

РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ ПО РАЗРУШАЮЩИМ НАГРУЗКАМ.

ВВЕДЕНИЕ.

Современные методы расчета сооружений исходят из допускаемых напряжений, которые не должны быть превзойдены ни в одном из элементов сооружения. При этом как сооружение в целом, так и его отдельные элементы предполагаются работающими вполне упруго. Величина допускаемых напряжений обычно определяется коэффициентом безопасности, исчисляемым по отношению к пределу текучести для упруго-пластичных материалов и по отношению к временному сопротивлению для хрупких материалов. Коэффициент безопасности представляет собою запас на неучтенные расчетом, случайные напряжения (дополнительные, местные, начальные и т. д.), могущие иметь место в условиях эксплуатации сооружения.

Эта теория не дает правильного представления о несущей способности сооружения. Предполагаемое равномерное возрастание всех категорий напряжений до разрушающего предела не имеет места в действительности, т. к. разрушению, в большинстве случаев, предшествует неупругое состояние, которое влечет за собою известное перераспределение напряжений. Например, достижение предела текучести в одной точке сооружения не влечет за собою потери работоспособности. Последняя может наступить лишь тогда, когда предельное напряжение будет достигнуто по всему сечению и только в том случае, когда данный элемент в сооружении является безусловно необходимым.

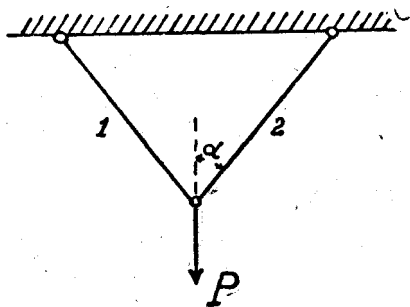
Отсутствие прямой пропорциональности между нагрузкой и напряжениями за пределом упругости приводит к невозможности установить обычным методом несущую способность сооружения. Поэтому и коэффициент безопасности, принятый, как отношение предельного и допускаемого напряжений, является лишь условным понятием, не дающим представления о действительном запасе прочности. В таком виде коэффициент безопасности относится к материалу, а не к конструкции.

За коэффициент безопасности конструкции следует принимать отношение предельной нагрузки к допускаемой.

Если для простейших статически определимых конструкций коэффициент безопасности для материала может быть равным коэффициенту безопасности конструкции, то для статически неопределимых сооружений эти коэффициенты всегда различны.

Наличие лишних связей в статически неопределимой системе создает дополнительные условия, способствующие перераспределению усилий за пределами упругости. В самом деле, если в каком-либо элементе статически неопределимой системы напряжения перейдут за пределы упругости, то в элементе появятся пластические деформации. Развитию пластических деформаций будут препятствовать остальные элементы системы, работающие упруго, и при дальнейшем росте нагрузки усилия перераспределятся таким образом, что на рассматриваемый элемент будет передаваться усилие, соответствующее его действительной деформации в системе, т. е. меньше того, которое испытывал бы стержень, деформируясь самостоятельно. При достижении в данном элементе предела текучести, усилие в элементе остается постоянным и при последующем нарастании нагрузки данный элемент как бы выключается из работы, тогда как в остальных элементах системы усилия продолжают расти. Подобным же образом могут выключиться остальные лишние элементы, не нарушая работоспособности всей системы.

Несущая способность сооружения будет исчерпана только тогда, когда предел текучести будет достигнут в одном из необходимых стержней, обеспечивающем геометрическую неизменяемость системы.



Черт. 1.

Сказанное можно иллюстрировать простым примером (черт. 1).

Статически определимая конструкция состоит из двух стальных стержней одинакового поперечного сечения, соединенных шарнирно, и подвергается воздействию груза P .

Коэффициент безопасности принят: $n = \frac{\sigma_s}{R_z}$, где

σ_s — предел текучести,

R_z — допускаемое напряжение при растяжении.

Усилие в стержнях: $S_1 = S_2 = \frac{P}{2 \cos \alpha}$.

Допускаемая нагрузка: $P_{\text{доп}} = 2F \cos \alpha \cdot R_z$.

Предельная (разрушающая) нагрузка: $P_{\text{пр}} = 2F \cos \alpha \cdot \sigma_s$.

Коэффициент запаса конструкции:

$$n_k = \frac{P_{\text{пр}}}{P_{\text{доп}}} = \frac{2F \cos \alpha \cdot \sigma_s}{2F \cos \alpha \cdot R_z} = \frac{\sigma_s}{R_z} = n_s$$

т. е. коэффициент запаса для элемента и всей конструкции совпадают, и обычный метод расчета оказывается справедливым.

Теперь рассмотрим статически неопределимую систему, состоящую из трех стержней равного сечения, т. е. имеющую один лишний стержень (черт. 2).

Коэффициент запаса для материала (отдельных элементов):

$$n = \frac{\sigma_s}{R_z}$$

Пока система работает упруго, усилия в стержнях:

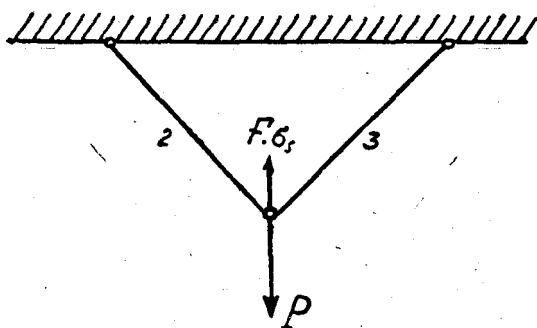
$$S_1 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

$$S_2 = S_3 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} S_1 > S_2$$

При обычном методе расчета работоспособность системы считается исчерпанной, если напряжение в одном из стержней достигнет σ_s .

При этом предельная нагрузка:

$$P'_{\text{пр}} = F \sigma_s (1 + 2 \cos^3 \alpha)$$



Черт. 3.

На самом деле появление текучести в среднем стержне не означает разрушения системы. Стержень 1 может быть исключен и вместо него приложено усилие $-F \sigma_s$ (черт. 3).

Получается статически определимая система, способная нести нагрузку. При этом усилие в стержнях:

$$S_2 = S_3 = \frac{P - F \cdot \sigma_s}{2 \cos \alpha}.$$

Действительная потеря работоспособности системы наступит тогда, когда в стержнях основной системы (черт. 3) напряжения достигнут предела текучести:

$$F \sigma_s = \frac{P_{\text{пр}} - F \sigma_s}{2 \cos \alpha}.$$

Действительная предельная (разрушающая) нагрузка:

$$P_{\text{пр}} = F \sigma_s (1 + 2 \cos \alpha) > P'_{\text{пр}}.$$

Если допускаемая нагрузка исчисляется общепринятым способом:

$$P_{\text{доп}} = FR(1 + 2 \cos^3 \alpha),$$

то коэффициент запаса конструкции:

$$n_k = \frac{P_{\text{пр}}}{P_{\text{доп}}} = \frac{1 + 2 \cos \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \frac{\sigma_s}{R} = \frac{1 + 2 \cos \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} n, \text{ т. е. } n_k > n;$$

при $\alpha = 30^\circ$, $n_k = 1,18$.

Отсюда становится очевидным, что рассчитанные обычными приемами статически неопределимые конструкции, в смысле несущей способности обладают значительно большим коэффициентом запаса, чем принятый при проектировке.

Почти все строительные конструкции при выполнении становятся статически неопределимыми (жесткость узлов, опорных закреплений и т. д.). Поэтому сказанное в той или иной степени может быть отнесено к любым сооружениям, а если это так, то можно утверждать, что почти все сооружения обладают излишним запасом прочности.

Правда, следует иметь в виду некоторые конструкции специального назначения, для которых несущая способность не является решающим фактором. Превалирующее значение могут иметь условия жесткости, необходимость отсутствия трещин и т. д. Конечно, к таким конструкциям изложенные выше соображения не применимы.

Все же для большинства строительных сооружений несущая способность стоит на первом месте, и при проектировании таких сооружений следует переходить на новые методы расчета, обеспечивающие более полное использование материала с учетом его пластических свойств.

Материалами для настоящего труда послужили иностранные теоретические и экспериментальные работы, а также исследования, произведенные автором в механической лаборатории ЛИИЖТ в 1935—36 гг.

Глава I.

Работа статически неопределимой системы под повторными и переменными нагрузками.

Выше было показано поведение статически неопределимой системы при постоянной нагрузке. В этой главе рассматривается более общий случай, т. е. влияние нагрузок повторных и переменных на несущую способность статически неопределимых сооружений.

§ 1. Влияние повторных нагрузок.

Если система содержит лишний стержень a и при первом нагружении напряжение в нем превзойдет предел упругости, то стержень получит пластическую деформацию.

