ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.935.2+519.71

В. М. Марченко, И. М. Борковская
Белорусский государственный технологический университет

О СТАБИЛИЗАЦИИ СКАЛЯРНЫХ ГИБРИДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

В статье исследуются вопросы стабилизации скалярных гибридных дифференциально-разностных (ГДР) систем в шкалах линейных регуляторов по типу обратной связи. Рассматриваются простейший регулятор, не выводящий систему за пределы заданного класса, и более общий регулятор с интегральными составляющими типа свертки. Представлены необходимые условия стабилизации с помощью указанных регуляторов. Показано, что необходимое условие стабилизации с помощью регулятора с интегральными составляющими типа свертки является одновременно и достаточным. Получены условия стабилизации системы простейшим регулятором. Приведен пример системы, для которой не существует простейшего регулятора, позволяющего ее стабилизировать, но находится регулятор с интегральными элементами. Результаты могут быть применены при синтезе управляющих воздействий в реальных системах управления, описывающихся дифференциально-разностными системами.

Ключевые слова: дифференциально-разностные системы, линейные регуляторы по типу обратной связи, стабилизация.

V. M. Marchenko, I. M. Borkovskaya
Belarusian State Technological University

ON THE STABILIZATION OF SCALAR HYBRID DIFFERENTIAL-DIFFERENCE SYSTEMS

This article explores the problem of scalar hybrid differential-difference systems in the scales of linear regulators according to the type of feedback. The simplest regulator of a given class as well as a general one with integral components of the convolution type are rigorously investigated. The necessary conditions for stabilization with the mentioned regulators are presented. It is shown that the necessary condition for stabilization with the help of a controller with integral components of the convolution type is simultaneously sufficient. The conditions for stabilization of the system by the simplest controller are obtained. An example of the system that could be stabilized by a regulator with integral elements but not by a simplest regulator is provided. The results can be applied in the synthesis of control actions in real control systems described by differential-difference systems.

Key words: differential-difference systems, linear feedback regulators, stabilization.

Введение. При изучении реальных физических процессов наряду с динамическими (дифференциальными) встречаются и алгебраические (функциональные) зависимости. Такие процессы описываются дифференциально-алгебраическими (DAE) системами (отдельные уравнения которых являются дифференциальными, другие – алгебраическими). Эти системы относятся к классу гибридных [1–10]. Следует, однако, признать, что термин «гибридные системы» перегружен [1–16].

Гибридность означает, вообще говоря, неоднородность в природе рассматриваемого процесса или в методах его изучения. Понятие «гибридные системы» относят к системам, описывающим процессы или объекты с существенно различающимися характеристиками, например, содержащие в основной динамике непрерывные и дискретные переменные (сигналы), детерминированные и случайные величины или воздействия и т. д., что, в конечном счете, и определяет характер (природу) гибридных систем.

Имеется много причин для использования гибридных моделей – это, прежде всего, адекватность данных моделей, обоснованное их упрощение, использование цифровых машин (управление с помощью компьютерных программ); гибридные системы возникают при моделировании иерархической структуры реальных систем управления, в частности, при описании динамических, дискретных, стохастических подсистем, комплексных систем и т. д.

Несмотря на бурное развитие теории гибридных систем, предмет изучения этой теории однозначно не обозначен (см. работы [1–16] и ссылки к ним).

Классической в теории регулирования и теории динамических систем является проблема их устойчивости (особенно асимптотической) и стабилизации.

Ниже исследуются вопросы стабилизации гибридных дифференциально-разностных (ГДР) систем в шкалах линейных регуляторов по типу обратной связи.

Основная часть. Рассмотрим стационарную скалярную гибридную дифференциально-разностную систему в симметрической относительно операторов дифференцирования и сдвига форме

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1u(t), \tag{1}$$

$$x_2(t+h) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2u(t), t \geq 0 \tag{2}$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = x_{10}, x_2(\tau) = \psi(\tau), \tau \in [0, h). \tag{3}$$

Здесь $x_1(t) \in R$, $x_2(kh) \in R$, $u(t) \in R$, $h > 0$, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ – действительные числа; $u = u(\cdot)$ – внешнее (кусочно-непрерывное) воздействие – управление; $\psi(\cdot)$ – начальная кусочно-непрерывная функция.

Под решением системы (1), (2) будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x_1(\cdot)$ и кусочно-непрерывную функцию $x_2(\cdot)$, которые для всех $t \geq 0$ удовлетворяют уравнению (2) и для почти всех $t \geq 0$ удовлетворяют уравнению (1).

Такое решение начальной задачи (3) для каждого начального значения x_{10} и кусочно-непрерывной функции $\psi(\cdot)$ существует, единственно и может быть найдено методом интегрирования системы (1)–(3) «по шагам».

Присоединим к системе шкалы (классы) линейной обратной связи в виде:

1) простейшего регулятора

$$u(t) = Q_1x_1(t) + Q_2x_2(t), \tag{4}$$

не выводящего замкнутую систему за пределы рассматриваемого класса;

2) более общего регулятора с интегральными составляющими типа свертки

$$u(t) = Q_1x_1(t) + Q_2x_2(t) + \\ + \int_0^t Q_1(s)x_1(t-s)ds + \int_0^t Q_2(s)x_2(t+h-s)ds, \tag{5}$$

где Q_1 и Q_2 – действительные числа; $Q_1(\cdot)$ и $Q_2(\cdot)$ – кусочно-непрерывные функции с конечным носителем $H > 0$, $Q_1(\cdot) \equiv 0$, $Q_2(\cdot) \equiv 0$ для $t > H$.

Задача. Исследовать задачу стабилизации системы (1), (2) в шкалах (4), (5), т. е. задачу отыскания регуляторов того или иного типа (отыскания чисел Q_1, Q_2, функций $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot)$), при которых замкнутая система является устойчивой в том или ином смысле – асимптотически устойчивой, если не оговорено иное.

