УДК 517.977

А. А. Якименко
Белорусский государственный технологический университет

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ МОДАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМОЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В публикации получено необходимое условие модальной управляемости четырехмерной стационарной динамической системой с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним запаздыванием для одного класса регуляторов по типу обратной связи. Дано определение задачи модального управления для исследуемой системы. Изучен специальный класс регуляторов по типу обратной связи, с помощью которых может быть решена задача модального управления. Эти регуляторы могут содержать как дифференциально-разностную, так и интегральную части. Показано, что в случае разрешимости задачи модального управления для рассматриваемой системы один из важнейших параметров интегральной части таких регуляторов может быть найден из решения специально подобранного алгебраического уравнения.

Ключевые слова: системы нейтрального типа, модальное управление, дифференциально-разностные регуляторы, обратная связь, запаздывание.

A. A. Yakimenka
Belarusian State Technological University

NECESSARY CONDITION OF MODAL CONTROLLABILITY FOR FOUR-DIMENSIONAL NEUTRAL TYPE SYSTEM

The publication obtained a new necessary condition for modal controllability of a four-dimensional stationary dynamic system with a delayed argument of a neutral type with one delay for one class of feedback regulators. The definition of the modal control problem for the system under study is given. A special class of feedback regulators is considered, with the help of which the modal control problem can be solved. These regulators can contain both differential-difference and integral parts. It is shown that in the case of solvability of the modal control problem for the system under consideration, one of the most important parameters of the integral part of such regulators can be found from the solution of one algebraic equation.

Key words: neutral type systems, modal control, differential-difference regulators, feedback control, delay.

Введение. Задача модального управления является одной из основных задач теории управления. Такая задача хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом нейтрального типа [1–10] решение задачи модального управления значительно сложнее. Это обусловлено тем, что пространство состояний таких систем, как правило, бесконечномерно. Задача модального управления требует нахождения регуляторов, ее решающих.

Такие регуляторы можно искать в различных классах. В статье предложены регуляторы, реализация которых достаточна проста. Показано, что если задача модального управления разрешима, то вид этих регуляторов зависит от решения алгебраического уравнения, построенного с помощью коэффициентов рассматриваемой системы.

Основная часть. Рассмотрим четырехмерную линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{113} & a_{114} \\ a_{121} & a_{122} & a_{123} & a_{124} \\ a_{131} & a_{132} & a_{133} & a_{134} \\ a_{141} & a_{142} & a_{143} & a_{144} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} a_{211} & a_{212} & a_{213} & a_{214} \\ a_{221} & a_{222} & a_{223} & a_{224} \\ a_{231} & a_{232} & a_{233} & a_{234} \\ a_{241} & a_{242} & a_{243} & a_{244} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \\ x_3(t-h) \\ x_4(t-h) \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} a_{311} & a_{312} & a_{313} & a_{314} \\ a_{321} & a_{322} & a_{323} & a_{324} \\ a_{331} & a_{332} & a_{333} & a_{334} \\ a_{341} & a_{342} & a_{343} & a_{344} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t-h) \\ \dot{x}_2(t-h) \\ \dot{x}_3(t-h) \\ \dot{x}_4(t-h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (1)$$

где $h > 0$ – постоянное запаздывание.

Характеристический квазиполином системы (1) имеет вид

$$\sum_{i=0}^{4} \sum_{j=0}^{4} \alpha_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h}, \quad (2)$$

где $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ – числа, зависящие от коэффициентов системы (1), $\alpha_{40} = 1$. Задача модального управления состоит в том, чтобы для любых наперед заданных чисел β_{ij}, $i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3, 4$, $\beta_{30} = 1$ найти такой линейный регулятор, при котором система (1), замкнутая этим регулятором, имеет характеристический квазиполином

$$\sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{4}\beta_{ij}\lambda^{i}e^{-j\lambda h}. \qquad (3)$$