Полное удлинение этого стержня:

$$\Delta_a = \Delta_a^{\text{упр}} + \Delta_a^{\text{ост}} \frac{X_a l}{EF} + \Delta_a^{\text{ост}} = X_a \cdot \rho + \Delta_a^{\text{ост}}, \quad (1)$$

где X_a —усилие в лишнем стержне,

$$\rho = \frac{l}{EF}.$$

Если положить $X - \sigma_e F = Y$,

где σ_e —напряжение, соответствующее пределу упругости,

$$\text{то} \quad \Delta_a = X_a \cdot \rho + f(Y). \quad (1-a)$$

Поскольку предел упругости превзойден только в данном лишнем стержне, а все остальные стержни системы работают упруго, то удлинение лишнего стержня ограничивается жесткостью системы и по теореме Мора:

$$\Delta_a = \Sigma S_a S_o \rho - X_a S_a^2 \rho, \quad (2)$$

где S_o —усилие в элементе основной (статически определимой) системы от действующей нагрузки,

S_a —усилие в том же элементе от действия $X_a = 1$.

Совместное решение уравнений (1) и (2) удобнее всего произвести графически. Уравнение (1) графически может быть

представлено обычной диаграммой растяжения или сжатия стержня. Для построения уравнения (2) отложим по оси ординат усилие X_a , а по оси абсцисс деформации Δ_a (черт. 4).

Полагая $\Delta_a = 0$, получим из уравнения (2):

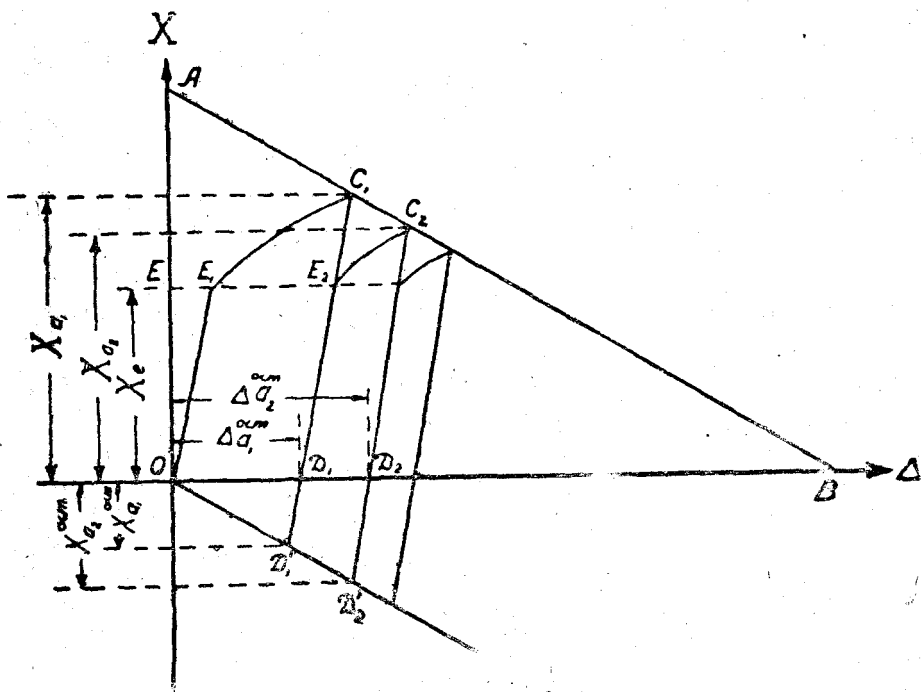
$$X_a^o = \frac{\sum S_a S_o \rho}{\sum S_a^2 \rho},$$

откладывая по оси ординат $OA = X_a^0$, получим точку A ,

при $X_a = 0$

$$\Delta_a^o = \Sigma S_a S_{op}.$$

Отложим по оси абсцисс отрезок $OB = \Delta_a^0$, получим точку B .



Черт. 4.

Прямая AB изображает уравнение (2) и ограничивает возможные значения X_a .

Нанесем на этом же чертеже линию OEC , изображающую уравнение (1). Очевидно, что эта линия может быть продолжена только до точки C , т. к. дальнейшему удлинению стержня воспрепятствует жесткость всей системы. Если разгрузить систему, то усилия S_0 обратятся в нуль, но т. к. в стержне a

имеется остаточная деформация $\Delta_{a_1}^{\text{ост}}$, то усилия S_a и X_a не будут равны нулю.

Положив в уравнении (2) $S_0 = 0$, получим: $\Delta_{a_1}^{\text{ост}} = -X_{a_1} \Sigma S_{a_1}^2 \rho$, откуда:

$$X_{a_1} = -\frac{\Delta_{a_1}^{\text{ост}}}{\Sigma S_{a_1}^2 \rho}. \quad (3)$$

$X_{a_1}^{\text{ост}}$ — начальное усилие в стержне a , являющееся следствием остаточной деформации в этом стержне, вызванной первым нагружением системы, и представляет собой воздействие остальных стержней на лишний стержень a .

Построим на чертеже уравнение (3). При $\Delta_a^{\text{ост}} = 0$ $X_a^{\text{ост}} = 0$, т. е. получим прямую, проходящую через начало координат. Уравнение (3) изображается прямой OD , которая, как нетрудно убедиться, параллельна прямой AB .

Итак, после первого цикла нагружения по кривой $OE_1 C_1 D$ в стержне окажется остаточная деформация $\Delta_{a_1}^{\text{ост}} = OD_1$ и начальное усилие

$$X_{a_1}^{\text{ост}} = D_1' D_1'' = -\frac{\Delta_{a_1}^{\text{ост}}}{\Sigma S_{a_1}^2 \rho}.$$

При втором цикле нагрузки внешние силы вначале преодолеют начальное усилие $X_{a_1}^{\text{ост}}$, а затем повысят напряжение в стержне до предела упругости (точка E_2); за пределом упругости в стержне вновь появятся пластические деформации, рост которых ограничивается точкой C_2 , лежащей на прямой AB . Отсюда видно, что предел упругости при втором цикле достигается в стержне a при затрате большего усилия, чем при первом цикле. При этом усилие в стержне X_{a_2} будет меньше, чем в первом цикле X_a . После второго цикла (после второй разгрузки) начальное усилие будет $D_2' D_2'' = X_{a_2}^{\text{ост}}$, а усилие при 3-й загрузке — $C_3 D = X_{a_3} < X_{a_2}$.

Таким образом, при последующих циклах нагрузки усилия в лишнем стержне будут все время уменьшаться, пока не достигнут значения, отвечающего пределу упругости OE .

При этом будет достигнута максимальная остаточная деформация — $\Delta_a = OD_4$.

§ 2. Влияние температуры и осадки опор.

Если имеет место сдвиг опор или температурное воздействие, то деформация лишнего стержня a статически неопределимой системы определится уравнением:

$$\Delta_a = \Sigma S_a S_{0\rho} + \Sigma S_a \alpha t l - X \Sigma S_a^2 \rho. \quad (4)$$

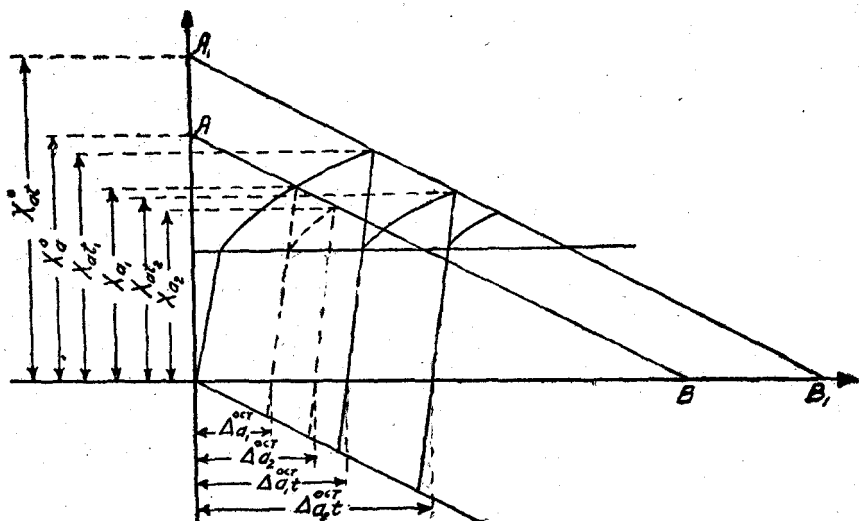
Это уравнение на черт. 5 представится прямой A_1B_1 , параллельной AB .

При $\Delta_a = 0$

$$X_a^0 = \frac{\Sigma S_a S_0 \rho + \Sigma S_a \cdot \alpha \cdot t \cdot l}{\Sigma S_a^2 \rho} = \frac{\Sigma S_a S_0 \rho}{\Sigma S_a^2 \rho} + \frac{\Sigma S_a \cdot \alpha \cdot t \cdot l}{\Sigma S_a^2 \rho},$$

т. е. прямая A_1B_1 сдвинута по отношению к AB по вертикали вверх на

$$\frac{\Sigma S_a \cdot \alpha \cdot t \cdot l}{\Sigma S_a^2 \cdot \rho}.$$



Черт. 5.

При $X_a = 0$, $\Delta_a = \Sigma S_a S_0 \rho + \Sigma S_a \alpha t l$

и прямая A_1B_1 сдвинута по отношению к AB по горизонтали на величину $\Sigma S_a \alpha t l$.

