УДК 517.444

Л. Д. Яроцкая, кандидат физико-математических наук, доцент (БГТУ)

ОБ ОДНОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СВЕРТКЕ, СВЯЗАННОЙ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ КОНТОРОВИЧА − ЛЕБЕДЕВА

Работа посвящена обобщению понятия свертки двух функций. Построена интегральная свертка как обратное преобразование Конторовича – Лебедева произведения одного преобразования по индексу специальной функции ядра и преобразования Конторовича – Лебедева свертываемых функций. Метод исследования основывается на равенстве Парсеваля для преобразования Конторовича – Лебедева. Установлены условия существования в некоторых весовых пространствах Лебега измеримых функций и доказано факторизационное равенство.

The paper is devoted to a generalization of the notion of convolution for two functions. The convolution is constructed in terms of the inverse Kontorovich − Lebedev transform of the product of the index transform with the special function in the kernel and the Kontorovich − Lebedev transform for convolution functions. The method is based on the Parseval equality for the Kontorovich − Lebedev transform. The estimates, mapping properties within weighted Lebesgue spaces of measurable functions and the factorization property are obtained.

Введение. Среди обширного множества интегральных преобразований, теория которых имеет важные приложения в граничных задачах математической физики, особое место занимают преобразования, связанные с интегрированием по индексу специальной функции, входящей в ядро. В монографии [1] разработан метод построения композиционных сверток для различных преобразований по индексу, дано понятие обобщенной свертки $(f * g)$ двух функций f и g как операции умножения в некоторой алгебре, когда с помощью действия соответствующего интегрального оператора K на свертку приходим к обычному умножению образов, определенному факторизационным равенством вида:

$$[K(f*g)](x)=[K_1 f](x)[K_2 g](x),$$

где K_1, K_2 − некоторые интегральные операторы.

Если при некоторых условиях имеет смысл обратный оператор от произведения функций, то в некотором пространстве функций свертку можно определить равенством Парсеваля:

$$(f*g)(x)=K^{-1}([K_1 f][K_2 g])(x).$$

Установлено [1], что все известные в литературе преобразования по индексу композиционно связаны с преобразованием Конторовича – Лебедева в силу универсальной структуры их ядер.

Свертка для преобразования Конторовича − Лебедева. Рассмотрим преобразование Конторовича – Лебедева $K_{i\tau}[f]$ вида

$$K_{i\tau}[f]=\int_0^\infty K_{i\tau}(x)f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Здесь $K_{i\tau}(x)$ – функция Макдональда мнимого параметра [2]:

$$K_{i\tau}(x)=\frac{\pi}{2\sin(i\pi\tau)}\left[I_{-i\tau}(x)-I_{i\tau}(x)\right], \qquad (2)$$

где $I_{i\tau}(x)$ − модифицированная функция Бесселя второго рода, определенная рядом

$$I_{i\tau}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+i\tau+1)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+i\tau}. \qquad (3)$$

Отметим следующее интегральное представление [2] для функции Макдональда (2):

$$K_{i\tau}(x)=\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch}u}\cos(\tau u)\,du. \qquad (4)$$

Преобразование Конторовича − Лебедева (1) имеет интегральную свертку, определенную двойным интегралом

$$(f*g)(t)=\frac{1}{2t}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{ty}{2u}-\frac{yu}{2t}-\frac{ut}{2y}}f(u)g(y)\,du\,dy. \qquad (5)$$

Обозначим через $L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)$ пространство суммируемых с квадратом функций с весом $x^{2\nu-1}$, норма которого определяется формулой

$$\|f\|_{\nu,2}=\left(\int_0^\infty x^{2\nu-1}|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}. \qquad (6)$$

Заметим, что в случае $\nu=1/2$ пространство $L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)$ совпадает с пространством $L_2(\mathbf{R}_+)$.

Установлено [1], что оператор Конторовича – Лебедева (1) ограничено действует из пространств функций $L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)$ с параметром $0<\nu<1$ в пространство $L_2(\mathbf{R}_+)$.