Рассмотрим невозмущенную ГДР-систему (1), (2), т. е. систему с выключенным управлением $u(t) = 0$ при $t \geq 0$.

Следуя методу Эйлера отыскания решений системы (1) в экспоненциальной форме в теории обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x(t) = e^{\lambda t}c_1, y(t) = e^{\lambda t}c_2,$$

получим характеристическое уравнение

$$\det\begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & e^{\lambda h} - a_{22} \end{bmatrix} = \Delta_1(\lambda) = 0, \lambda \in C,$$

которое назовем основным характеристическим уравнением системы (1), (2); здесь и далее C – поле комплексных чисел. Корни уравнения $\Delta_1(\lambda) = 0$ назовем основными характеристическими значениями этой системы.

Наряду с экспоненциальными решениями невозмущенной системы (1), (2) представляют интерес решения вида

$$x_1(t) \equiv 0, \; x_2(t) = \begin{cases} 0, \; t \neq kh, \\ c\lambda^{\frac{k}{h}}, \; t = kh, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, ..., \; t \geq 0,$$

где $c \neq 0, 0^0 = 1$ (назовем их импульсными решениями), подставляя которые в систему (1), (2), приходим к уравнению

$$\det(\lambda I_{n_2} - a_{22}) = \Delta_2(\lambda) = 0, \lambda \in C,$$

которое назовем присоединенным характеристическим уравнением системы (1), (2), а его корни – присоединенными характеристическими значениями этой системы.

Множество всех характеристических значений (основных и присоединенных) с учетом их кратностей назовем спектром, а решения, его породившие, – спектральными решениями системы (1), (2).

Определения асимптотической и экспоненциальной устойчивости системы (1), (2) понимаются в соответствии с их классическими формулировками для обыкновенных систем.

Определение. Невозмущенную систему (1), (2) будем называть спектрально устойчивой, если все ее спектральные решения являются асимптотически устойчивыми.

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. Для спектральной устойчивости невозмущенной системы (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы

1) все основные собственные значения имели отрицательные действительные части;

2) все присоединенные собственные значения λ лежали в комплексной плоскости внутри единичного диска: $|\lambda|<1$.

Доказательство утверждения непосредственно вытекает из вида спектральных решений.

Понятие спектральной устойчивости является некоторым ослаблением понятия асимптотической устойчивости, однако во многих случаях решение представляется в виде линейных комбинаций спектральных решений; в таких случаях эти понятия равнозначны.

В исследовании ГДР-систем приходится применять к таким системам преобразование Лапласа. Поэтому возникает необходимость в экспоненциальной оценке роста решений этих систем.

Запишем систему (1), (2) в виде, более удобном для применения преобразования Лапласа. Положим

$$x_2(t)=x_3(t-h),\ t\geq 0. \qquad (6)$$

Тогда система запишется в виде ГДР-системы запаздывающего типа

$$\dot{x}_1(t)=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_3(t-h)+b_1u(t), \qquad (7)$$

$$x_3(t)=a_{21}x_1(t)+a_{22}x_3(t-h)+b_2u(t),\ t\geq 0 \qquad (8)$$

с начальными условиями

$$x_1(0)=x_{10},\ x_3(\tau)=\psi(\tau+h),\ \tau\in[-h,0). \qquad (9)$$

Регуляторы (4), (5) перепишутся в виде

$$u(t)=Q_1x_1(t)+Q_2x_3(t-h), \qquad (10)$$

$$u(t)=Q_1x_1(t)+Q_2x_3(t-h)+$$
$$+\int_0^t Q_1(s)x_1(t-s)ds+\int_0^t Q_2(s)x_3(t-s)ds. \qquad (11)$$

Можно показать, что для каждого решения $x_1(\cdot)$, $x_3(\cdot)$ системы (7), (8), порожденного начальными данными (9) и кусочно-непрерывным управлением, имеющим не выше, чем экспоненциальный рост (14), найдутся такие положительные числа L и μ, что

$$\|x_1(t)\|\leq Le^{\mu t},\ \|x_3(t)\|\leq Le^{\mu t}.$$

Таким образом, имеет место экспоненциальная оценка решений системы (7), (8) (а следовательно, и системы (1), (2)), что позволяет применять к этим системам преобразование Лапласа.

Отметим, что спектры систем (7), (8) и (1), (2) совпадают.

Перейдем к необходимым условиям стабилизируемости.

Теорема 1. Если система (1), (2) является стабилизируемой в шкале (4) (или (5)), то

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12}e^{-\lambda h} & b_1\\ -a_{21} & 1-a_{22}e^{-\lambda h} & b_2\end{bmatrix}=2,\ \operatorname{Re}\lambda>0. \qquad (12)$$

Доказательство. Предположим противное: система (1), (2) стабилизируема (регулятором (4) или (5)), а условие (12) не выполняется, т. е. существует в общем случае комплексное число $\lambda^*\in C, \operatorname{Re}\lambda^*>0,$ и числа c_1 и c_2 такие, что

$$[c_1,c_2]\neq 0,$$
$$[c_1,c_2]\begin{bmatrix}\lambda^*-a_{11} & -a_{12} & b_1\\ -a_{21} & e^{\lambda^* h}-a_{22} & b_2\end{bmatrix}=0.$$