Из чертежа видно, что

$$X_{at_1} - X_{a_1} < X_{at} - X_a \dots \text{и далее:}$$

$$X_{at_2} - X_{a_2} < X_{at_1} - X_{a_1},$$

$$X_{at_n} - X_{a_n} < X_{at_{n-1}} - X_{a_{n-1}},$$

т. е. влияние температурных деформаций на усилие уже при первой нагрузке значительно меньше, чем в упругой области и уменьшается при каждом последующем цикле нагрузки. С другой стороны,

$$\Delta_{at}^{\text{ост}} > \Delta_a^{\text{ост}},$$

т. е. остаточные деформации увеличиваются.

Теперь можно сделать окончательный вывод, что одновременное действие нагрузки, сдвига опор и температуры после достаточного числа циклов нагрузки вызывает во всех стержнях стати-

чески неопределимой системы те же усилия, что и действие одной нагрузки, т. е. усилия, приближающиеся к пределу упругости. Изменение температуры и осадка опор только увеличивают остаточные деформации, которые однако возрастают не безгранично, а лишь до некоторого предела, зависящего от предела упругости.

§ 3. Влияние знакопеременных нагрузок.

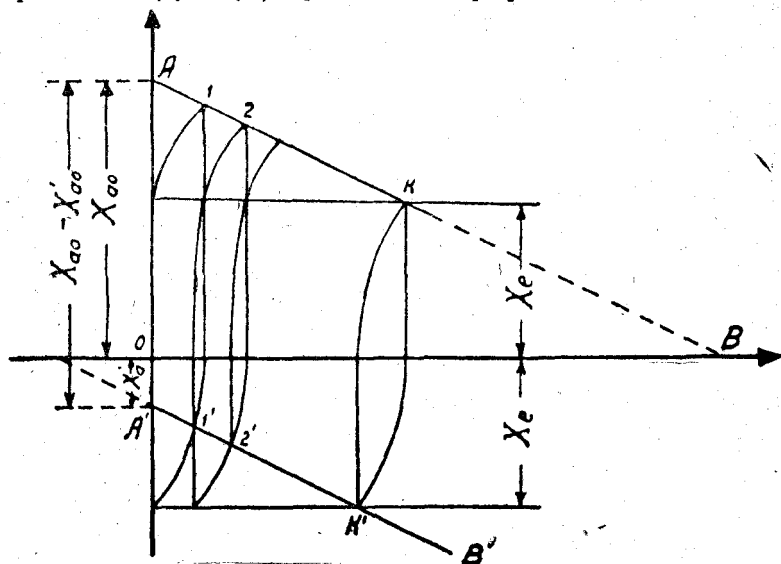
Рассмотрим систему с лишним стержнем a , находящуюся под действием знакопеременной нагрузки. Уравнения, изображающие деформацию стержня a , будут иметь следующий вид: при положительной нагрузке

$$\Delta a = \Sigma S_a S_o \rho - X_a \Sigma S_a^2 \rho, \quad (1)$$

при отрицательной нагрузке

$$-\Delta_a' = \Sigma S_a' S_o' \rho - X_a' \Sigma S_a'^2 \rho. \quad (1')$$

Уравнения (1) и (1') представим графически.



Черт. 6.

Для простоты построений пренебрежем упругими деформациями (черт. 6). Уравнение (1) изобразится прямой AB :

$$OA = X_{ao} = \frac{\Sigma S_a S_o \rho}{\Sigma S_a^2 \rho}; \quad OB = \Delta_{ao} = \Sigma S_a S_o \rho.$$

Уравнение (1') изобразится прямой $O'A'B'$:

$$OA' = X_{a_o}' = -\frac{\Sigma S_a' S_o' \rho}{\Sigma S_a'^2 \rho},$$

$$OO' = \Delta_{a_o}' = -\Sigma S_a' S_o' \rho.$$

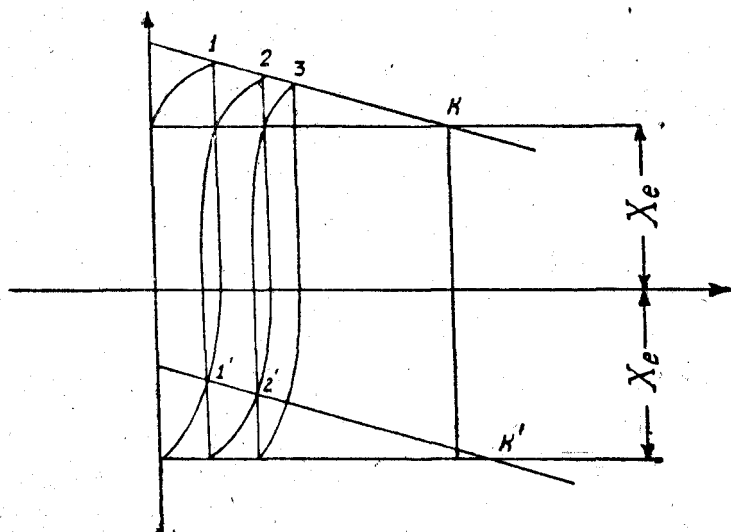
Кривая 0—1 соответствует загрузке, 1—1' изображает разгрузку до нуля, далее, на участке 1'—1'—нагрузку обратного знака (последняя кривая, по Баушингеру, сразу начинается с пластической стадии).

Кривая 1'—2 изображает второй цикл нагрузки, кривая 2—2'—цикл разгрузки, 2'—2'—цикл нагрузки обратного знака и т. д.

Точки 1, 2,... перемещаются по прямой АВ и останавливаются в точке К, соответствующей пределу упругости.

Точки 1', 2',... перемещаются по прямой А'В' и останавливаются в точке К'.

Если $X_{a0} - X'_{a0} > 2X_e$, где X_e —усилие, соответствующее пределу упругости ($X_e = \sigma_e F$), то точка К находится правее точки К' и получается замкнутая петля К'—К—К'.



Черт. 7.

При положительной нагрузке остаточная деформация

$$\Delta_{\text{ост}} = (X_{a0} - X'_{a0} - 2X_e) \Sigma S_a^2 \rho.$$

При отрицательной нагрузке

$$\Delta_{\text{ост}} = -(X_{a0} - X'_{a0} - 2X_e) \Sigma S_a^2 \rho.$$

В том случае, когда амплитуда циклов нагрузки

$$X_{a0} - X'_{a0} \leq 2X_e,$$

петля приближается к двум прямым (черт. 7). И в результате стержень испытывает только упругие деформации:

$$+2X_e \rho \text{ и } -2X_e \rho.$$

Таким образом, в статически неопределимой системе, в отличие от статически определимой, после достаточного числа циклов знакопеременной нагрузки усилия понижаются до величины, соответствующей пределу упругости, и наступает установившееся состояние, при условии, что в основной (статически определимой) системе предел упругости не превзойден.

Остаточные деформации не превосходят некоторой определенной величины, достигнутой при переходе за предел упругости. После достаточного числа циклов напряжения колеблются в пределах от $+\sigma_e$ до $-\sigma_e$.

Разрушение системы невозможно, если амплитуда циклов меньше удвоенного предела упругости (гистерезисная петля обращается в прямую). В противном случае можно ожидать разрушения после весьма большого числа циклов нагрузки.

Приведенные исследования можно распространить на системы с любым числом лишних стержней или связей, и тогда становится очевидным высказанное проф. Грюнингом положение:

Если в n лишних стержнях (или связях) n раз статически неопределимой системы напряжения под действием внешней нагрузки переходят за предел упругости, то при повторных нагрузках того же характера напряжения снижаются до предела упругости при условии, что в стержнях основной системы напряжения не превосходят предела упругости. Это же явление наблюдается и в том случае, когда предел упругости превзойден в тех стержнях основной системы, в которых, по условиям равновесия, усилия уменьшаются одновременно с усилиями в лишних стержнях. Только в том случае, когда в отдельных элементах основной системы усилия возрастают при уменьшении усилий в лишних стержнях, может иметь место накопление остаточных деформаций, приводящее к разрушению.

Это свойство статически неопределимых систем обнаруживает их существенное преимущество перед статически определимыми. Последнее еще более становится очевидным, если учесть, что температурное воздействие и осадка опор не оказывают на усилие существенного воздействия. Как известно, не так давно применение неразрезных ферм тормозилось опасениями вредных последствий осадки опор, и только последние исследования рассеивают эти опасения. Грюнинг получил разрушающую нагрузку для решетчатой фермы на 4-х опорах на 16% выше разрушающей нагрузки для фермы такого же пролета на 2-х опорах. Знакопеременные нагрузки оказываются также менее опасными для статически неопределимой системы, чем для статически определимой.

Полное использование преимущества статически неопределимых систем возможно только при учете пластических свойств материала, и это должно найти отражение в приемах расчета.

Необходимо однако иметь в виду, что исследованиями Грюнинга не освещено влияние подвижных нагрузок, которое оказывается менее благоприятным и налагает дополнительные ограничения. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен позднее.

Глава II.

Основы метода расчета.

§ 4. Общие принципы расчета по разрушающим нагрузкам.