Показано [1], что свертка (5) функций $f(x)$ и $g(x)\in L_2(\mathbf{R}_+)$ существует и принадлежит пространству $L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)$ с параметром $\nu>1/2$. Кроме того, если $1/2<\nu<1$, то справедливы факторизационное равенство

$$\left[K_{i\tau}(f*g)\right](x)=\left[K_{i\tau}f\right](x)\left[K_{i\tau}g\right](x)$$

и равенство

$$(f*g)(x)=\frac{2}{\pi^2 x}\times$$
$$\times\int_0^\infty \tau\,\mathrm{sh}(\pi\tau)K_{i\tau}(x)K_{i\tau}[f]K_{i\tau}[g]d\tau \qquad (7)$$

для любого $x > 0$, где интеграл (7) абсолютно сходится.

Заметим, что равенство (7) позволяет определить свертку (5) как обратное преобразование Конторовича – Лебедева функции $K_{i\tau}[f]K_{i\tau}[g]$.

Преобразование по индексу с ядром, связанным с функцией Макдональда. Рассмотрим интегральное преобразование

$$\hat{F}(\tau)=\int_0^\infty M_{i\tau}(u)f(u)du, \qquad (8)$$

где специальная функция ядра определяется интегралом

$$M_{i\tau}(u)=\int_0^\infty e^{-u\,\mathrm{ch}\,t}\sin(\tau t)\,dt. \qquad (9)$$

Заметим, что интеграл (9) напоминает интегральное представление (4) для функции Макдональда $K_{i\tau}(x)$ и встречается в работе [3] в связи с исследованием одного класса преобразований по индексу. Используя метод работы [3], функцию (9) можно выразить через известные специальные функции [2] в следующем виде:

$$M_{i\tau}(u)=\frac{e^{-u}}{\tau}\,{}_2F_2\left(\frac{1}{2},\,1;\;1-i\tau,\,1+i\tau;\;2u\right)-$$
$$-\frac{\pi}{2\,\mathrm{sh}(\pi\tau)}\left[I_{i\tau}(u)+I_{-i\tau}(u)\right].$$

Лемма. Пусть $f(x)\in L_2(\mathbf{R}_+)$. Тогда преобразование (8) функции $f(x)$ существует и представимо в виде

$$\hat{F}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}F_s\left\{\tau;\;L\{f(x);\;\mathrm{ch}\,u\}\right\}, \qquad (10)$$

где F_s − оператор синус-преобразования Фурье, а L – оператор Лапласа от функции $f(x)$, вычисленный в точке $p=\mathrm{ch}\,u$, кроме того, $\hat{F}(x)\in L_2(\mathbf{R}_+)$.

Доказательство. Воспользуемся следующей оценкой [1]:

$$\left|K_{i\tau}(x)\right|\le e^{-\delta\tau}K_0(x\cos\delta),\; 0\le\delta<\frac{\pi}{2}. \qquad (11)$$

Предварительно оценим $\left|\hat{F}(\tau)\right|$ с помощью неравенства Гёльдера

$$\left|\hat{F}(\tau)\right|\le\|f\|_2\left(\int_0^\infty K_0^2(t)\,dt\right)^{1/2}. \qquad (12)$$

Подставляя (9) в интеграл (8), в силу оценки (12) на основании теоремы Фубини можем поменять порядок интегрирования и получим (10). Применяя обобщенное неравенство Минковского, покажем, что $[Lf](\mathrm{ch}\,u)\in L_2(\mathbf{R}_+)$. Действительно,

$$\left\|[Lf](\mathrm{ch}\,u)\right\|_2=\left(\int_0^\infty\left|\int_0^\infty e^{-x\,\mathrm{ch}\,u}f(x)dx\right|^2du\right)^{1/2}\le$$
$$\le\left(\int_0^\infty|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty e^{-2x\,\mathrm{ch}\,u}du\right)^{1/2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\|f\|_2.$$

Последнее равенство следует из формулы (2.16.2.1) [4]. Далее, исходя из равенства Парсеваля для композиции (10), можем заключить, что $\hat{F}(x)\in L_2(\mathbf{R}_+)$. Лемма доказана.