Вдоль решений системы (1), (2) имеем

$$0=\int_0^t c_1e^{-\lambda^*\tau}\left(\dot{x}_1(\tau)-a_{11}x_1(\tau)-a_{12}x_2(\tau)-\right.$$
$$\left.-b_1u(\tau)\right)d\tau+\int_0^t c_2e^{-\lambda^*\tau}\left(x_2(\tau+h)-a_{21}x_1(\tau)-a_{22}x_2(\tau)-\right.$$
$$\left.-b_2u(\tau)\right)d\tau=c_1e^{-\lambda^*t}x_1(t)-c_1x_{10}+\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_1\left(\lambda^*-\right.$$
$$\left.-a_{11}\right)x_1(\tau)d\tau-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_1a_{12}x_2(\tau)d\tau-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_1b_1\times$$
$$\times u(\tau)d\tau+\int_h^{t+h} e^{-\lambda^*s+\lambda h}c_2x_2(s)ds-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_2a_{21}x_1(\tau)d\tau-$$
$$-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_2a_{22}x_2(\tau)d\tau-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_2b_2u(\tau)d\tau=-c_1x_{10}+$$
$$+c_1e^{-\lambda^*t}x_1(t)+\int_t^{t+h} e^{-\lambda^*s+\lambda^*h}c_2x_2(s)ds-\int_0^h e^{-\lambda^*s+\lambda^*h}c_2\times$$
$$\times x_2(s)ds+\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_1\left(\lambda^*-a_{11}\right)x_1(\tau)d\tau-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_1\times$$
$$\times a_{12}x_2(\tau)d\tau-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_1b_1u(\tau)d\tau+\int_0^t e^{-\lambda^*s+\lambda^*h}c_2x_2(s)ds-$$

$$-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_2a_{21}x_1(\tau)d\tau-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_2a_{22}x_2(\tau)d\tau-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_2\times$$

$$\times b_2u(\tau)d\tau-c_1x_{10}+c_1e^{-\lambda^*t}x_1(t)+e^{-\lambda^*(t-h)}\int_0^h e^{-\lambda^*\tau}c_2\times$$

$$\times x_2(t+\tau)d\tau-e^{\lambda^*h}\int_0^h e^{-\lambda^*\tau}c_2\psi(\tau)d\tau+\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_1\left(\lambda^*-\right.$$

$$\left.-a_{11}\right)x_1(\tau)d\tau-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_1a_{12}x_2(\tau)d\tau-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_1b_1\times$$

$$\times u(\tau)d\tau+\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_2\left(e^{\lambda^*h}-a_{22}\right)x_2(\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_2a_{21}x_1(\tau)d\tau-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_2b_2u(\tau)d\tau=c_1e^{-\lambda^*t}x_1(t)+$$

$$+e^{-\lambda^*(t-h)}\int_0^h e^{-\lambda^*\tau}c_2x_2(t+\tau)d\tau-c_1x_{10}-e^{\lambda^*h}\int_0^h e^{-\lambda^*\tau}c_2\times$$

$$\times\psi(\tau)d\tau+\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}\left(c_1\left(\lambda^*-a_{11}\right)-c_2a_{21}\right)x_1(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}\left(c_2\left(e^{\lambda^*h}-a_{22}\right)-c_1a_{12}\right)x_2(\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}\left(c_1b_1+c_2b_2\right)u(\tau)d\tau=c_1e^{-\lambda^*t}x_1(t)+$$

$$+e^{-\lambda^*(t-h)}\int_0^h e^{-\lambda^*\tau}c_2x_2(t+\tau)d\tau-c_1x_{10}-e^{\lambda^*h}\int_0^h e^{-\lambda^*\tau}c_2\times$$

$$\times\psi(\tau)d\tau+\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}[c_1,c_2]\begin{bmatrix}\lambda^*-a_{11} & -a_{12} & b_1\\ -a_{21} & e^{\lambda^*h}-a_{22} & b_2\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}x_1(\tau)\\ x_2(\tau)\\ u(\tau)\end{bmatrix}d\tau=c_1e^{-\lambda^*t}x_1(t)+$$

$$+e^{-\lambda^*(t-h)}\int_0^h e^{-\lambda^*\tau}c_2x_2(t+\tau)d\tau-$$

$$-c_1x_{10}-e^{\lambda^*h}\int_0^h e^{-\lambda^*\tau}c_2\psi(\tau)d\tau\Rightarrow$$

$$c_1e^{-\lambda^*t}x_1(t)+e^{-\lambda^*(t-h)}\int_0^h e^{-\lambda^*\tau}c_2x_2(t+\tau)d\tau=$$

$$=c_1x_{10}-e^{\lambda^*h}\int_0^h e^{-\lambda^*\tau}c_2\psi(\tau)d\tau.$$

Поскольку по условию система (1), (2) стабилизируема, то найдется обратная связь – стабилизирующее управление (4) (или (5)), при котором замкнутая система (1), (2), (4) (или (1), (2), (5)) асимптотически устойчива, стало быть, $\lim\limits_{t\to+\infty}\|x_1(t)\|=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\|x_2(t)\|=0$. Поэтому левая часть в полученном равенстве стремится к нулю при $t\to+\infty$ в случае $\mathrm{Re}\lambda^*>0$, в то время как правую часть можно отграничить от нуля за счет выбора начальных данных. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения теоремы 1.

Теорема 2. Если система является стабилизируемой в шкале (4) (или (5)), то

$$\operatorname{rank}\left[\lambda-a_{22}\quad b_2\right]=1,\ \forall\lambda\in C,\ |\lambda|<1. \qquad (13)$$

Доказательство. Предположим противное: система (1), (2) стабилизируема (регулятором (4) или (5)), а условие (13) не выполняется, т. е. существует в общем случае комплексное число $\lambda^*\in C, |\lambda^*|\geq 1,$ и число c_2 такое, что

$$c_2\neq 0, c_2\left[\lambda^*-a_{22}\quad b_2\right]=0.$$

Поскольку система (1), (2) стабилизируема, то найдется линейная обратная связь, при которой все решения соответствующей замкнутой системы со временем затухают. В силу уравнения (2) вдоль импульсных решений с учетом вышеуказанного условия имеем

$$c_2x_2(kh+h)=c_2(a_{22}x_2(kh)+b_2u(kh))=$$
$$=\lambda^*c_2x_2(kh)=...=(\lambda^*)^{k+1}c_2\psi(0),$$

стало быть,

$$|c_2x_2(kh+h)|=|\lambda^*|^{k+1}|c_2\psi(0)|.$$

Как и при доказательстве теоремы 1, заключаем, что левая часть последнего равенства при неограниченном возрастании времени стремится к нулю, а правая нет (при подходящем выборе значения $\psi(0)$). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.