Приведенное выше исследование работы статически неопределимой системы под постоянной и повторными нагрузками показало, что работоспособность системы определяется не величиной напряжений в отдельных элементах, а состоянием системы в целом.

Поскольку разрушение n раз статически неопределимой системы становится неизбежным только тогда, когда в $n + 1$ элементах достигнуты предельные усилия, постольку не имеет смысла вести расчет по допускаемым напряжениям.

Для оценки действительной работоспособности сооружения следует вести расчет по несущей способности, приняв за коэффициент безопасности отношение предельной (разрушающей) нагрузки к допускаемой.

Несущая способность определяется с допуском в лишние элементы системы пластических деформаций.

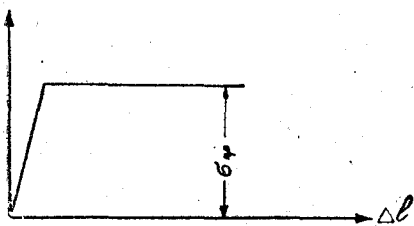
Необходимой предпосылкой такого метода расчета является пластичность материала, которая обеспечивает выравнивание напряжений и позволяет путем задания предельных значений лишних неизвестных свести расчет статически неопределимой системы к расчету основной статически определимой системы.

При этом в качестве рабочей гипотезы вводится понятие об идеально упруго-пластичном материале или элементе конструкции. Основным свойством такого материала или элемента является способность работать совершенно упруго, пока напряжение не достигает некоторой предельной величины. По достижении этого предела материал работает совершенно пластично, т. е. напряжение остается постоянным, а деформации могут расти неограниченно. Пока предельное напряжение не достигнуто, предполагается, что увеличению деформаций соответствует увеличение напряжения, причем зависимость между деформацией и напряжением, вообще говоря, может быть произвольной. При обратном знаке деформации предполагаются такие же свойства и наличие минимального предельного напряжения.

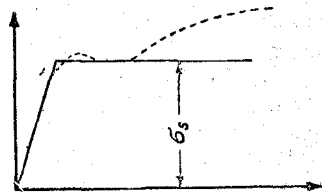
В итоге напряжение принимается, как неубывающая функция деформации и ограничивается условиями:

$$|\min \sigma_{np}| \leq |\sigma| \leq |\max \sigma_{np}|.$$

Работа упруго-пластичного элемента в случае прямолинейной зависимости между напряжением и деформацией в упругой стадии может быть изображена диаграммой, показанной на черт. 8. Подобную диаграмму можно получить при растяжении мягкой стали, путем схематизации обычной диаграммы растяжения. В этом случае за предельное напряжение принимается предел текучести, а область самоупрочнения игнорируется, т. е. предполагается, что конец площадки текучести в элементе конструкции не может быть достигнут (черт. 9).



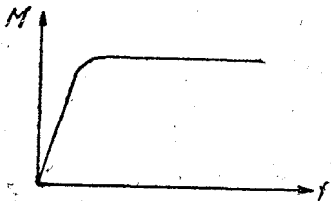
Черт. 8.



Черт. 9.

С практической точки зрения эта погрешность является только кажущейся, т. к. при длинной площадке текучести в элементе до появления упрочнения развиваются столь значительные деформации, что конструкция становится неустойчивой. В том случае, когда площадка текучести мала, пренебрежение самоупрочнением идет в запасе прочности.

Аналогичную картину можно получить для однородного элемента, работающего на изгиб, если принять в качестве деформации прогиб, а в качестве усилия изгибающий момент (черт. 10).



Черт. 10.

Как показали экспериментальные исследования стальных балок, изгибающий момент при развитии пластических деформаций асимптотически весьма быстро приближается к предельному значению при одновременном нарастании кривизны.

Таким образом, предлагаемый метод оказывается вполне пригодным для стальных балок, если исходить из предельной величины момента, определяемой при условии, что напряжения в растянутой зоне сечения равны пределу текучести при растяжении, а в сжатой — пределу текучести при сжатии.

Для железобетонных балок зависимость между кривизной и моментом также изображается диаграммой с площадкой текучести, т. к. изгибающий момент растет с увеличением кривизны, пока напряжения в арматуре не достигнут предела текучести,

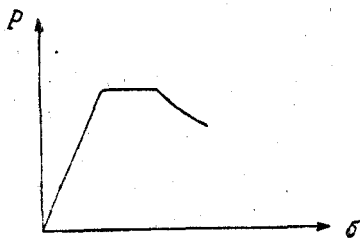
при дальнейшем увеличении кривизны момент остается практически постоянным (Гвоздев и Боришанский—„К вопросу о расчете изгибаемых ж/б элементов“. „Проект и стандарт“, 1934 г. № 6), т. е. сделанные предположения могут быть распространены и на железобетонные конструкции, работающие на изгиб.

При расчете сквозных ферм приходится рассматривать сжатые стержни. В случае сжатых стержней вопрос осложняется явлением продольного изгиба. Если рассматривать зависимость между сближением концов стержня и продольной силой, то пока усилие не достигнет критической (эйлеровой) силы, эта зависимость прямолинейна, и сила растет пропорционально деформации. При достижении продольной силой критической величины сближение концов нарастает при почти постоянной продольной силе, т. е. на диаграмме имеется площадка текучести. Однако эта площадка невелика, т. к. в выпучивающемся стержне быстро нарастают напряжения на вогнутой стороне и при достижении предела текучести в этом месте продольная сила начинает падать (проф. Рабинович—„Об устойчивости сжатых стержней статически неопределимых ферм“), и диаграмма работы элемента получает вид, изображенный на чертеже 11.

Отсюда следует вывод, что общий метод может быть применен к расчету систем, содержащих сжатые элементы, с известной осторожностью и только в том случае, если перераспределение усилий в системе наступит раньше, чем будет достигнут конец площадки текучести и потери устойчивости в одном из сжатых элементов.

Все приведенные примеры подтверждают, что большинство элементов строительных конструкций достаточно близко удовлетворяет условиям упруго-пластичной работы и, следовательно, метод расчета является приемлемым для обширного класса сооружений. Как видно из предыдущего, расчет по новому методу сводится к определению разрушающей нагрузки в предположении, что на величину последней условия деформации не влияют и для решения задачи надо учесть лишь условия равновесия и предельные условия для элементов системы. Поскольку уравнения равновесия содержат геометрические величины (координаты, пролеты и т. д.), постольку пользование ими при игнорировании деформаций допустимо лишь тогда когда деформации достаточно малы. Следовательно, применить метод возможно только к системам достаточно жестким, каковыми является большинство строительных конструкций.

Оценивая рекомендуемый „пластичный“ метод расчета по сравнению с обычным упругим, следует отметить его существенные преимущества: во-первых, он дает более правильную меру



Черт. 11.

безопасности и потому более экономичен; во-вторых, он прост и требует не много времени, так как при расчете статически неопределимых систем лишние неизвестные могут быть заданы на основании условий равновесия и предельных условий, и отпадает надобность в кропотливом и громоздком отыскании этих неизвестных, что неизбежно при упругом расчете.

С другой стороны, его недостатки заключаются в том, что он не дает представления о распределении напряжений в промежуточных стадиях нагрузки и картины нарастания деформаций, так что возможны опасения, что в известных случаях деформации могут оказаться большими.

Во всяком случае, несомненно, что при правильном применении, с соблюдением перечисленных выше ограничений, метод заслуживает практического использования и окажется выгодным в очень многих случаях строительной практики.

Глава III.

Расчет балок.

При расчете балок по упруго-пластичному методу предполагаются справедливыми следующие положения:

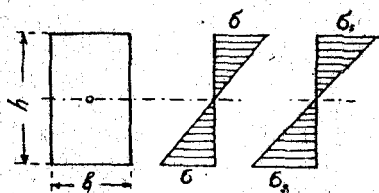
1. Гипотеза об идеально упруго-пластичной работе, которая, как показано выше для однородного изгибаемого элемента, достаточно близко соответствует действительности.

2. Гипотеза Бернулли о плоских сечениях, распространенная на случай пластических деформаций, также подтверждена опытами.

§ 5. Работа сечения.

Пусть балка из однородного упруго-пластичного материала деформируется под действием изгибающего момента.

Пока деформации вполне упруги и закон Гука справедлив, нормальные напряжения в сечении распределяются по закону



Черт. 12.

треугольника (черт. 12). Напряжения в крайних фибрах определяются обычным способом: $\sigma =$

$$= \frac{M}{W}.$$

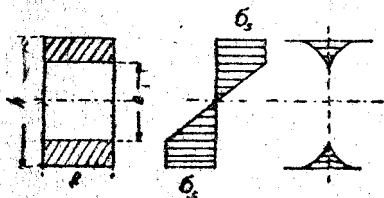
Такое распределение сохраняется, пока напряжения по краю сечения не достигнут определенной величины, превзойти которую они не могут по

свойству упруго-пластичного материала. За предельное напряжение здесь можно принять предел текучести σ_s , причем будем считать, что σ_s для растянутых и сжатых волокон по абсолютной величине одинаков.