Интегральная свертка, связанная с преобразованием Конторовича – Лебедева. В работе изучаются свойства свертки $(f\,\hat{*}\,g)$ двух функций f и g, определенной обратным преобразованием Конторовича – Лебедева функции $\hat{F}(\tau)K_{i\tau}[g]$:

$$(f\,\hat{*}\,g)(x)=\frac{2}{\pi^2 x}\times$$
$$\times\int_0^\infty\tau\,\mathrm{sh}(\pi\tau)K_{i\tau}(x)\hat{F}(\tau)K_{i\tau}[g]d\tau. \qquad (13)$$

Теорема 1. Пусть $f(x)\in L_2(\mathbf{R}_+)$, $G(x)$ – преобразование Конторовича – Лебедева функции $g(y)$ и $G(x)\in L_1\left(xe^{(\pi-\delta)x};\mathbf{R}_+\right)$, где $0\le\delta<\pi/2$. Тогда свертка (13) функций $f(x)$ и $g(x)$ существует и принадлежит пространству $L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)$, где $\nu>1$.

Доказательство. Используя оценку (12), будем иметь

$$\left|(f\,\hat{*}\,g)(x)\right|\le C\frac{K_0(x\cos\delta)}{x}\|f\|_2\|G\|_{L_1\left(xe^{(\pi-\delta)x};\mathbf{R}_+\right)},$$

где $C>0$. Тогда при условиях теоремы получим

$$\|f\,\hat{*}\,g\|_{\nu,2}=\left(\int_0^\infty x^{2\nu-1}\left|(f\,\hat{*}\,g)(x)\right|^2dx\right)^{1/2}\le$$
$$\le C\|f\|_2\|G\|_{L_1\left(xe^{(\pi-\delta)x};\mathbf{R}_+\right)}\left(\int_0^\infty x^{2\nu-3}K_0^2(x\cos\delta)\,dx\right)^{1/2}.$$

Учитывая асимптотические свойства функции Макдональда [2, 1]

$$K_\nu(x)=O\left(e^{-x}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\right),\; x\to+\infty, \qquad (14)$$

$$K_0(x)=O(\ln x),\; x\to 0+, \qquad (15)$$

можно заключить, что интеграл в правой части последнего неравенства сходится при $\nu>1$. Теорема доказана.

Для функций $f(x)\in L_{\nu,2}(\mathbf{R}_+)$ с параметром $1\le\nu<1+\varepsilon_0$, $\varepsilon_0>0$, определим преобразование Конторовича – Лебедева следующим образом:

$$K_{i\tau}[f]=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^\infty K_{i\tau}(x)f(x)x^{\varepsilon}dx,\quad 0<\varepsilon\le\varepsilon_0. \quad (16)$$

Теорема 2. Пусть $f(x),g(x)\in L_2(\mathbf{R}_+)$. Тогда преобразование Конторовича – Лебедева (16) свертки (13) существует и справедливо факторизационное равенство

$$K_{i\tau}[(f\hat{*}g)]=\hat{F}(\tau)K_{i\tau}[g]. \quad (17)$$

Доказательство. Пусть $\exists\varepsilon_0:1\le\nu<1+\varepsilon_0$, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$. Тогда

$$K_{i\tau}\left[\left(f\hat{*}g\right)\right]=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty K_{i\tau}(x)\frac{2}{\pi^2}x^{\varepsilon-1}\int_0^\infty\mu\,\mathrm{sh}(\pi\mu)\times$$

$$\times K_{i\mu}(x)\hat{F}(\mu)K_{i\mu}[g]d\mu dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty\mu\,\mathrm{sh}(\pi\mu)\times$$

$$\times\hat{F}(\mu)K_{i\mu}[g]\int_0^\infty K_{i\tau}(x)K_{i\mu}(x)\frac{dx}{x^{1-\varepsilon}}dxd\mu.$$

Изменение порядка интегрирования законно на основании теоремы Фубини в силу абсолютной сходимости последнего интеграла, которую покажем ниже.