Регулятор будем искать в форме

$$u(t) = q_{00}'x(t) + \sum_{i=0}^{L}\sum_{j=1}^{N}q_{ij}'x^{(i)}(t - jh) + \\ + \int_{-h}^{0} q'(s)x(t+s)ds, \qquad (4)$$

где $q_{ij} \in \mathbb{R}^4$, штрих $(\cdot)'$ означает транспонирование, $L, N \in \mathbb{N}$,

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) & x_4(t) \end{bmatrix}',$$
$$x^{(i)}(\cdot) \equiv \frac{d^i x(\cdot)}{dt^i}, \ x^{(0)}(\cdot) \equiv x(\cdot).$$

В частотной области регулятор (4) примет вид

$$U(\lambda) = q_{00}' + \sum_{i=0}^{L}\sum_{j=1}^{M}q_{ij}'\lambda^{i}e^{-j\lambda h} + G'(\lambda). \qquad (5)$$

Если ядро интегральной части регулятора $G'(\lambda) \equiv 0$, то регулятор (5) примет наиболее простой дифференциально-разностный вид. Однако задача модального управления при этом решается лишь в исключительных случаях. Пусть теперь $G'(\lambda) \not\equiv 0$ и имеет вид

$$G'(\lambda) = [g_1 \quad g_2 \quad g_3 \quad g_4],$$

где

$$g_i = \sum_{j=1}^{S}\beta_{ij}\frac{\alpha_j\left(\lambda, e^{-\lambda h}\right)}{(\lambda - \xi)^j}, \qquad (6)$$

$i = \overline{1, 4}$, $\xi \in \mathbb{C}$; $\alpha_j\left(\lambda, e^{-\lambda h}\right)$, $j = \overline{1, S}$ выбираются так, чтобы функции $\dfrac{\alpha_j\left(\lambda, e^{-\lambda h}\right)}{(\lambda-\xi)^j}$ были целыми и удовлетворяли условиям теоремы Винера – Пэли, например, $\alpha_1\left(\lambda, e^{-\lambda h}\right) = e^{-\xi h} - e^{-\lambda h}$. Пусть $S = 1$. Тогда характеристический квазиполином замкнутой этим регулятором системы (1) имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11}(\cdot)-\lambda & a_{12}(\cdot) & a_{13}(\cdot) & a_{14}(\cdot) \\ a_{21}(\cdot) & a_{22}(\cdot)-\lambda & a_{23}(\cdot) & a_{24}(\cdot) \\ a_{31}(\cdot) & a_{32}(\cdot) & a_{33}(\cdot)-\lambda & a_{34}(\cdot) \\ \tilde{a}_{41}(\cdot)+\beta_1(\cdot) & \tilde{a}_{42}(\cdot)+\beta_2(\cdot) & \tilde{a}_{43}(\cdot)+\beta_3(\cdot) & \tilde{a}_{44}(\cdot)-\lambda+\beta_4(\cdot) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}(\cdot)-\lambda & a_{12}(\cdot) & a_{13}(\cdot) & a_{14}(\cdot) \\ a_{21}(\cdot) & a_{22}(\cdot)-\lambda & a_{23}(\cdot) & a_{24}(\cdot) \\ a_{31}(\cdot) & a_{32}(\cdot) & a_{33}(\cdot)-\lambda & a_{34}(\cdot) \\ \tilde{a}_{41}(\cdot) & \tilde{a}_{42}(\cdot) & \tilde{a}_{43}(\cdot) & \tilde{a}_{44}(\cdot)-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}(\cdot)-\lambda & a_{12}(\cdot) & a_{13}(\cdot) & a_{14}(\cdot) \\ a_{21}(\cdot) & a_{22}(\cdot)-\lambda & a_{23}(\cdot) & a_{24}(\cdot) \\ a_{31}(\cdot) & a_{32}(\cdot) & a_{33}(\cdot)-\lambda & a_{34}(\cdot) \\ \beta_1(\cdot) & \beta_2(\cdot) & \beta_3(\cdot) & \beta_4(\cdot) \end{vmatrix}, \qquad (7)$$