Предельное состояние при чисто упругой работе сечения определяется уравнениями:

$$\sigma_s = \frac{M_s}{W}, \text{ или } M_s = \sigma_s W.$$

При дальнейшем увеличении M напряжение по краю остается равным σ_s , но такое же напряжение начинают испытывать соседние части сечения, т. е. возникают пластические деформации в крайних частях сечения, средняя же часть сечения продолжает работать упруго (черт. 13). Момент внутренних сил продолжает возрастать, но медленнее, чем при упругой работе. Величина упругого ядра при прямоугольном сечении может

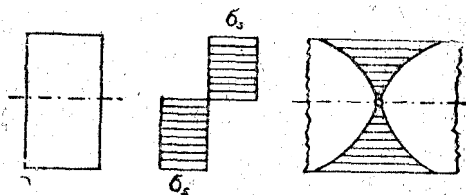


Черт. 13.

быть определена в зависимости от момента внешних сил из уравнения:

$$M = 2\sigma_s b \left(\frac{h-e}{2} \right) \left(\frac{e}{2} + \frac{h-e}{4} \right) + \frac{2}{3} \sigma_s \cdot 2b \frac{e}{2} \cdot \frac{e}{4} = \frac{\sigma_s b}{4} \left(h^2 - \frac{e^2}{3} \right).$$

Если момент внешних сил продолжает расти, то область пластических деформаций распространяется и в конце концов сечение перестает сопротивляться возрастанию нагрузки и деформации неограниченно возрастают. Это сечение в балке может рассматриваться, как шарнир, передающий постоянный момент, и в дальнейшем будет называться шарниром текучести.



Черт. 14.

Величина предельного момента, который может воспринять сечение, зависит от формы сечения и определяется из уравнения

$$M_T = \int \sigma y dF.$$

Например для прямоугольного сечения:

$$M_T = 2\sigma_s b \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \sigma_s \frac{bh^2}{4}.$$

В общем случае несимметричного сечения центр шарнира текучести не совпадает с геометрической осью.

Рассмотрим сечение произвольной формы (черт. 15) в предельном состоянии, т. е. тогда, когда пластические деформации распространились по всему сечению. Пусть:

O — центр тяжести сечения;

F_1 — площадь верхней пластической зоны;

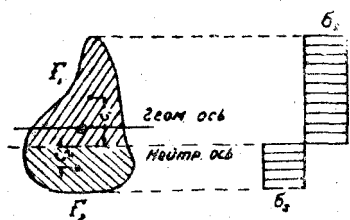
F_2 — площадь нижней пластической зоны;

c_1 — расстояние от нейтральной оси до центра тяжести верхней пластической зоны;

c_2 — расстояние от нейтральной оси до центра тяжести нижней пластической зоны;

e — расстояние между геометрической осью и нейтральной в предельном состоянии.

Сумма проекций внутренних сил на горизонтальную ось равна нулю:



Черт. 15.

$$\int \sigma dF = 0,$$

а в предельном состоянии — при постоянном напряжении σ_s по всему сечению:

$$-\sigma_s F_1 + \sigma_s F_2 = 0,$$

откуда

$$F_1 = F_2 = \frac{F}{2}.$$

Статический момент площади относительно оси, проходящей через центр тяжести, равен нулю:

$$F_1(c_1 - e) - F_2(c_2 + e) = 0, \text{ при } F_1 = F_2 \text{ получим:}$$

$$c_1 - e - c_2 - e = 0$$

и следовательно

$$e = \frac{c_1 - c_2}{2}.$$

Если $c_1 = c_2$ и $F_1 = F_2$, то сечение симметрично. В этом случае $e = 0$, т. е. нейтральная ось проходит через центр тяжести и не меняет своего положения в продолжении деформации.

Если $c_1 > c_2$, то $e \neq 0$ и нейтральная ось после появления пластических деформаций приближается к нижнему краю сече-

ния, в котором, как видно из чертежа, пластические деформации возникают позднее.

Если $c_1 < c_2$, то нейтральная ось смещается по направлению к верхнему краю. В этом случае пластические деформации сначала возникают по нижнему краю.

Следовательно, при несимметричном сечении, деформирующемся пластически, нейтральная ось во время деформации меняет свое положение и отодвигается от геометрической оси, приближаясь к тому краю сечения, в котором текучесть наступает позднее.

Величина предельного момента M_T определяется из условия равенства между моментом внешних и моментом внутренних сил:

$$M = \int \sigma y dF.$$

В предельном состоянии:

$$\begin{aligned} M_T &= F_1 \sigma_s c_1 + F_2 \sigma_s c_2 = \sigma_s \left(\frac{F}{2} c_1 + \frac{F}{2} c_2 \right) = \sigma_s \left(\frac{F}{2} c_1 + \frac{F}{2} c_2 + \frac{F}{2} e - \frac{F}{2} e \right) = \\ &= \sigma_s \left[\frac{F}{2} (c_1 - e) + \frac{F}{2} (c_2 + e) \right] = 2 \sigma_s S_x, \end{aligned}$$

где S_x — статический момент половины площади сечения относительно геометрической оси.

Если ввести понятие о предельном моменте сопротивления W_T , полагая $W_T = 2S$, получим очень удобное расчетное уравнение:

$$M_T = \sigma_s W_T.$$

Наибольший момент при упругой работе, как известно, определяется формулой:

$$M_s = \sigma_s W.$$

W и W_T зависят только от формы и размеров сечения, поэтому соотношение между ними $K = \frac{W_T}{W}$ для первого сечения величина постоянная и легко может быть подсчитана для употребительных сечений. Введение значений K в таблицы нормального сортамента весьма облегчило бы подбор сечений при упруго-пластичном расчете.

Приведем значение W_I для наиболее употребительных сечений:

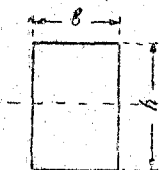
а) прямоугольное сечение (черт. 16):

$$W_I = 2 \frac{bh}{2} \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{4}; \quad K = \frac{W_T}{W} = \frac{\frac{bh^2}{4}}{\frac{bh^2}{6}} = 1,5;$$

б) круглое сечение (черт. 17):

$$W_T = 2 \frac{\pi d^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{d}{\pi} = \frac{d^3}{6}; \quad K = 1,7;$$

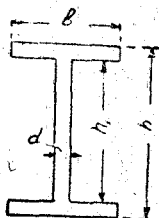
с) двутавр (черт. 18):



Черт. 16.



Черт. 17.



Черт. 18

$$W_T = 2b \left(\frac{h-h_1}{2} \right) \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h-h_1}{4} \right) + 2d \frac{h_1}{2} \cdot \frac{h_1}{4} = \frac{1}{4} [bh^2 - (b-d)h_1^2].$$

Значение коэффициентов K для прокатных двутавров по ОСТ:

1 №	16	18	20	22	24	26	28	30	40
$K = \frac{W_T}{W}$	1,172	1,170	1,172	1,175	1,174	1,179	1,184	1,182	1,184

§ 6. Работа сечения при повторных нагрузках.

Остаточные напряжения.

Если под действием нагрузки в некотором сечении балки появляются пластические деформации, а остальные части балки деформируются упруго, то при разгрузке должна быть справедлива гипотеза Бернулли не только для упругих участков, но и для пластических, иначе упругие и пластические элементы балки потеряли бы взаимную связь. Выравнивание сечения возможно

при наличии нормальных напряжений σ_B обратного знака, действующих при разгрузке на пластические зоны (черт. 19).

При отсутствии внешних сил, внутренние силы должны находиться в равновесии, т. е.

$$\int \sigma dF = 0,$$

$$\int \sigma y \cdot dF = 0.$$

Для того, чтобы второе из этих уравнений было удовлетворено, следует предположить наличие напряжений σ_E , распределенных

Черт. 19.

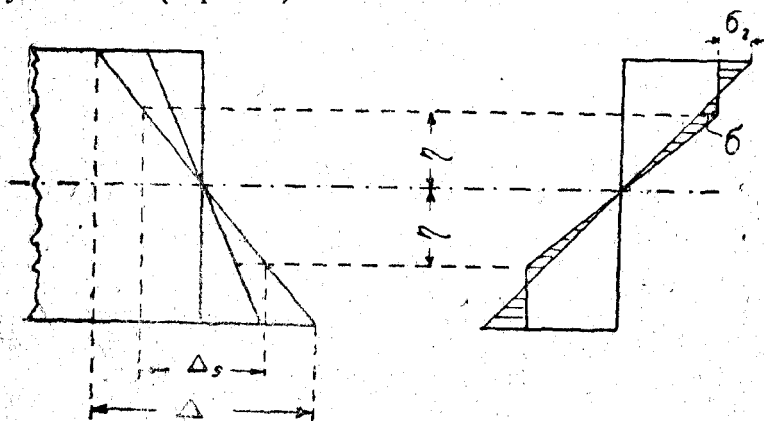
по всей высоте сечения и по знаку противоположных σ . В этом случае момент внутренних сил

$$M_{\text{вн}} = 2 \left\{ \frac{1}{2} b \frac{h}{2} \sigma_E \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} - \frac{1}{2} b \left(\frac{h}{2} - \eta \right) \sigma_B \left[\eta + \frac{2}{3} \left(\frac{h}{2} - \eta \right) \right] \right\} = 0,$$

откуда:

$$\sigma_E = \sigma_B \left[1 - \frac{\eta}{h} \left(1 + \frac{2\eta}{h} \right) \right].$$

Пользуясь гипотезой плоских сечений, можем выразить σ_B через удлинения (черт. 20)



Черт. 20.

$$\sigma_B = \frac{\Delta - \Delta_s}{2} E = \frac{\Delta - \Delta_s}{2} \cdot \frac{2\sigma_s}{\Delta_s},$$

где

Δ — удлинение при первой нагрузке,

Δ_s — удлинение в начале текучести.