Будем считать, что необходимые условия (12), (13) стабилизируемости выполнены. Тогда в системе (1), (2) либо

1) $b_2\neq 0$; либо

2) $b_2=0, |a_{22}|<1$.

В первом случае $(b_2\neq 0)$ полагаем

$$u(t)=\frac{1}{b_2}\left(-a_{21}x_1(t)-a_{22}x_3(t-h)+v(t)\right), t\geq 0. \quad (14)$$

Присоединяя к системе (7), (8), (14)

$$\dot{x}_1(t)=a_{11}^*x_1(t)+a_{12}^*x_3(t-h)+b_1^*v(t),$$
$$x_3(t)=v(t), \qquad (15)$$

где $b_1^*=\dfrac{b_1}{b_2}, a_{11}^*=a_{11}-b_1^*a_{21}, a_{12}^*=a_{12}-b_1^*a_{22}$, регулятор (11) и применяя преобразование Лапласа, перейдем в частотную область:

$$(p-a_{11}^*)\breve{x}_1(p)-a_{12}^*e^{-ph}\breve{x}_3(p)-b_1^*\breve{v}(p)=$$
$$=x_{10}+a_{12}^*\int_0^h e^{-pt}\psi(t)dt,\ \breve{x}_3(p)=\breve{v}(p),\ p\in C,$$

здесь

$$\breve{x}_i(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}x_i(t)dt, \breve{v}(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}v(t)dt, i=1,3 -$$

Лаплас-образы функций $x_i(t), v(t), t\ge 0, i=1,3.$

Прежде всего заметим, что в случае $a_{11}^*<0$ рассматриваемая система стабилизируема, и стабилизирующий регулятор можно выбрать в виде $v(t)=0, t\ge 0.$ Поэтому далее считаем, что $a_{11}^*>0.$

Записывая регулятор в частотной области и принимая во внимание теорему об образе свертки и теорему Винера – Пэли об образе функции с конечным носителем [17], получаем

$$\breve{v}(p)=Q_1^*(p)\breve{x}_1(p)+Q_2^*(p)\breve{x}_3(p)+Q_2\int_0^h e^{-pt}\psi(t)dt$$

(последнее слагаемое можно опустить, так как при построенном регуляторе (11) оно автоматически учтется в частотной области в Лаплас-образах начальных данных); здесь функции комплексной переменной p

$$Q_1^*(p)=Q_1+\breve{Q}_1(p), Q_2^*(p)=Q_1e^{-ph}+\breve{Q}_2(p),$$
$$\breve{Q}_1(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}Q_1(t)dt, \breve{Q}_2(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}Q_2(t)dt$$

являются целыми функциями конечной степени H как Лаплас-образы [17] функций с конечным носителем H.

Рассмотрим характеристическое уравнение полученной замкнутой системы и потребуем, чтобы оно имело желаемый вид:

$$0=\det\begin{bmatrix} p-a_{11}^*-b_1^*Q_1^*(p) & -a_{12}^*e^{-ph}-b_1^*Q_2^*(p) \\ -Q_1^*(p) & 1-Q_2^*(p)\end{bmatrix}=$$
$$=p-a_{11}^*-b_1^*Q_1^*(p)-pQ_2^*(p)+a_{11}^*Q_2^*(p)+b_1^*Q_1^*(p)Q_2^*(p)-$$
$$-a_{12}^*e^{-ph}Q_1^*(p)-b_1^*Q_1^*(p)Q_2^*(p)=p-a_{11}^*-$$
$$-Q_1^*(p)(b_1^*+a_{12}^*e^{-ph})-(p-a_{11}^*)Q_2^*(p)=p+\alpha,\ \alpha>0.$$

Функции должны быть целыми, поэтому нули знаменателя должны быть нулями (той же кратности) числителя, для чего достаточно положить

$$Q_2^*(p)=-\frac{\alpha+a_{11}^*+Q_1^*(p)(b_1^*+a_{12}^*e^{-ph})}{p-a_{11}^*},$$
$$Q_1=-\frac{\alpha+a_{11}^*}{b_1^*+a_{12}^*e^{-a_{11}^*h}},\ \breve{Q}_1(p)\equiv 0, p\in C, \qquad (16)$$

что выполнимо, так как в силу условия (12)

$$2=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} p-a_{11} & -a_{12}e^{-ph} & b_1 \\ -a_{21} & 1-a_{22}e^{-ph} & b_2\end{bmatrix}\underset{b_2\ne 0}{=}$$
$$=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} p-a_{11}^* & -a_{12}^*e^{-ph} & b_1^* \\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}=$$
$$=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} p-a_{11}^* & -a_{12}^*e^{-ph}-b_1^* & 0 \\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}, \operatorname{Re}\lambda>0\Rightarrow$$
$$b_1^*+a_{12}^*e^{-ph}\ne 0$$

для $p=a_{11}^*, \operatorname{Re}a_{11}^*>0.$

Тогда

$$Q_2^*(p)=-\frac{\alpha+a_{11}^*-(\alpha+a_{11}^*)\dfrac{b_1^*+a_{12}^*e^{-ph}}{b_1^*+a_{12}^*e^{-a_{11}^*h}}}{p-a_{11}^*}=$$
$$=-(\alpha+a_{11}^*)a_{12}^*e^{-a_{11}^*h}\frac{1-e^{-(p-a_{11}^*)h}}{p-a_{11}^*}=$$
$$=\frac{-(\alpha+a_{11}^*)a_{12}^*e^{-a_{11}^*h}}{p-a_{11}^*}+\frac{(\alpha+a_{11}^*)a_{12}^*}{p-a_{11}^*},$$
$$e^{-ph}=\breve{Q}_2(p),\ Q_2=0.$$

Переходя к оригиналам, имеем

$$Q_1(\tau)=\begin{cases}-(\alpha+a_{11}^*)a_{12}^*e^{a_{11}^*(t-h)}, t\in[0,h],\\ 0,\ t>h,\end{cases} \qquad (17)$$
$$v(t)=Q_1x_1(t)+\int_0^t Q_2(s)x_3(t-s)ds, t\ge 0,$$

где Q_1 и $Q_2(\cdot)$ определены в (16) и (17).