где $a_{ij}(\cdot) = a_{1ij} + a_{2ij}e^{-\lambda h} + a_{3ij}\lambda e^{-\lambda h}$, $i = \overline{1, 3}$, $j = \overline{1, 4}$, $\tilde{a}_{4j} = q_j\left(\lambda, e^{-\lambda h}\right) + a_{14j} + a_{24j}e^{-\lambda h} + a_{34j}\lambda e^{-\lambda h}$, a_{ijk}, $i = \overline{1, 3}$, $j = \overline{1, 4}$, $k = \overline{1, 4}$ определены в (1), $q_j\left(\lambda, e^{-\lambda h}\right)$ – квазиполиномы, определяемые дифференциально-разностной частью регулятора (5), $\beta_j(\cdot) = \beta_{j1}\dfrac{\alpha_1\left(\lambda, e^{-\lambda h}\right)}{(\lambda - \xi)}$, $j = \overline{1, 4}$; β_{j1} определены в (6).

Второе слагаемое в правой части (7) перепишем в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11}(\cdot)-\lambda & a_{12}(\cdot) & a_{13}(\cdot) & a_{14}(\cdot) \\ a_{21}(\cdot) & a_{22}(\cdot)-\lambda & a_{23}(\cdot) & a_{24}(\cdot) \\ a_{31}(\cdot) & a_{32}(\cdot) & a_{33}(\cdot)-\lambda & a_{34}(\cdot) \\ \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} & \beta_{41} \end{vmatrix} \frac{e^{-\xi h} - e^{-\lambda h}}{\lambda - \xi}. \qquad (8)$$

Обозначим $m = e^{-\lambda h}$. Представим элементы матрицы, определитель которой записан в (8) в следующем виде:

$$a_{ij}(\cdot) = a_{1ij} + a_{2ij}m + a_{3ij}\lambda m =$$
$$= a_{1ij} + a_{2ij}m + a_{3ij}\xi m + a_{3ij}(\lambda - \xi)m, \ i \neq j,$$
$$a_{ii}(\cdot) = a_{1ii} + a_{2ii}m + a_{3ii}\lambda m - \lambda =$$
$$= a_{1ii} + a_{2ii}m + a_{3ii}\xi m - \xi + a_{3ii}(\lambda - \xi)m - (\lambda - \xi),$$
$$i = \overline{1, 3}, \ j = \overline{1, 4}.$$

Тогда, выделяя слагаемые, которые содержат множители $(\lambda - \xi)$ и используя следующее свойство определителей: определитель, в каждом элементе строки которого есть сумма двух слагаемых, равен сумме двух определителей, (8) перепишется в виде

$$
c\left(\lambda, e^{-\lambda h}, \xi\right)+\frac{e^{-\xi h}-e^{-\lambda h}}{\lambda-\xi}\times
$$

$$
\times\left(\begin{vmatrix} a_{111}-\xi & a_{112} & a_{113} & a_{114} \\ a_{121} & a_{122}-\xi & a_{123} & a_{124} \\ a_{131} & a_{132} & a_{133}-\xi & a_{134} \\ \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} & \beta_{41} \end{vmatrix}+\right.
$$

$$
+m\left(\begin{vmatrix} a_{111}-\xi & a_{112} & a_{113} & a_{114} \\ a_{121} & a_{122}-\xi & a_{123} & a_{124} \\ a_{231}+a_{331}\xi & a_{232}+a_{332}\xi & a_{233}+a_{333}\xi & a_{234}+a_{334}\xi \\ \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} & \beta_{41} \end{vmatrix}+\right.
$$

$$
+\begin{vmatrix} a_{111}-\xi & a_{112} & a_{113} & a_{114} \\ a_{221}+a_{321}\xi & a_{222}+a_{322}\xi & a_{223}+a_{323}\xi & a_{224}+a_{324}\xi \\ a_{131} & a_{132} & a_{133}-\xi & a_{134} \\ \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} & \beta_{41} \end{vmatrix}+
$$

