(отыскания чисел Q_1, Q_2, функций $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot)$), при которых замкнутая система является устойчивой в том или ином смысле – асимптотически устойчивой, если не оговорено иное.

Можно показать, что верны следующие необходимые условия стабилизируемости.

Теорема 1. Если система является стабилизируемой в шкале (4) (или (5)), то

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12}e^{-\lambda h} & b_1 \\ -a_{21} & 1 - a_{22}e^{-\lambda h} & b_2 \end{bmatrix} = 2, \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Теорема 2. Если система является стабилизируемой в шкале (4) (или (5)), то

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda - a_{22} & b_2 \end{bmatrix} = 1, \forall\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1.$$

Показано, что необходимые условия стабилизации с помощью регулятора с интегральными составляющими типа свертки являются одновременно и достаточными. Получены также условия стабилизации системы простейшим регулятором.

Приводится пример системы, для которой не существует простейшего регулятора, позволяющего ее стабилизировать, но находится регулятор с интегральными элементами, решающий эту задачу.

Результаты могут быть применены при синтезе управляющих воздействий в реальных системах управления, описывающихся дифференциально-разностными системами.

УДК 517.966

В. В. Игнатенко, канд. физ.-мат. наук, доц. (БГТУ, г. Минск);
В. В. Крахотко, канд. физ.-мат. наук, доц.;
Г. П. Размыслович, канд. физ.-мат. наук, доц. (БГУ, г. Минск)

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ H–УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЕСКРИПТОРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим систему управления

$$A_0\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ t \geq 0, \tag{1}$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где $x \in R^n$, $u \in R^r$, A_0, A, B – постоянные матрицы соответствующих размеров, $x_0 \in R^r$, $\det A_0 = 0$. Управление $u(t), t \geq 0$, достаточно гладкая r-мерная вектор-функция.

Пусть H – постоянная $n \times n$ матрица.

Определение 1. Система (1) называется H-управляемой, если для каждого $x_0(\cdot)\in\Omega_0$ существует момент времени $t_1<+\infty$ и гладкое управление $u(t), t\in[0,t_1]$ такое, что $x(0)=x_0$ и $Hx(t_1)=0$.

Определение 2. Система (1) называется полностью H-управляемой, если для каждого $x_0(\cdot)\in\Omega_0$ существует момент времени $t_1<+\infty$ и гладкое управление $u(t), t\geq 0,\ t_1<+\infty$ и гладкое управление $u(t), t\geq 0$ такие, что решение $x(t), t\geq 0,$ системы (1) обладает свойством $x(0)=x_0$ и $Hx(t)\equiv 0, t\geq t_1$.

Можно показать, что траектории дескрипторных систем являются решениями специально сконструированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых известны критерии управляемости.

Пусть система (1) удовлетворяет условию совместности [1]. Тогда ее решение может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A_0^d At}A_0A_0^dq+\int_0^t e^{A_0^dA(t-s)}A_0^dBu(s)\,ds+ \\ &+\left(E_n-A_0A_0^d\right)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\left(A_0A^d\right)^iA^dBu^{(i)}(t), \end{aligned} \tag{2}$$

$$x(0)=x_0=A_0A_0^dq+\left(E_n-A_0A_0^d\right)\times\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\left(A_0A^d\right)^iA^dBu^{(i)}(0), \tag{3}$$

где A_0^d и A^d обратные матрицы Драйзина [1] к матрицам A_0 и A соответственно, число k – индекс матрицы A_0, $q\in R^n$, $u^{(i)}(0)\in R^r, i=0,1,...,k-1$.

В этом случае можно показать, что решение (2) системы (1) является выходом системы

$$\dot{Y}=\hat{A}Y+\hat{B}v,\ x=CY \tag{4}$$

с начальным условием

$$Y(0)=Y_0=\left(q,u^i(0),i=1,2....,k\right),$$

где

$$Y=\left(y,u^1,...,u^k\right),\ v=u^{(k)},$$

$$\hat{A}=\left(\hat{A}_{pq}\right),\ \hat{B}=\left(\hat{B}_{p1}\right),\ p=\overline{1,k+1},\ q=\overline{1,k+1}$$

представляют собой блочные-матрицы, кроме того

$$\hat{A}_{11} = A_0^d A,\ \hat{A}_{12} = A_0^d B;\ \hat{A}_{23} = \hat{A}_{34} = ... = \hat{A}_{k\,k+1} = E_r,\ \hat{A}_{i\,j} = 0,$$

для всех остальных индексов p и q $\hat{B}_{k+1,\,1} = E^r$, $\hat{B} = 0, i = \overline{1,k}$ и

$$C = \left[A_0 A_0^d, \left(E_n - A_0 A_0^d\right) A^d B, ..., (-1)^{k-1} \left(E_n - A_0 A_0^d\right)\left(A_0 A^d\right)^{k-1} A^d B \right].$$

Мы полагаем, что

$$\Omega_0 = \Big\{ z \in R^n \Big| z = A_0 A_0^d q + \left(E_n - A_0 A_0^d\right) \times$$
$$\times \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \left(A_0 A^d\right)^i A^d B u^{(i)}(0),\ q \in R^n, u^{(i)}(0) \in R^r, i = \overline{0, k-1} \Big\}.$$

Для системы (1) запишем *определяющие уравнения* [2,3]

$$Y_{t+1} = A_0^d A Y_t + A_0^d B U_t^1,\ U_{t+1}^i = U_t^{t+1},\ j = \overline{0, k-1};$$
$$U_{t+1}^k = U_{t+k},\ X_t = C\left[Y_t, U_t^1, ..., U_t^k\right], t \ge 0, \quad (6)$$

при условии, что

$$Y_t \equiv 0, t = 0, ..., k-1,\ U_t \equiv 0,\ t \ne k;\ U_k = E_r.$$

Через X_t^* мы обозначим решение определяющих уравнений (6) с $Y_1 = E_n$ и $U_t \equiv 0, t \ge 0$.

Тогда справедливы теоремы.

Теорема 1. Система (1) является H-управляемой тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}\left(HX_1^*, HX_i, i = \overline{1, n+k}\right) = \operatorname{rank}\left(HX_i, i = \overline{1, n+k}\right)$.

Теорема 2. Система (1) полностью H-управляема тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}\left(L, \bar{H}X_i, i = \overline{1, n+k}\right) = \operatorname{rank}\left(L\bar{H}\right)$,

где

$$L = \begin{bmatrix} HX_k & ... & HX_1 \\ ... & ... & ... \\ HX_{n+2k-1} & ... & HX_{n+k} \end{bmatrix},$$

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} HX_1^* \\ ... \\ HX_{n+k}^* \end{bmatrix}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Campbell S. L. Applications of the Drazin inverse to Linear systems of Differential equations with Singular constant Coefficients. // SIAM J. Appl. Math. – V.31, № 3. – 1976. – P. 411-425.