Отсюда, возвращаясь к системе (1), (2) и учитывая (14), получаем стабилизирующий регулятор в виде

$$u(t)=\frac{Q_1-a_{21}}{b_2}x_1(t)-\frac{a_{22}}{b_2}x_2(t)+$$
$$+\int_0^t\frac{Q_2(s)}{b_2}x_2(t+h-s)ds, t\ge 0$$

(Q_1 и $Q_2(\cdot)$ найдены в (16) и (17)).

Пусть теперь $b_2=0, |a_{22}|<1.$ Если при этом $b_1=0,$ то внешнее воздействие на систему отсутствует, и смысл задачи стабилизируемости сводится к асимптотической устойчивости первоначальной открытой системы. Поэтому в дальнейшем считаем, что $b_1\ne 0.$ В этом случае необходимое условие (12) выполняется.

Замкнем систему (7), (8) линейной обратной связью вида

$$u(t)=\frac{1}{b_1}\left(-a_{11}x_1(t)-a_{12}x_3(t-h)+v(t)\right),\ t\geq 0,$$

перейдем в частотную область, присоединим к системе регулятор $\breve{v}(p)=Q_1^*(p)\breve{x}_1(p)+Q_2^*(p)\breve{x}_3(p)$, где положим $Q_1^*(p)=-\alpha,\ \alpha>0,\ Q_2^*(p)=0,\ p\in C.$

Характеристическое уравнение полученной замкнутой системы имеет вид

$$0=\det\begin{bmatrix} p-Q_1^*(p) & -Q_2^*(p) \\ -a_{21} & 1-a_{22}e^{-ph}\end{bmatrix}=(p+\alpha)\left(1-a_{22}e^{-ph}\right)$$

и все его корни – основные характеристические значения замкнутой системы – имеют отрицательные действительные части.

Возвращаясь из частотной области в пространство состояний, получаем регулятор $v(t)=-\alpha x_1(t),\ t\geq 0,$ что приводит к соответствующей замкнутой системе вида

$$\dot{x}_1(t)=-\alpha x_1(t),\ x_3(t)=a_{21}x_1(t)+a_{21}x_3(t-h),$$

которая в рассматриваемом случае $\alpha>0, |a_{22}|<1$ является асимптотически устойчивой.

Действительно,

$$|x_1(t)|\leq|x_{10}|e^{-\alpha t},$$

$$|x_3(t)|\leq|a_{21}||x_1(t)|+|a_{22}||x_3(t-h)|\leq$$

$$\leq|a_{21}|\left(\left(|x_1(t)|+|a_{22}||x_1(t-h)|+...+|a_{22}|^{T_t}|x_1(t-T_th)|\right)\right)+$$

$$+|a_{22}|^{T_t+1}|x_3(t-T_th-h)|\leq|a_{21}||x_{10}|e^{-\alpha t}\left(1+|a_{22}|e^{\alpha h}+\right.$$

$$\left.+...+|a_{22}|^{T_t}e^{\alpha T_t h}\right)+|a_{22}|^{T_t+1}|\psi(t-T_th)|\leq|a_{21}||x_{10}|e^{-\alpha t}\times$$

$$\times\frac{|a_{22}|^{T_t}e^{\alpha T_t h}|a_{22}|e^{\alpha h}-1}{|a_{22}|e^{\alpha h}-1}+|a_{22}|^{T_t+1}\sup_{\tau\in[0,h]}|\psi(\tau)|=|a_{22}|^{T_t+1}\times$$

$$\times\left(\frac{|a_{21}||x_{10}|e^{\alpha h}e^{-\alpha(t-T_th)}}{|a_{22}|e^{\alpha h}-1}+\sup_{\tau\in[0,h]}|\psi(\tau)|\right)+\frac{|a_{21}||x_{10}|e^{-\alpha t}}{|a_{22}|e^{\alpha h}-1}\leq$$

$$\leq\left(\frac{|a_{21}||x_{10}|e^{\alpha h}}{|a_{22}|e^{\alpha h}-1}+\sup_{\tau\in[0,h]}|\psi(\tau)|\right)|a_{22}|^{T_t+1}+\frac{|a_{21}||x_{10}|e^{-\alpha t}}{|a_{22}|e^{\alpha h}-1},$$

откуда видим, что функции $|x_1(t)|, |x_3(t)|,$ монотонно затухая $(|x_1(t)|\to 0, |x_3(t)|\to 0),$ стремятся к нулю при $t\to+\infty,$ что влечет за собой асимптотическую устойчивость рассматриваемой замкнутой системы и, как следствие, стабилизируемость (в нашем случае $b_2=0, |a_{22}|<1, b_1\neq 0)$ системы (1), (2) регулятором вида

$$u(t)=\frac{-a_{11}-\alpha}{b_1}x_1(t)-\frac{a_{12}}{b_1}x_2(t),\ t\geq 0. \qquad (18)$$

Таким образом, доказана теорема 2.

Теорема 3. Необходимые условия (12), (13) стабилизируемости системы (1), (2) в шкале регуляторов (5) являются и достаточными.