$$
\left.+\begin{vmatrix} a_{211}+a_{311}\xi & a_{212}+a_{312}\xi & a_{213}+a_{313}\xi & a_{214}+a_{314}\xi \\ a_{121} & a_{122}-\xi & a_{123} & a_{124} \\ a_{131} & a_{132} & a_{133}-\xi & a_{134} \\ \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} & \beta_{41} \end{vmatrix}\right)+
$$

$$
+m^2\left(\begin{vmatrix} a_{111}-\xi & a_{112} & a_{113} & a_{114} \\ a_{221}+a_{321}\xi & a_{222}+a_{322}\xi & a_{223}+a_{323}\xi & a_{224}+a_{324}\xi \\ a_{231}+a_{331}\xi & a_{232}+a_{332}\xi & a_{233}+a_{333}\xi & a_{234}+a_{334}\xi \\ \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} & \beta_{41} \end{vmatrix}+\right.
$$

$$
+\begin{vmatrix} a_{211}+a_{311}\xi & a_{212}+a_{312}\xi & a_{213}+a_{313}\xi & a_{214}+a_{314}\xi \\ a_{121} & a_{122}-\xi & a_{123} & a_{124} \\ a_{231}+a_{331}\xi & a_{232}+a_{332}\xi & a_{233}+a_{333}\xi & a_{234}+a_{334}\xi \\ \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} & \beta_{41} \end{vmatrix}+
$$

$$
\left.+\begin{vmatrix} a_{211}+a_{311}\xi & a_{212}+a_{312}\xi & a_{213}+a_{313}\xi & a_{214}+a_{314}\xi \\ a_{221}+a_{321}\xi & a_{222}+a_{322}\xi & a_{223}+a_{323}\xi & a_{224}+a_{324}\xi \\ a_{131} & a_{132} & a_{133}-\xi & a_{134} \\ \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} & \beta_{41} \end{vmatrix}\right)+
$$

$$
\left.+m^3\begin{vmatrix} a_{211}+a_{311}\xi & a_{212}+a_{312}\xi & a_{213}+a_{313}\xi & a_{214}+a_{314}\xi \\ a_{221}+a_{321}\xi & a_{222}+a_{322}\xi & a_{223}+a_{323}\xi & a_{224}+a_{324}\xi \\ a_{231}+a_{331}\xi & a_{232}+a_{332}\xi & a_{233}+a_{333}\xi & a_{234}+a_{334}\xi \\ \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} & \beta_{41} \end{vmatrix}\right), \quad (9)
$$

где $c\left(\lambda, e^{-\lambda h}, \xi\right)$ – некоторый квазиполином, однозначно определяемый соотношением (8).

Из того, что характеристический квазиполином (3) замкнутой системы не содержит слагаемые, умножаемые на функцию $\dfrac{e^{-\xi h}-e^{-\lambda h}}{\lambda-\xi}$, следует, что второе слагаемое в (9) должно быть тождественно равно нулю. Для этого нужно, чтобы многочлен относительно m в скобках правой части (9) был бы нулевым. Так как из условия $G'(\lambda)\not\equiv 0$ вытекает, что $\beta_{11}^2+\beta_{21}^2+\beta_{31}^2+\beta_{41}^2\neq 0$, то отсюда с учетом (9) следует, что система линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \gamma_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \beta_{31} \\ \beta_{41} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (10)
$$

где

$$
\gamma_{11}=\begin{vmatrix} a_{112} & a_{113} & a_{114} \\ a_{122}-\xi & a_{123} & a_{124} \\ a_{132} & a_{133}-\xi & a_{134} \end{vmatrix},
$$

$$
\gamma_{12}=\begin{vmatrix} a_{111}-\xi & a_{113} & a_{114} \\ a_{121} & a_{123} & a_{124} \\ a_{131} & a_{133}-\xi & a_{134} \end{vmatrix},
$$

$$
\gamma_{13}=\begin{vmatrix} a_{111}-\xi & a_{112} & a_{114} \\ a_{121} & a_{122}-\xi & a_{124} \\ a_{131} & a_{132} & a_{134} \end{vmatrix},
$$