Кроме того, $\frac{\eta}{h} = \frac{\Delta_s}{2\Delta}$.

Подставляя эти величины в формулу для σ_E , получим:

$$\sigma_E = \frac{\Delta - \Delta_s}{2} \sigma_s \frac{1}{\Delta_s} \left[2 - \frac{\Delta_s}{\Delta} \left(1 + \frac{\Delta_s}{\Delta} \right) \right].$$

Теперь нетрудно получить величину остаточного краевого напряжения при разгрузке:

$$\sigma_r = \sigma_B - \sigma_E = \frac{\sigma_s}{2} \left[1 - \left(\frac{\Delta_s}{\Delta} \right)^2 \right].$$

Остаточное напряжение по границе пластической зоны:

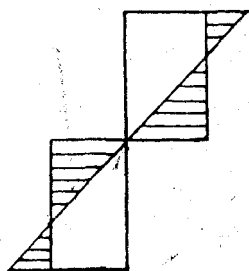
$$\sigma_c = \sigma_E \frac{2\eta}{h} = \frac{\sigma_s}{2} \left(1 - \frac{\Delta_s}{\Delta} \right) \left[2 - \frac{\Delta_s}{\Delta} \left(1 + \frac{\Delta_s}{\Delta} \right) \right].$$

Если при первой нагрузке было достигнуто предельное состояние — распространение пластических деформаций по всему сечению, то, полагая $\Delta = \infty$, получим:

$$\max \sigma_r = \frac{\sigma_s}{2}; \quad \max \sigma_c = \sigma_s$$

и эпюра остаточных напряжений примет вид, изображаемый на черт. 21.

Поскольку σ_r имеет направление, обратное напряжению от внешней нагрузки, постольку при повторной нагрузке предел текучести повысится до величины:



Черт. 21.

$$\sigma_s + \sigma_r = \sigma_s + \frac{\sigma_s}{2} \left[1 - \left(\frac{\Delta_s}{\Delta} \right)^2 \right] = \frac{3\sigma_s}{2} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta_s}{\Delta} \right)^2 \right]$$

и в крайних фибрах остаточные деформации смогут появиться только тогда, когда напряжения при повторных нагрузках превзойдут эту величину.

Напряжение σ_c имеет такой же знак, как и напряжение от внешней нагрузки, поэтому при вторичном загрузении эти напряжения суммируются, и предел текучести будет скорее достигнут у края пластической зоны, чем у края сечения.

Деформации у края пластической зоны останутся упругими, если напряжение не превзойдет величины:

$$\begin{aligned} \sigma_s - \sigma_c &= \sigma_s - \frac{\sigma_s}{2} \left(1 - \frac{\Delta_s}{\Delta} \right) \left[2 - \frac{\Delta_s}{\Delta} \left(1 + \frac{\Delta_s}{\Delta} \right) \right] = \\ &= \sigma_s - \sigma_s + \frac{\sigma_s}{2} \cdot \frac{\Delta_s}{\Delta} \left(1 + \frac{\Delta_s}{\Delta} \right) + \sigma_s \frac{\Delta_s}{\Delta} - \frac{\sigma_s}{2} \left(\frac{\Delta_s}{\Delta} \right)^2 \left(1 + \frac{\Delta_s}{\Delta} \right) = \\ &= \frac{3\sigma_s}{2} \cdot \frac{\Delta_s}{\Delta} - \frac{\sigma_s}{2} \left(\frac{\Delta_s}{\Delta} \right)^3 = \frac{3}{2} \sigma_s \frac{\Delta_s}{\Delta} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta_s}{\Delta} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

При этом напряжение по краю сечения будет равно:

$$\sigma_A = \frac{h}{2\eta} (\sigma_s - \sigma_c) = \frac{3}{2} \sigma_s \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta_s}{\Delta} \right)^2 \right] = \sigma_s + \sigma_r,$$

а это как раз та величина, до которой у края сечения поднялся предел текучести.

Наибольшее значение момента внешних сил, при котором, при вторичном нагружении, деформации остаются упругими, может быть определено по формуле

$$M_A = \sigma_A \cdot W.$$

При прямоугольном сечении:

$$\begin{aligned} M_A &= \frac{bh^2}{6} \cdot \frac{3}{2} \sigma_s \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta_s}{\Delta} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{bh^2}{4} \sigma_s \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta_s}{\Delta} \right)^2 \right] = \sigma_s W_T \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta_s}{\Delta} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

откуда видно, что $M_s < M_A < M_T$.

Таким образом, при повторных нагрузках предел упругости повышается. Предельное значение, до которого может быть поднят предел упругости, соответствует моменту M_T . Очевидно балка может выдержать, не разрушаясь, любое число повторных нагружений моментом $M \leq M_T$.

§ 7. Деформация балки.

Пока изгибающий момент ни в одном сечении балки не достигает величины M_s , балка деформируется вполне упруго и форма изогнутой оси определяется при помощи обычного уравнения

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M.$$

Как только изгибающий момент в каком-либо сечении балки превзойдет M_s , вблизи этого сечения образуется область с ясно выраженной текучестью материала. Очевидно участок балки, охваченный пластическими деформациями, деформируется гораздо значительнее и кривизна его будет больше, чем упругих участков.

На основании гипотезы Бернулли, которая предполагается справедливой как при упругой, так и при пластической деформации, удлинение любого волокна равно $\epsilon = \frac{y}{\rho}$. Удлинение крайнего волокна при прямоугольном сечении

$$\epsilon = \frac{h}{2\rho},$$

где ρ — радиус кривизны оси балки.

Пусть высота упругого ядра в сечении равна 2η (черт. 22), тогда изгибающий момент в сечении:

$$M = b \sigma_s \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{3} \right).$$

Принимая во внимание, что

$$M_s = \sigma_s W = \sigma_s \frac{bh^2}{6} \text{ и } \eta = \frac{\varepsilon_s h}{2\varepsilon},$$

Черт. 22.

получим:

$$M = \frac{6M_s}{h^2} \left[\frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{2} \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon} \right)^2 \right] = \frac{3}{2} M_s \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon} \right)^2 \right],$$

откуда:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_s}{\sqrt{3 - 2 \frac{M}{M_s}}}.$$

Кривизна за пределом текучести отсюда определится следующим образом:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2\varepsilon}{h} = \frac{2\varepsilon_s}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{3 - 2 \frac{M}{M_s}}}.$$

Принимая во внимание, что $\frac{2\varepsilon_s}{h} = \frac{1}{\rho_s} = \frac{M_s}{EI}$,

найдем

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_s}{EI} \cdot \frac{1}{\sqrt{3 - 2 \frac{M}{M_s}}},$$

и в окончательном виде уравнение изогнутой оси:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_s}{EI} \cdot \frac{1}{\sqrt{3 - 2 \frac{M}{M_s}}}, \text{ или } \frac{d^2 y}{dx^2} = M \frac{1}{EI \frac{M}{M_s} \sqrt{3 - 2 \frac{M}{M_s}}}.$$

Сравнивая это уравнение с обычным для упругой линии, видим, что влияние пластических деформаций равносильно уменьшению жесткости балки на участке, деформирующемся пластически.

Для того, чтобы дать более наглядное представление о величине прогиба балки, испытывающей пластические деформации,

рассмотрим в качестве примера балку на двух опорах, нагруженную сосредоточенной силой посредине (черт. 23).

Область текучести охватывает только тот участок балки, на протяжении которого изгибающий момент M больше M_s . Рассматривая вследствие симметричности нагрузки одну половину балки, будем иметь крайний участок, деформирующийся упруго при $0 < x < a$ и средний участок, деформирующийся пластично при $a < x < \frac{l}{2}$.