Вычисляя внутренний интеграл по формуле (2.16.33.2) из [4], после применения формулы дополнения для гамма-функции [2, 1] и разложения полученной дроби на простые дроби, будем иметь

$$K_{i\tau}\left[\left(f\hat{*}g\right)\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\cdot 2^{\varepsilon-1}}{\pi^2\tau\Gamma(\varepsilon+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sgn}\,\mu\,\mathrm{sh}(\pi\mu)}{\varepsilon^2+(\tau-\mu)^2}\hat{F}(\mu)K_{i\mu}[g]\times$$

$$\times\left|\Gamma\left(\frac{\varepsilon+i(\tau+\mu)}{2}+1,\ \frac{\varepsilon+i(\tau-\mu)}{2}+1\right)\right|^2d\mu-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\cdot 2^{\varepsilon-1}}{\pi^2\tau\Gamma(\varepsilon+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sgn}\,\mu\,\mathrm{sh}(\pi\mu)}{\varepsilon^2+(\tau+\mu)^2}\hat{F}(\mu)K_{i\mu}[g]\times$$

$$\times\left|\Gamma\left(\frac{\varepsilon+i(\tau+\mu)}{2}+1,\ \frac{\varepsilon+i(\tau-\mu)}{2}+1\right)\right|^2d\mu.$$

Совершив замену переменной $\mu=\tau-\varepsilon t$ в первом интеграле и $\mu=\varepsilon t-\tau$ во втором, в результате несложных преобразований приходим к соотношению

$$K_{i\tau}[(f\hat{*}g)]=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2^{\varepsilon}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sgn}(\tau-\varepsilon t)\mathrm{sh}\,\pi(\tau-\varepsilon t)}{\pi\tau(1+t^2)\Gamma(\varepsilon+1)}\times$$

$$\times\left|\Gamma\left(\frac{\varepsilon+i(2\tau-\varepsilon t)}{2}+1,\ \frac{\varepsilon+i\varepsilon t}{2}+1\right)\right|^2\times$$

$$\times\hat{F}(\tau-\varepsilon t)K_{i\tau-\varepsilon t}[g]dt. \quad (18)$$

Из асимптотической формулы [1, 2]

$$|\Gamma(x+iy)|=\sqrt{2\pi}|y|^{x-1/2}e^{-\pi|y|/2}\left(1+O\left(y^{-1}\right)\right),\ |y|\to\infty,$$

следует, что при $t\to\infty$ произведение гамма-функций в (18) равно

$$O\left(|t|^{2+2\varepsilon}e^{-\pi|\tau-\varepsilon t/2|-\pi|\varepsilon t/2|}\right),\ \tau>0,\ 0\le\varepsilon<\varepsilon_0.$$

Далее используя формулы (11), (12), лемму, можем оценить абсолютную величину подынтегрального выражения в (18) с помощью следующей формулы:

$$\frac{C}{\pi\tau}\frac{|t|^{2+2\varepsilon}}{1+t^2}\exp\left(\pi|\tau-\varepsilon t|-\pi\left|\tau-\frac{\varepsilon t}{2}\right|-\pi\left|\frac{\varepsilon t}{2}\right|-\delta|\tau-\varepsilon t|\right),$$

где $C>0$, $0\le\delta<\pi/2$, $0\le\varepsilon<\varepsilon_0$, $\tau>0$. Выбираем такое $\delta\in[0,\ \pi/2)$, чтобы интеграл (18) абсолютно и равномерно по $\varepsilon\ge 0$, $\tau\in\mathbf{R}_+$ сходился. Тогда на основании мажорантной теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла будем иметь

$$K_{i\tau}[(f\hat{*}g)]=\hat{F}(\tau)K_{i\tau}[g]\times$$

$$\times\frac{\Gamma(1+i\tau)\Gamma(1-i\tau)}{\pi\tau}\mathrm{sh}(\pi\tau)\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}.$$

Применяя формулу дополнения для гамма-функции [2], получим (17). Теорема доказана.

Заключение. Построена интегральная свертка (13), связанная с преобразованием Конторовича – Лебедева. Установлены условия существования и доказано факторизационное равенство.

Литература

1. Yakubovich, S. B. Index transforms / S. B. Yakubovich. – Singapore: World Scientific Publishing Company, 1996. – 252 p.
2. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1965–1967. – Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – 1966. – 295 с.
3. Яроцкая, Л. Д. Некоторые функции бесселевого типа, связанные с функцией Макдональда / Л. Д. Яроцкая // Труды БГТУ. – 2011. – № 6: Физ.-мат. науки и информатика. – С. 18–20.
4. Прудников, А. П. Интегралы и ряды: в 3 т. / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М.: Наука, 1981–1986. – Т. 2: Специальные функции. – 1983. – 800 с.

Поступила 28.02.2012