В случае $b_2=0, |a_{22}|<1, b_1\neq 0$ регулятор (18), стабилизирующий систему (1), (2), относится к шкале (4). В связи с этим представляет интерес исследование задачи стабилизируемости в этой шкале, что является делом весьма непростым. Как и ранее, рассмотрим систему (7), (8) и соответствующий простейший регулятор

$$u(t)=Q_1x_1(t)+Q_2x_3(t-h),\ t\geq 0. \qquad (19)$$

Замыкая систему этим регулятором, получаем основное характеристическое уравнение

$$0=\det\begin{bmatrix} p-a_{11}-b_1Q_1 & -a_{12}e^{-ph}-b_1Q_2e^{-ph} \\ -a_{21}-b_2Q_1 & 1-a_{22}e^{-ph}-b_2Q_2e^{-ph}\end{bmatrix}=$$

$$=p-a_{11}-b_1Q_1+e^{-ph}(a_{22}a_{11}+a_{22}b_1Q_1+a_{11}b_2Q_2-$$

$$-a_{12}a_{21}-a_{21}b_1Q_2-a_{12}b_2Q_1)-pe^{-ph}(a_{22}+b_2Q_2). \qquad (20)$$

В силу необходимого условия (12) параметры q_1, q_2 надлежит выбирать так, чтобы все корни уравнения (20) имели отрицательные действительные части. В связи с этим представляет интерес следующее утверждение.

Утверждение 2 [2, 3]. Для того, чтобы все корни $(p\in C)$ уравнения

$$p+\alpha_1+\alpha_2e^{-ph}+\alpha_3pe^{-ph}=0,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\in R,$ имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы либо

1) $|\alpha_3|\leq 1, \alpha_1>|\alpha_2|;$ либо

2) $|\alpha_3|<1, \alpha_2>|\alpha_1|, h<h^*,$

где $$h^*=\sqrt{\frac{1-\alpha_3{}^2}{\alpha_2{}^2-\alpha_1{}^2}}\arccos\left(-\frac{\alpha_1+\alpha_2\alpha_3}{\alpha_2+\alpha_1\alpha_3}\right). \qquad (21)$$

Применим утверждение 2 к уравнению (20) и попытаемся за счет выбора Q_1, Q_2 удовлетворить требованиям, предъявляемым этим утверждением к коэффициентам.

Заметим, условие (13) требует $|\alpha_3|<1$ и в силу вида регулятора (18) неисследованным остается случай $b_2\neq 0$ системы (7), (8). Поэтому сразу можем перейти к рассмотрению характеристического уравнения системы (15), замкнутой регулятором

$$v(t)=Q_1x_1(t)+Q_2x_3(t-h), \qquad (22)$$

$$0=\det\begin{bmatrix} p-a_{11}^*-b_1^*Q_1 & -a_{12}^*e^{-ph}-b_1^*Q_2e^{-ph} \\ -Q_1 & 1-Q_2e^{-ph}\end{bmatrix}=$$

$$=p+(-a_{11}^*-b_1^*Q_1)+(a_{11}^*Q_2-a_{12}^*Q_1)e^{-ph}+(-Q_2)pe^{-ph},$$

$$-a_{11}^*-b_1^*Q_1=\alpha_1,\ a_{11}^*Q_2-a_{12}^*Q_1=\alpha_2,\ -Q_2=\alpha_3.$$

Считаем, что $|Q_2|<1$. Это условие необходимо для асимптотической устойчивости замкнутой системы (15), (22). Далее в соответствии с утверждением 2 потребуем, чтобы

$$-a_{11}^*-b_1^*Q_1>\left|a_{11}^*Q_2-a_{12}^*Q_1\right|, \qquad (23)$$

где $|Q_2|<1$. Очевидно, что в случае $a_{11}^*<0$ неравенство (23) выполняется при $Q_1=Q_2=0$, и стабилизирующий регулятор (22) приобретает вид $v(t)=0$.

Пусть далее $|b_1^*|>|a_{12}^*|$. Тогда при $Q_2=0$, $Q_1=-|Q_1|\operatorname{sgn} b_1^*$ и достаточно больших $|Q_1|$ неравенство (23) будет выполняться, и стабилизирующий регулятор (22) можно выбрать в виде

$$v(t)=-|Q_1|\operatorname{sgn} b_1^*\,x_1(t)$$

при достаточно больших $|Q_1|$.

Действительно, замкнутая этим регулятором система (15) имеет следующий вид:

$$\dot{x}_1(t)=(a_{11}^*-|b_1^*||Q_1|)x_1(t)-a_{12}^*|Q_1|\operatorname{sgn} b_1^*x_1(t-h)x_1(t),$$

$$x_3(t)=-x_1(t).$$

Первое уравнение этой системы – дифференциальное уравнение запаздывающего типа – является асимптотически устойчивым, поскольку все корни его характеристического уравнения (в силу утверждения 2, см. также [4]) имеют отрицательные действительные части, что влечет устойчивость и второго уравнения системы.

Пусть теперь $|b_1^*|<|a_{12}^*|$. Условие 1) утверждения 2 при этом оказывается неэффективным. Учитывая условие 2) утверждения 2, поиск параметров стабилизирующих регуляторов вида (22) сводится в рассматриваемом случае к исследованию задачи математического программирования − максимизации функции

$$h^*=\sqrt{\frac{1-Q_2^2}{\alpha_2^2-\alpha_1^2}}\arccos\left(-\frac{\alpha_1-\alpha_2Q_2}{\alpha_2-\alpha_1Q_2}\right)\to\max$$

при ограничениях

$$\alpha_2=a_{11}^*Q_2-a_{12}^*Q_1>\left|-a_{11}^*-b_1^*Q_1\right|=|\alpha_1|,$$

где $Q_1\in R, |Q_2|<1$.

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть, например, $a_{11}^*=0$. Тогда, полагая $Q_1=-|Q_1|\operatorname{sgn} a_{12}^*$, $Q_2=0$, приходим к оптимизационной задаче

$$h^*=\frac{1}{|Q_1|\sqrt{|a_{12}^*|^2-|b_1^*|^2}}\arccos\left(\frac{b_1^*\operatorname{sgn} a_{12}^*}{|a_{12}^*|}\right)\to\max$$

при ограничениях $|Q_1|>0$. Очевидно, для каждой системы (15) такая задача разрешима и существует искомый стабилизирующий регулятор вида $v(t)=-|Q_1|\operatorname{sgn} a_{12}^*\,x_1(t)$ (при достаточно малых $|Q_1|$).