Деформацию балки на этих участках будем рассматривать порознь:

а) Упругий участок $0 < x < a$ характеризуется уравнениями:

$$Y_1'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{P}{2EI}x; \quad Y_1' = -\frac{P}{2EI} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1;$$

$$Y_1 = -\frac{P}{2EI} \cdot \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2.$$

б) Пластичный участок $a < x < \frac{l}{2}$ характеризуется уравнениями:

$$Y_2'' = -\frac{M_s}{EI} \cdot \frac{1}{\sqrt{3 - \frac{P}{M_s}x}}; \quad Y_2' = \frac{2M_s^2}{PEI} \sqrt{3 - \frac{P}{M_s}x} + C_3;$$

$$Y_2 = -\frac{4}{3} \cdot \frac{M_s^3}{P^2EI} \sqrt{\left(3 - \frac{P}{M_s}x\right)^3} + C_3x + C_4.$$

Граничные условия:

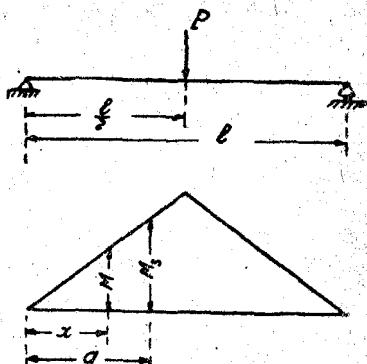
1) $Y_{1x=0} = 0$, 2) $Y_{1x=a} = Y_{2x=a}$, 3) $Y_{1x=a} = Y_{2x=a}$, 4) $Y_{2x=\frac{l}{2}} = 0$.

Из 1-го условия следует $C_2 = 0$,

из 4-го " " $C_3 = \frac{2M_s^2}{2EI} \sqrt{3 - \frac{Pl}{2M_s}},$

из 3-го " " $C_1 = \frac{2M_s^2}{2EI} \left[\frac{3}{2} - \sqrt{3 - \frac{Pl}{2M_s}} \right],$

из 2-го " " $C_4 = \frac{20M_s^3}{3P^2EI}.$



Черт. 23.

Следовательно для пластического участка

$$Y_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{M_s^2}{PEI} \left[\frac{M_s}{P} \left\{ 10 - 2 \sqrt{\left(3 - \frac{P}{M_s} x \right)^3} \right\} - 3x \sqrt{3 - \frac{Pl}{2M_s}} \right].$$

Прогиб в середине $x = \frac{l}{2}$,

$$Y_{\max} = \frac{M_s^3}{3P^2EI} \left[20 - \left(12 + \frac{Pl}{M_s} \right) \sqrt{3 - \frac{Pl}{2M_s}} \right].$$

Величину прогиба при предельной нагрузке получим, вставив в формулу вместо P величину P_T :

$$P_T = \frac{4M_T}{l}; \quad M_T = \frac{3}{2} M_s; \quad P_T = \frac{6M_s}{l};$$

$$Y_T = \frac{20}{3} \cdot \frac{M_s^3}{P_T^2EI} = \frac{5}{27} \cdot \frac{M_s l^2}{EI} = \frac{1}{21,6} \cdot \frac{P_s l^3}{EI}.$$

Наибольший упругий прогиб имеет место при нагрузке $P_s = \frac{4M_s}{l}$

и равен: $Y_s = \frac{1}{12} \cdot \frac{M_s l^2}{EI} = \frac{P_s l^3}{48EI}$.

Таким образом, прогиб под предельной нагрузкой в 2,2 раза превышает чисто упругий прогиб.

Одно из самых существенных возражений против применения упруго-пластического метода расчета заключается в предположении, что деформации в конструкции, рассчитанной с допуском пластических деформаций, окажутся недопустимо большими. Из приведенного примера видно, что даже под предельною (разрушающей) нагрузкой прогиб балки получается совсем не столь большим, как могло казаться. Если же принять во внимание, что допустимая нагрузка будет в несколько раз меньше разрушающей, то можно утверждать, что деформации будут незначительными и никакой опасности для работоспособности балки не представляют. Высказанные здесь соображения подтверждаются опытами, произведенными со стальными и деревянными балками.

§ 8. Определение предельной нагрузки

1. Статически определимые балки.

а) Балка на двух опорах, нагруженная сосредоточенной силой в середине пролета (черт. 24).

Предельный изгибающий момент, который может возникнуть в балке данного сечения

$$M_T = W_{I\sigma_s}.$$

Наибольший изгибающий момент от действия заданной нагрузки

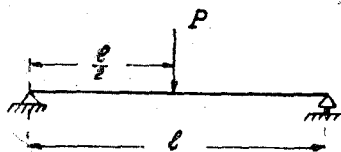
$$M = \frac{P \cdot l}{4}.$$

При возрастании нагрузки момент в середине балки приближается к предельному значению. Если нагрузка достигнет предельной величины P_T , будем иметь:

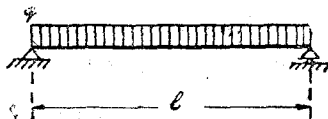
$$M_T = \frac{P_T l}{4},$$

откуда величина предельной нагрузки

$$P_T = \frac{4M_T}{l} = \frac{4W_T \sigma_s}{l}.$$



Черт. 24.



Черт. 25.

Если нагрузка превзойдет величину P_T , то балка превращается в изменяемую систему с промежуточным шарниром, т. е. перестает существовать, как конструкция.

Допускаемая нагрузка очевидно должна составлять некоторую часть от предельной

$$P_{доп} = \frac{P_T}{n},$$

где n — запас прочности.

б) Балка на двух опорах, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой (черт. 25).

$$M_T = W_T \sigma_s; \quad M = \frac{ql^2}{8}; \quad M_T = \frac{q_T l^2}{8};$$

$$q_T = \frac{8M_T}{l^2} = \frac{8W_T \sigma_s}{l^2}; \quad q_{доп} = \frac{q_T}{n}.$$

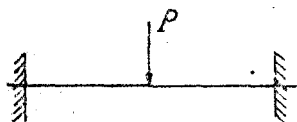
Как видно из приведенных примеров, предельная нагрузка определяется теми же приемами, как и при упругом расчете, с той только разницей, что вместо обычного момента сопротивления W , вводится пластический момент сопротивления W_T .

Действительный коэффициент безопасности, которым обладает статически определяемая балка, выше чем предполагаемый при упругом расчете в $\frac{W_T}{W}$ раз.

II. Статически неопределимые балки.

1. Балка, заделанная обоими концами.

а) Нагрузка в виде сосредоточенной силы в середине пролета.



Как известно, изгибающие моменты достигают наибольшей величины одновременно в трех местах: у заделок и в середине пролета.

$$M_{\max} = \frac{P \cdot l}{8}.$$



Черт. 26.

Пластические деформации также появятся одновременно в трех точках A, B, C.

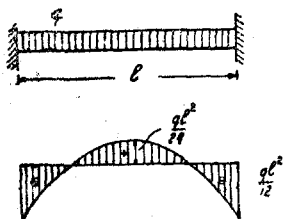
Работоспособность балки будет исчерпана, когда моменты в этих точках достигнут предельной величины $M_I = W_I \cdot \sigma_s$.

При этом $M_I = \frac{P_I \cdot l}{8}$, откуда $P_I = \frac{8M_I}{l}$.

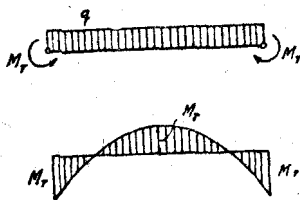
В этом примере балка разрушается, не переходя через статически определимое состояние.

б) Нагрузка, равномерно распределенная.

Пока деформации упруги, изгибающие моменты распределяются в соответствии с эпюрой (черт. 27-а), причем моменты у заделок $M_A = M_B = -\frac{ql^2}{12}$, а момент в середине пролета $M = \frac{ql^2}{24}$.



Черт. 27-а.



Черт. 27-б.

Очевидно пластические деформации появятся сначала в точках A и B (у заделок). Когда в этих сечениях момент достигнет предельной величины M_I , в них появятся шарниры текучести и балка превратится в статически определимую (черт. 27-б).

При дальнейшем возрастании нагрузки моменты у заделок остаются постоянными, а моменты в пролете увеличиваются, пока

наибольший момент не достигнет предельного значения M_T . После этого в середине пролета образуется третий шарнир текучести и балка утрачивает работоспособность.

Эпюра моментов, соответствующая предельному состоянию, изображена на черт. 27-б.

Изгибающий момент в середине пролета:

$$M = -M_T + \frac{q \cdot l^2}{8},$$

в предельном состоянии:

$$M_T = -M_T + \frac{q_T \cdot l^2}{8},$$

откуда

$$M_T = \frac{q_T \cdot l^2}{16} \text{ и } q_T = \frac{16M_T}{l^2}.$$

Если сравнить несущую способность данной балки с несущей способностью такой же балки, свободно лежащей на опорах, для которой

$$q^0_T = \frac{8M_T}{l^2},$$

то станет очевидным, что

$$q_T = 2q^0_T,$$

т. е. балка с заделанными концами вдвое прочнее свободно лежащей.

Подобное сравнение, произведенное по данным упругого расчета (по допускаемым напряжениям), дает:

$$\text{для свободно лежащей балки } q_0 = \frac{8M_s}{l^2},$$

$$\text{для заделанной балки } q = \frac{12M_s}{l^2},$$

т. е. $q = 1,5q_0$ и балка с заделанными концами предполагается только в 1,5 раза прочнее свободнолежащей. Это лишний раз подтверждает, что упругий расчет недооценивает преимущества статически неопределимых конструкций и ведет к неэкономичному проектированию таких конструкций.

в) Нагрузка в виде двух сосредоточенных сил.