$$
\gamma_{14}=\begin{vmatrix} a_{111}-\xi & a_{112} & a_{113} \\ a_{121} & a_{122}-\xi & a_{123} \\ a_{131} & a_{132} & a_{133}-\xi \end{vmatrix},
$$

$$
\gamma_{21}=\begin{vmatrix} a_{112} & a_{113} & a_{114} \\ a_{122}-\xi & a_{123} & a_{124} \\ a_{232}+a_{332}\xi & a_{233}+a_{333}\xi & a_{234}+a_{334}\xi \end{vmatrix}+
$$

$$
+\begin{vmatrix} a_{112} & a_{113} & a_{114} \\ a_{222}+a_{322}\xi & a_{223}+a_{323}\xi & a_{224}+a_{324}\xi \\ a_{132} & a_{133}-\xi & a_{134} \end{vmatrix}+
$$

$$
+\begin{vmatrix} a_{212}+a_{312}\xi & a_{213}+a_{313}\xi & a_{214}+a_{314}\xi \\ a_{122}-\xi & a_{123} & a_{124} \\ a_{132} & a_{133}-\xi & a_{134} \end{vmatrix},
$$

$$
\gamma_{22}=\begin{vmatrix} a_{111}-\xi & a_{113} & a_{114} \\ a_{121} & a_{123} & a_{124} \\ a_{231}+a_{331}\xi & a_{233}+a_{333}\xi & a_{234}+a_{334}\xi \end{vmatrix}+
$$

