УДК 517.948

О. Н. Пыжкова, канд. физ.-мат. наук, доц. ;
(БГТУ, г. Минск)
С. В. Пономарева, канд. физ.-мат. наук, доц.
(БГУ, г. Минск)

ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Будем рассматривать аналог задачи Коши для дифференциального уравнения с дробной производной Римана–Лиувилля D^{α} порядка α, $0<\alpha<1$ на конечном отрезке $[0,T]$ действительной оси

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t)=f(t,x(t)), \\ \lim\limits_{t\to 0}t^{1-\alpha}x(t)=\xi, \end{cases}$$

где дробная производная Римана–Лиувилля определяется равенством (см.[1])

$$D^{\alpha}x(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)\int_0^t\frac{x(s)\,ds}{(t-s)^{\alpha}}.$$

Функцию $f(s,u)$ будем предполагать непрерывной по совокупности переменных на множестве $(0,T]\times(-\infty,\infty)$.

Вопрос о разрешимости аналога задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с дробными производными Римана–Лиувилля с подлинейной (выполнено условие подлинейности $|f(t,u)|\le\mu(t)+\nu(t)|u|$ $(0<t\le T,\ -\infty<u<\infty),)$ по функциональному аргументу правой частью рассматривался в [2], с неограниченной правой частью, но уже на ограниченном отрезке в [3] (в весовом пространстве $C_{1-\alpha}[0,T]$ определенных на отрезке $[0,T]$ и непрерывных на $(0,T]$ функций $x(t)$, для которых существует предел $x(*)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{x(t)}{t^{\alpha-1}}$ с нормой $\|x\|_{\alpha-1}=\sup\limits_{0<t\le T}t^{1-\alpha}|x(t)|$). В указанных работах приводятся условия разрешимости рассматриваемой задачи в данных функциональных пространствах, а также условия существования единственного решения.

С помощью обобщения леммы Гронуолла-Беллмана попытаемся получить двусторонние оценки решений задачи Коши. Для этого ограничим класс рассматриваемых функций только положительными весовыми функциями.

Теорема. *Пусть положительная функция* $x(t)$ *из пространства* $C_{1-\alpha}[0,T]$ *удовлетворяет неравенству* $x(t)\le x(\tau)+\int_{\tau}^{t} f(s)x(s)|ds|$, *где* $f(t)\in C(0,T]$, $f(t)\ge 0$ *при* $0<t<T$, $t,\tau\in(0,T)$. *Тогда при* $0<t_0\le t<T$ *справедлива двусторонняя оценка*

$$x(t_0)\exp\left\{-\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds\right\}\le x(t)\le x(t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds\right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения // Минск : Наука и техника. – 1987. – 688 с.
2. Забрейко П. П., Пономарева С. В. О разрешимости задачи Коши для уравнений с дробными производными Римана-Лиувилля // Доклады НАН Беларуси, 62 (2018). – №4. – С. 391-397.
3. Забрейко П. П., Пономарева С. В. О решении задачи Коши с неограниченной правой частью для уравнений дробного порядка // Доклады НАН Беларуси, (2020, в печати).

УДК 517.984

О. А. Архипенко, ассист. (БГТУ, г. Минск)

О СПЕКТРАХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе рассматриваются в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ разностные уравнения вида

$$a(x)u(x+1)-\lambda u(x)=f(x),\ x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

где a – заданная функция, для которой существуют

$$\lim_{k\to\pm\infty} a(k)=a(\pm\infty). \tag{2}$$

При выполнении условия

$$|a(-\infty)|<|\lambda|<|a(+\infty)| \tag{3}$$

однородное уравнение имеет бесконечномерное пространство решений, поэтому для получения единственности решения к уравнению нужно присоединить краевое условие, а именно, задать