Пусть далее $b_1^*\operatorname{sgn} a_{12}^*>0$. Тогда $b_1^*\operatorname{sgn} a_{12}^*=|b_1^*|$ и при $Q_2=0$, $Q_1=-|Q_1|\operatorname{sgn} b_1^*$ приходим к задаче максимизации функции

$$h^*=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{|a_{12}^*|^2|Q_1|^2-\left(a_{11}^*-|b_1^*||Q_1|\right)^2}}\arccos\left(\frac{a_{11}^*-|b_1^*||Q_1|}{|a_{12}^*||Q_1|}\right)$$

при ограничениях $|a_{12}^*||Q_1|>\left|a_{11}^*-|b_1^*||Q_1|\right|$ или (по раскрытию неравенства) получаем $|Q_1|>q^*$, где $q^*=\dfrac{a_{11}^*}{|a_{12}^*|+|b_1^*|}$. Далее можно найти наибольшее значение (верхнюю точную границу) функции h^*. Вычисляя предел (по правилу Лопиталя) $\lim\limits_{|Q_1|\to q^*}h^*=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\dfrac{|a_{12}^*|+|b_1^*|}{a_{11}^*|a_{12}^*|}=h_0^*$, можем сформулировать следующее достаточное условие.

Утверждение 3. Если

$$h<h_0^*,\ a_{11}^*>0, |a_{12}^*|>|b_1^*|, b_1^*\operatorname{sgn} a_{12}^*>0,$$

то найдется регулятор $v(t)=-|Q_1|\operatorname{sgn} a_{12}^*\,x_1(t)$, который при некотором $|Q_1|>q^*$ стабилизирует систему (15).

Аналогично можно рассмотреть случай $a_{11}^*>0, |a_{12}^*|>|b_1^*|, b_1^*\operatorname{sgn} a_{12}^*<0$.

В заключение приведем пример системы (15), для которой не существует стабилизирующего регулятора вида (22), однако находится регулятор с интегральными элементами.

Пример. Рассмотрим систему (15) вида

$$\dot{x}_1(t)=x_3(t-h)+v(t),\ x_3(t)=v(t). \qquad (24)$$

В силу утверждения 2 или непосредственно убеждаемся, что регулятор простейшего вида (22), стабилизирующий эту систему, не существует, однако, замыкая ее регулятором $\breve{v}(p) = Q_1^*(p)\breve{x}_1(p) + Q_2^*(p)\breve{x}_3(p)$ в частотной области, получаем желаемое характеристическое уравнение вида

$$0 = \det\begin{bmatrix} p - Q_1^*(p) & -e^{-ph} - Q_2^*(p) \\ -Q_1^*(p) & 1 - Q_2^*(p) \end{bmatrix} = p - Q_1^*(p) - -pQ_2^*(p) - e^{-ph}Q_1^*(p) = p + \alpha,\ \alpha > 0.$$

Отсюда

$$Q_1^*(p) = Q_1 = -\frac{\alpha}{2},\ Q_2^*(p) = \breve{Q}_2(p) = = \frac{\alpha + Q_1^*(p) + e^{-ph}Q_1^*(p)}{-p} = \frac{\alpha(1 - e^{-ph})}{-2p}.$$

Возвращаясь к оригиналам, получаем искомый стабилизирующий регулятор вида

$$v(t) = -\frac{\alpha}{2}x_1(t) - \frac{\alpha}{2}\int_0^t q(s)x_3(t-s)ds,\ t \geq 0,$$

где $q(s) = \begin{cases} 1, s \in [0, h], \\ 0, s > h. \end{cases}$

Рассмотренный пример показывает существенность интегральных элементов при расширении шкалы регуляторов по типу линейной обратной связи.

Заключение. В работе представлены необходимые условия стабилизации с помощью линейных регуляторов типа обратной связи. Показано, что необходимое условие стабилизации с помощью регулятора с интегральными составляющими типа свертки является одновременно и достаточным. Получены условия стабилизации системы простейшим регулятором, не выводящим систему за пределы рассматриваемого класса. Приведен пример системы, для которой не существует простейшего регулятора, позволяющего ее стабилизировать, но находится регулятор с интегральными элементами, решающий эту задачу.

Литература

1. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

2. Марченко В. М., Якименко А. А. К вопросу об устойчивости двумерных дескрипторных систем с запаздывающим аргументом нейтрального типа // Четвертые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: тез. докл. Междунар. конф., Минск, 7–10 дек. 2005 г. / Ин-т математики НАН Беларуси. Минск, 2005. С. 107–108.

3. Марченко В. М., Луазо Ж.-Ж. Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 5. 2009. С. 728–740.

4. Марченко В. М., Якименко А. А. Об устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом нейтрального типа // Устойчивость, управление и моделирование динамических систем: материалы Междунар. науч. семинара, Екатеринбург, 15–17 нояб. 2006 г. / УрГУПС. Екатеринбург, 2006. С. 13–14.

5. März R. Solvability of linear differentia algebraic equations with properly stated leading terms // Results in Mathematics 45(2004). Basel: Birkhauser Verlag, 2004. P. 88–95.

6. Кириллова Ф. М., Стрельцов С. В. Необходимые условия оптимальности управлений в гибридных системах // Управляемые системы: сб. ст. Новосибирск, 1975. Вып. 14. С. 24–33.

7. Ахундов А. А. Управляемость линейных гибридных систем // Управляемые системы: сб. ст. Новосибирск, 1975. Вып. 14. С. 4–10.

8. Трофимчук Т. С. Управляемость систем, неразрешенных относительно старшей производной // Управляемые системы: сб. ст. Новосибирск, 1980. Вып. 20. С. 75–82.

9. Марченко В. М., Поддубная О. Н. Представление решений управляемых гибридных систем // Проблемы управления и информатики. 2002. № 6. С. 17–25.

