значение производной по вектору $\vec{\nu}_2=\{a_2,1\}$ от указанной суммы частных производных порядка m-2 в начале координат. Формулы для решений совпадают с формулами для *m=2* [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломовцев Ф. Е. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2017. – № 3. – С. 38-52.
2. Ломовцев Ф. Е., Устилко Е. В. Критерий корректности смешанной задачи для общего уравнения колебаний полуограниченной струны с нестационарной характеристической первой косой производной в граничном условии // Веснік Віцебскага дзяржаунага універсітэта. – 2018. – № 4 (101). – С. 18-28.

УДК 336.781.5

М. В. Чайковский, канд. физ.-мат. наук, доц. (БГТУ, г. Минск)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ КАК ОДИН ИЗ ИНСТРУМЕНТОВ ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА

Финансовая математика охватывает определенный круг методов вычислений (алгебраические методы, методы математического анализа, теории вероятностей, математической статистики и др.), необходимость в которых возникает всякий раз, когда в условиях сделки или финансово-банковской операции оговариваются конкретные значения трех видов параметров: стоимостные характеристики (размеры платежей, долговых обязательств, кредитов и т.д.), временные данные (даты или сроки выплат, продолжительность льготных периодов или отсрочки платежей и т.п.), и такие специфические параметры, как процентные ставки (они могут быть заданы и в скрытой форме). Каждый из перечисленных параметров может быть представлен в различном виде, но все они равноправны в рамках одной операции или сделки. Пренебрежение любым из них может привести к нежелательным финансовым последствиям для одной из участвующих сторон. Между перечисленными параметрами объективно существуют функциональные зависимости. Изучение этих зависимостей и разработка на их основе методов решения финансовых задач определенного класса и являются предметом финансовой математики.

Простейший вид финансовой сделки – однократное представление в долг некоторой суммы $S(t_0)$ с условием, что через время T будет возвращена сумма $S(t_0+T)$. Рассмотрим, как соотносится между собой рост по простым и сложным процентам. Соответствующие коэффициенты наращения вычисляются по формулам

$$A_i^{сл}(T)=(1+i)^T,\ A_i^{пр}(T)=1+iT.$$

График функции $y_{пр}(T)=1+iT$ – это прямая с угловым коэффициентом $i>0$. Производная функции $y_{сл}(T)=(1+i)^T$ по переменной T равна

$$y'_{сл}(T)=(1+i)^T\ln(1+i)>0,$$

то есть это также возрастающая функция. Вторая производная

$$y''_{сл}(T)=(1+i)^T\ln^2(1+i)>0,$$

следовательно, график этой функции является вогнутым. Другими словами, это вогнутая возрастающая функция. По одному из определений графика вогнутой функции, отрезок, соединяющий две любые точки такой функции, целиком лежит в надграфике функции. Суммируя вышесказанное, имеем, что при любом i будут иметь место следующие соотношения

$$(1+i)^T<1+iT \text{ при } 0<T<1,$$

$$(1+i)^T>1+iT \text{ при } T>1.$$

Представляет интерес и то, каким образом будет изменяться коэффициент наращения при изменении процентной ставки i в случае фиксированного значения T. С математической точки зрения этот интерес сводится к исследованию поведения функций

$$y_{сл}(i) = (1+i)^T \text{ и } y_{пр}(i) = 1 + iT$$

при постоянном фиксированном значении $T \geq 0$.

Функция $y_{сл}(i) = (1+i)^T$ – это степенная функция переменной i, следовательно, ее производная

$$y'(i) = T(1+i)^{T-1} > 0$$

для всех значений аргумента $i > 0$. Откуда имеем, что это возрастающая функция на всей области определения. Чтобы определить характер роста функции, найдем ее вторую производную

$$y''(i) = T(T-1)(1+i)^{T-2}.$$

Знак второй производной зависит от того, какое значение T зафиксировано

$$y''(i) = \begin{cases} < 0, & \text{если } 0 < T < 1; \\ > 0, & \text{если } T > 1. \end{cases}$$

В случае $y''(i) > 0$ ($y''(i) < 0$) график функции вогнут (выпукл). По определению это означает, что всякая касательная к графику этой функции находится ниже (выше) этого графика. Касательная в начальный момент $i = 0$ к графику имеет угловой коэффициент равный T, то есть совпадает с угловым коэффициентом функции $y_{пр}(i) = 1 + iT$. При фиксированном сроке наращения $0 < T < 1$ коэффициент наращения по простым процентам в зависимости от i растет скорее, чем коэффициент наращения по сложным процентам. При $T > 1$ результат противоположный.

Проведенный выше анализ поведения коэффициентов наращения сводился к сравнению суммарных $(y(T), y(i))$ и предельных величин $(y'(T), y'(i))$. Используя аппарат дифференциального исчисления, имеет экономический смысл анализировать наряду с суммарными и предельными, также относительные величины. В экономике их роль выполняет понятие эластичности, которая характеризует относительные изменения $\Delta y / y$ функции при достаточно малых относительных изменениях аргумента $\Delta x / x$. С точки зрения экономиста, эластичность приближенно показывает, как изменится функция при изменении ее аргумента на 1%. Если эластичность равна 1, то функция имеет нейтральную эластичность. Если эластичность больше единицы, то функция считается эластичной, если меньше единицы – то неэластичной. Математически это описывается соотношением $E_x[y] = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y}$. Для простых процентов $E_T[y_{пр}(T)] = \frac{iT}{1+iT} = E_i[y_{пр}(i)]$ эластичность коэффициента наращения по простым процентам по периоду начисления T и процентной ставке i совпадают и меньше единицы. Вычислим далее эластичность введенных функций для случая начисления сложных процентов. Функция $y_{сл}(T)$ при фиксированной процентной ставке для сложных процентов i является показательной функцией, поэтому $E_T[y_{сл}(T)] = T\ln(1+i)$ и несложно убедиться, что $\lim_{T\to\infty} E_T[y_{сл}(T)] = \infty$. То есть при достаточно большом временном периоде T изменение аргумента на 1% приведет к значительно большим изменениям функции.

Проанализируем далее эластичность по i коэффициента наращения по сложным процентам. Так как $y_{сл}(i)$ является уже степенной функцией, имеем $E_i[y_{сл}(i)] = \frac{iT}{1+i}$. Сравним полученную функцию с $E_i[y_{пр}(i)]$. Так как числители анализируемых дробей совпадают, то большей из них является та, знаменатель которой меньше, но

$$(1+iT)-(1+i) = i(T-1) = \begin{cases} <0, & \text{если } \ 0<T<1; \\ >0, & \text{если } \quad T>1. \end{cases}.$$

Другими словами, при сроке накопления до года, более эластичными являются простые проценты, свыше года – сложные.

Полученные с помощью дифференциального исчисления функции одной переменной выводы совпадают с оными получаемыми экономистами, но затраченное время и наглядная доказательность не сопоставимы. Математически все выглядит более строго и кратко.