$$+\begin{vmatrix} a_{111}-\xi & a_{113} & a_{114} \\ a_{221}+a_{321}\xi & a_{223}+a_{323}\xi & a_{224}+a_{324}\xi \\ a_{131} & a_{133}-\xi & a_{134} \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{211}+a_{311}\xi & a_{213}+a_{313}\xi & a_{214}+a_{314}\xi \\ a_{121} & a_{123} & a_{124} \\ a_{131} & a_{133}-\xi & a_{134} \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{23}=\begin{vmatrix} a_{111}-\xi & a_{112} & a_{114} \\ a_{121} & a_{122}-\xi & a_{124} \\ a_{231}+a_{331}\xi & a_{232}+a_{332}\xi & a_{234}+a_{334}\xi \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{111}-\xi & a_{112} & a_{114} \\ a_{221}+a_{321}\xi & a_{222}+a_{322}\xi & a_{224}+a_{324}\xi \\ a_{131} & a_{132} & a_{134} \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{211}+a_{311}\xi & a_{212}+a_{312}\xi & a_{214}+a_{314}\xi \\ a_{121} & a_{122}-\xi & a_{124} \\ a_{131} & a_{132} & a_{134} \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{24}=\begin{vmatrix} a_{111}-\xi & a_{112} & a_{113} \\ a_{121} & a_{122}-\xi & a_{123} \\ a_{231}+a_{331}\xi & a_{232}+a_{332}\xi & a_{233}+a_{333}\xi \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{111}-\xi & a_{112} & a_{113} \\ a_{221}+a_{321}\xi & a_{222}+a_{322}\xi & a_{223}+a_{323}\xi \\ a_{131} & a_{132} & a_{133}-\xi \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{211}+a_{311}\xi & a_{212}+a_{312}\xi & a_{213}+a_{313}\xi \\ a_{121} & a_{122}-\xi & a_{123} \\ a_{131} & a_{132} & a_{133}-\xi \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{31}=\begin{vmatrix} a_{112} & a_{113} & a_{114} \\ a_{222}+a_{322}\xi & a_{223}+a_{323}\xi & a_{224}+a_{324}\xi \\ a_{232}+a_{332}\xi & a_{233}+a_{333}\xi & a_{234}+a_{334}\xi \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{212}+a_{312}\xi & a_{213}+a_{313}\xi & a_{214}+a_{314}\xi \\ a_{122}-\xi & a_{123} & a_{124} \\ a_{232}+a_{332}\xi & a_{233}+a_{333}\xi & a_{234}+a_{334}\xi \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{212}+a_{312}\xi & a_{213}+a_{313}\xi & a_{214}+a_{314}\xi \\ a_{222}+a_{322}\xi & a_{223}+a_{323}\xi & a_{223}+a_{323}\xi \\ a_{132} & a_{133}-\xi & a_{134} \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{32}=\begin{vmatrix} a_{111}-\xi & a_{113} & a_{114} \\ a_{221}+a_{321}\xi & a_{223}+a_{323}\xi & a_{224}+a_{324}\xi \\ a_{231}+a_{331}\xi & a_{233}+a_{333}\xi & a_{234}+a_{334}\xi \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{211}+a_{311}\xi & a_{213}+a_{313}\xi & a_{214}+a_{314}\xi \\ a_{121} & a_{123} & a_{124} \\ a_{231}+a_{331}\xi & a_{233}+a_{333}\xi & a_{234}+a_{334}\xi \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{211}+a_{311}\xi & a_{213}+a_{313}\xi & a_{214}+a_{314}\xi \\ a_{221}+a_{321}\xi & a_{223}+a_{323}\xi & a_{224}+a_{324}\xi \\ a_{131} & a_{133}-\xi & a_{134} \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{33}=\begin{vmatrix} a_{111}-\xi & a_{112} & a_{114} \\ a_{221}+a_{321}\xi & a_{222}+a_{322}\xi & a_{224}+a_{324}\xi \\ a_{231}+a_{331}\xi & a_{232}+a_{332}\xi & a_{234}+a_{334}\xi \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{211}+a_{311}\xi & a_{212}+a_{312}\xi & a_{214}+a_{314}\xi \\ a_{121} & a_{122}-\xi & a_{124} \\ a_{231}+a_{331}\xi & a_{232}+a_{332}\xi & a_{234}+a_{334}\xi \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{211}+a_{311}\xi & a_{212}+a_{312}\xi & a_{214}+a_{314}\xi \\ a_{221}+a_{321}\xi & a_{222}+a_{322}\xi & a_{224}+a_{324}\xi \\ a_{131} & a_{132} & a_{134} \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{34}=\begin{vmatrix} a_{111}-\xi & a_{112} & a_{113} \\ a_{221}+a_{321}\xi & a_{222}+a_{322}\xi & a_{223}+a_{323}\xi \\ a_{231}+a_{331}\xi & a_{232}+a_{332}\xi & a_{233}+a_{333}\xi \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{211}+a_{311}\xi & a_{212}+a_{312}\xi & a_{213}+a_{313}\xi \\ a_{121} & a_{122}-\xi & a_{123} \\ a_{231}+a_{331}\xi & a_{232}+a_{332}\xi & a_{233}+a_{333}\xi \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{211}+a_{311}\xi & a_{212}+a_{312}\xi & a_{213}+a_{313}\xi \\ a_{221}+a_{321}\xi & a_{222}+a_{322}\xi & a_{223}+a_{323}\xi \\ a_{131} & a_{132} & a_{133}-\xi \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{41}=\begin{vmatrix} a_{212}+a_{312}\xi & a_{213}+a_{313}\xi & a_{214}+a_{314}\xi \\ a_{222}+a_{322}\xi & a_{223}+a_{323}\xi & a_{224}+a_{324}\xi \\ a_{232}+a_{332}\xi & a_{233}+a_{333}\xi & a_{234}+a_{334}\xi \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{42}=\begin{vmatrix} a_{211}+a_{311}\xi & a_{213}+a_{313}\xi & a_{214}+a_{314}\xi \\ a_{221}+a_{321}\xi & a_{223}+a_{323}\xi & a_{224}+a_{324}\xi \\ a_{231}+a_{331}\xi & a_{233}+a_{333}\xi & a_{234}+a_{334}\xi \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{43}=\begin{vmatrix} a_{211}+a_{311}\xi & a_{212}+a_{312}\xi & a_{214}+a_{314}\xi \\ a_{221}+a_{321}\xi & a_{222}+a_{322}\xi & a_{224}+a_{324}\xi \\ a_{231}+a_{331}\xi & a_{232}+a_{332}\xi & a_{234}+a_{334}\xi \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{44}=\begin{vmatrix} a_{211}+a_{311}\xi & a_{212}+a_{312}\xi & a_{213}+a_{313}\xi \\ a_{221}+a_{321}\xi & a_{222}+a_{322}\xi & a_{223}+a_{323}\xi \\ a_{231}+a_{331}\xi & a_{232}+a_{332}\xi & a_{233}+a_{333}\xi \end{vmatrix},$$