10. Marchenko V. M., Poddubnaya O. N., Zaczkiewicz Z. Hybrid control and observation systems in symmetric form // IEEE conf. «RoMoCo». Poznan, Poland, 2005. P. 137–143.

11. Marchenko V. M., Zaczkiewicz Z. Observability for linear differential-algebraic systems with delay // IEEE conf. «MMAR'2005». Blazejewko, Poland, 2005. P. 299–303.

12. Луазо Ж.-Ж., Марченко В. М. Реализация в шкалах систем с запаздыванием // Доклады РАН. 2002. Т. 383, № 3. С. 305–308.

13. Марченко В. М., Поддубная О. Н. Представление решений и относительная управляемость линейных дифференциально-алгебраических систем со многими запаздываниями // Доклады РАН. 2005. Т. 404, № 4. С. 465–469.

14. De la Sen M. The reachability and observability of hybrid multirate sampling linear systems // Computers Math. Applic. 1996. Vol. 31, no. 1. P. 109–122.

15. Observability of linear hybrid systems / R. Vidal [et al.] // Hybrid systems: Computation and Control. 2003. Vol. 2623 of LNCS. P. 526–539.

16. Gertler J. J., Cruz J. B., Peshkin M. (Eds.) Hybrid systems // Prepr. 13th World Congr. IFAC. 1996. Vol. J. P. 275–311, 473–476.

17. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964. 269 с.

References

1. Bellman R., Cooke K. L. *Differentsial'no-raznostnyye uravneniya* [Differential-difference equations]. Moscow, Mir Publ., 1967. 548 p.

2. Marchenko V. M., Yakimenka A. A. On the stability of two-dimensional descriptor systems with a delayed argument of neutral type. *Tezisy dokladov Mezhdunarodnoy konferentsii "Chetvertyye Bogdanovskiye chteniya po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam"* [Abstracts of the International Conference "Fourth Bogdanov Readings on Ordinary Differential Equations"]. Minsk, 2005, pp. 107–108 (In Russian).

3. Marchenko V. M., Loiseau J.-J. On the stability of hybrid difference-differential systems. *Differentsial'nyye uravneniya* [Differential Equations], 2009, vol. 45, no. 5, pp. 728–740 (In Russian).

4. Marchenko V. M., Yakimenka A. A. On the stability of equations with a delayed argument of neutral type. *Materialy Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara "Ustoychivost', upravleniye i modelirovaniye dinamicheskikh system"* [Materials of the International Scientific Workshop "Stability, control and modeling of dynamic systems"]. Yekaterinburg, 2006, pp. 13–14 (In Russian).

5. März R. Solvability of linear differentia algebraic equations with properly stated leading terms. *Results in Mathematics 45(2004)*. Basel, Birkhauser Verlag, 2004. P. 88–95.

6. Kirillova F. M., Strel'tsov S. V. Necessary conditions for optimality of controls in hybrid systems. *Upravlyaemyye sistemy* [Controlled systems]. Novosibirsk, 1975, issue 14, pp. 24–33 (In Russian).

7. Akhundov A. A. Controllability of the linear hybrid systems. *Upravlyaemyye sistemy* [Controlled systems]. Novosibirsk, 1975, issue 14, pp. 4–10 (In Russian).

8. Trofimchuk T. S. Controllability of systems not permitted with respect to the highest derivative. *Upravlyaemyye sistemy* [Controlled systems]. Novosibirsk, 1980, issue 20, pp. 75–82 (In Russian).

9. Marchenko V. M., Poddubnaya O. N. Representation of solutions of controlled hybrid systems. *Problemy upravleniya i informatiki* [Journal of Automation and Information Sciences], 2002, no. 6, pp. 17–25 (In Russian).

10. Marchenko V. M., Poddubnaya O. N., Zaczkiewicz Z. Hybrid control and observation systems in symmetric form. *IEEE conf. "RoMoCo"*. Poznan, 2005, pp. 137–143.

11. Marchenko V. M., Zaczkiewicz Z. Observability for linear differential-algebraic systems with delay. *IEEE conf. "MMAR'2005"*. Blazejewko, 2005, pp. 299–303.

12. Loiseau J.-J., Marchenko V. M. Realization in scales of systems with aftereffect. *Doklady RAN* [Doklady Mathematics], 2002, vol. 383, no. 3, pp. 305–308 (In Russian).

13. Marchenko V. M., Poddubnaya O. N. Representation of solutions and relative controllability of linear differential-algebraic systems with many delays. *Doklady RAN* [Doklady Mathematics], 2005, vol. 404, no. 4, pp. 465–469 (In Russian).

14. De la Sen M. The reachability and observability of hybrid multirate sampling linear systems. *Computers Math. Applic.*, 1996, vol. 31, no. 1, pp. 109–122.

15. Vidal R., Chiuso A., Soato S., Sastry S. Observability of linear hybrid systems. *Hybrid systems: Computation and Control*, 2003, vol. 2623 of LNCS, pp. 526–539.

16. Gertler J. J., Cruz J. B., Peshkin M. (Eds.) Hybrid systems. *Prepr. 13th World Congr. IFAC*, 1996, vol. J, pp. 275–311, 473–476.

17. Wiener N., Paley R. *Preobrazovaniye Fur'ye v kompleksnoy oblasti* [Fourier transform in the complex domain]. Moscow, Nauka Publ., 1964. 269 p.

Информация об авторах

Марченко Владимир Матвеевич − доктор физико-математических наук, профессор. E-mail: vladimir.marchenko@gmail.com

Борковская Инна Мечиславовна − кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: borkovskaia@gmail.com

Information about the authors

Marchenko Vladimir Matveevich − DSc (Physics and Mathematics), Professor. E-mail: vladimir.marchenko@gmail.com

Borkovskaya Inna Mechislavovna − PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: borkovskaia@gmail.com

Поступила после доработки 11.11.2019