имеет нетривиальное решение. Отсюда определитель матрицы системы (10) должен быть равен нулю. Очевидно, что определитель матрицы системы (10) представляет собой многочлен относительно переменной ξ степени не выше, чем 12.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть система (1) модально управляема регулятором (4) (или (5)), причем в (5) $G'(\lambda) \not\equiv 0$ имеет вид (6). Тогда ξ будут корнями многочлена степени не выше 12, который является определителем матрицы системы (10).

Заключение. Полученная теорема дает одно необходимое условие модальной управляемости системы (1) в классе регуляторов (4) (или (5)). Вопрос о том, достаточно ли регуляторов (4) (или (5)) для решения задачи модальной управляемости остается открытым. Доказано [6–9], что для аналогичной системы второго порядка такие регуляторы решают задачу модального управления.

Условие теоремы позволяет свести бесконечномерную вариационную задачу нахождения регуляторов к конечномерной задаче нахождения коэффициентов регулятора (4), что существенно упрощает решение задачи модального управления.

Литература

1. Марченко В. М. О проблеме модального управления в линейных системах с запаздыванием // Доклады Академии наук БССР. 1978. № 5. С. 401–404.

2. Salamon D. Control and Observation of Neutral Systems. London: Pitman Press, 1984. 362 p.

3. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1967. Vol. AC-12, no. 6. P. 660–665.

4. Кириллова Ф. М., Марченко В. М. Функциональные преобразования и некоторые канонические формы в линейных системах с запаздывающим аргументом. Минск, 1978. 28 с. (Препринт / Акад. наук БССР, № 7 (39)).

5. Spong M. W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems // Circuits Systems Signal Process. 1986. Vol. 5, no. 1. P. 69–84.

6. Якименко А. А. Модальное управление одной запаздывающей системой // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–7.

7. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 18–21.

8. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 2. С. 25–27.

9. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае при кратных корнях // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2018. № 1. С. 5–8.

10. Якименко А. А. Достаточное условие модальной управляемости для систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2019. № 2. С. 17–21.

References

1. Marchenko V. M. On problem of modal control in linear systems with delay. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Reports of the BSSR Academy of Science], 1978, no. 5, pp. 401–404 (In Russian).

2. Salamon D. Control and Observation of Neutral Systems. London, Pitman Press, 1984. 362 p.

3. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1967, vol. AC-12, no. 6, pp. 660–665.

4. Kirillova F. M., Marchenko V. M. *Funktsional'nyye preobrazovaniya i nekotoryye kanonicheskiye formy v lineynykh sistemakh s zapazdyvayushchim argumentom* [Functional transforms and some canonical forms for linear retarded systems]. Minsk, 1978. 28 p.

5. Spong M. W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems. *Circuits Systems Signal Process*, 1986, vol. 5, no. 1, pp. 69–84.

6. Yakimenka A. A. Modal control for one delayed system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 3–7 (In Russian).

7. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 18–21 (In Russian).

8. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 2, pp. 25–27 (In Russian).

9. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case with double roots. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 1, pp. 5–8 (In Russian).

10. Yakimenka A. A. Sufficient condition of modal controllability for neutral type systems with commensurate delays. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2019, no. 2, pp. 17–21 (In Russian).

Информация об авторе

Якименко Андрей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yakimenko@belstu.by

Information about the author

Yakimenka Andrei Aliaksandravich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakimenko@belstu.by

Поступила после доработки 19.11.2019