Моменты в заделках больше моментов в пролете (черт. 28-а), поэтому первые шарниры текучести появятся у заделок и балка станет статически определимой.

В предельном состоянии моменты в пролете сравниваются с моментами заделок и появляются шарниры текучести в местах действия сил.

Момент в пролете:

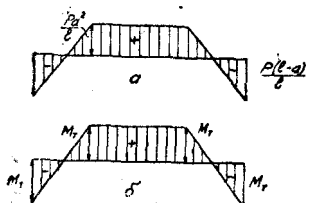
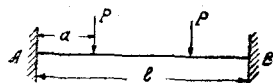
$$M = Pa - M_T,$$

в предельном состоянии:

$$M_T = P_T a - M_T,$$

следовательно:

$$M_T = \frac{P_T a}{2} \text{ и } P_T = \frac{2M_T}{a}.$$



Черт. 28.

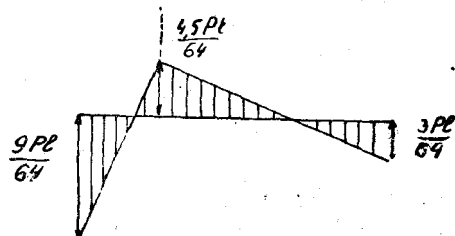
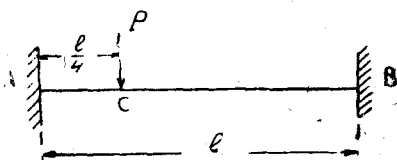
При сложной или несимметричной нагрузке порядок появления шарниров может быть неясным и установить его можно при помощи упругого расчета.

Рассмотрим в качестве примера балку, нагруженную одной сосредоточенной силой P на расстоянии $a = \frac{l}{4}$ от левой опоры.

При чисто упругой работе балки получим моменты у заделок:

$$M_A = -\frac{9}{64}Pl,$$

$$M_B = -\frac{3}{64}Pl.$$



Черт. 29.

Моменты под грузом $M_C = +\frac{4,5}{64}Pl$. (См. чертеж 29.)

Из сравнения этих моментов видно, что первый шарнир текучести появится в точке А, при этом балка из заделанной обоими концами превращается в заделанную одним концом, а другим опертую, т. е. степень статической неопределимости снижается на единицу (чертеж 30).

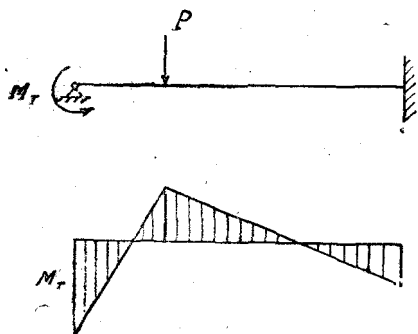
Рассматривая эту новую систему и пользуясь уравнением 3-х моментов, получим:

$$M_T l + 2M_B l = -\frac{15Pl^2}{64},$$

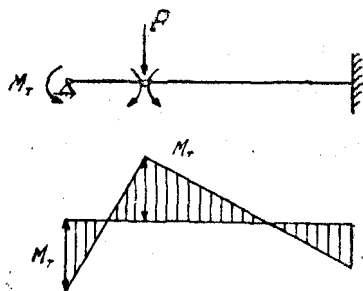
$$M_B = -\frac{15Pl}{128} + \frac{M_T}{2}.$$

Изгибающий момент в точке приложения силы P :

$$M_C = M^0 + M_T \frac{l-a}{l} + M_B \frac{a}{l} = \frac{81Pl}{128 \cdot 4} - \frac{5}{8} M_T.$$



Черт. 30.



Черт. 31.

$M_C > M_B$ и поэтому второй шарнир текучести появляется под грузом P . При этом система превращается в статически определимую (черт. 31), нагруженную моментами $M_A = M_T$ и $M_C = M$.

При этом

$$M_T = \frac{81Pl}{128 \cdot 4} - \frac{5}{8} M_T;$$

$$M_B = -\frac{15Pl}{128} + \frac{M_T}{2},$$

откуда

$$P = 10,3 M_T \frac{1}{l}; \quad M_B = 0,7 M_T.$$

Рассматривая последнюю систему, видим, что в точках A и C момент остается постоянным и при дальнейшем возрастании нагрузки увеличивается только M_B .

Несущая способность балки будет исчерпана, когда в последней (статически определимой) системе M_B достигнет предельной величины M_T . Это соответствует образованию в точке B шарнира и превращению системы в геометрически изменяемую

(черт. 32). Предельную нагрузку, соответствующую предельному состоянию, найдем, представив статически определимую систему, как показано на черт. 33.

Из равновесия левой части балки:

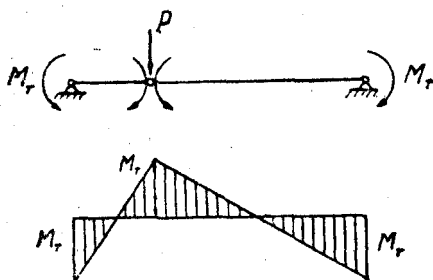
$$\Sigma M_A = -M_T - M_T + Q \frac{l}{4} = 0; \quad Q = \frac{8M_T}{l}.$$

Из равновесия правой части балки:

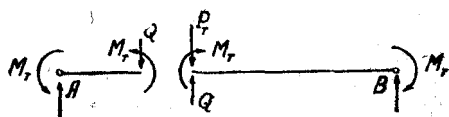
$$\Sigma M_B = M_T + \frac{8M_T}{l} \cdot \frac{3}{4}l - P_T \frac{3}{4}l + M_T = 0,$$

откуда $M_T = \frac{3P_T l}{32}$ и $P_T = \frac{32}{3} \cdot \frac{M_T}{l} = 10,7 \frac{M_T}{l}.$

В этом примере вычисление величины разрушающей нагрузки потребовало исследования трех систем балок с постепенно понижающейся степенью статической неопределимости, причем разрушение наступило только после того, как балка утратила статическую неопределимость. Это явление наблюдалось и во всех предыдущих примерах. Учитывая это обстоятельство, можно установить правило, позволяющее вычислить разрушающую



Черт. 32.



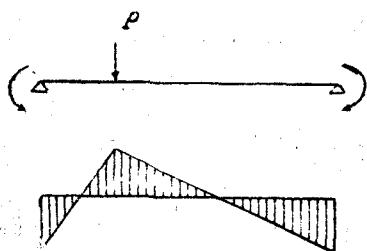
Черт. 33.

нагрузку, рассматривая стадию, предшествующую разрушению и минуя все предыдущие.

Действительно и не производя упругого расчета можно было предвидеть, что данная балка разрушится только тогда, когда моменты в трех сечениях A, B и C достигнут предельной величины.

Допустив, что моменты на опорах достигнут предельного значения раньше, чем момент в пролете, мы получили бы следующую статически определимую систему в состоянии, предшествующем разрушению (черт. 34).

Эпюра моментов в этом состоянии совпадает с эпюрой, получен-



Черт. 34.

ной при прежнем решении. Величина разрушающей нагрузки находится следующим образом:

$$M_c = -M_T + \frac{3}{4} P \frac{l}{4},$$

$$M_T = -M_T + \frac{3}{16} P_T l,$$

$$M_T = \frac{3P_T l}{32}; \quad P_T = \frac{32}{3} \cdot \frac{M_T}{l} = 10,7 \frac{M_T}{l},$$

т. е. результат совпадает с полученным ранее, а процесс расчета в несколько раз упрощается.

Эти рассуждения приводят к следующему выводу:

Расчет балки с закрепленными концами при любой нагрузке по стадии разрушения может быть произведен без детального упругого расчета. Необходимо только установить места, в которых при разрушении появятся шарниры текучести. Последовательность возникновения этих шарниров не имеет значения. Предельная (разрушающая) нагрузка определяется по статически определимой схеме, к которой приводится статически неопределимая балка перед началом разрушения. Основой для расчета является эпюра моментов, построенная в предположении, что перед разрушением моменты во всех шарнирах текучести равняются предельному моменту M_T .

2. Нерезные балки.

Общий ход расчета такой же, как и для заделанных балок, т. е. сперва определяются точки, в которых возникают шарниры текучести, затем строится эпюра моментов, причем моменты в шарнирах текучести принимаются равными M_T . Наконец, определяется максимальный момент в статически определимой системе, получившейся после образования шарниров, и приравнивается M_T . Из последнего уравнения находится M_T и предельная нагрузка.

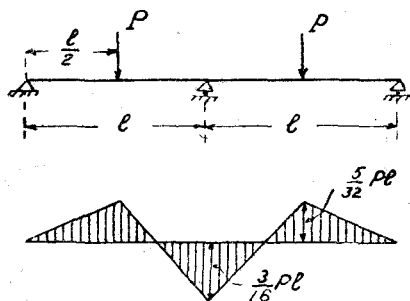
Порядок расчета в дальнейшем иллюстрируется примерами, в которых рассматриваются двухпролетные, трехпролетные и многопролетные балки.

Двухпролетные балки.

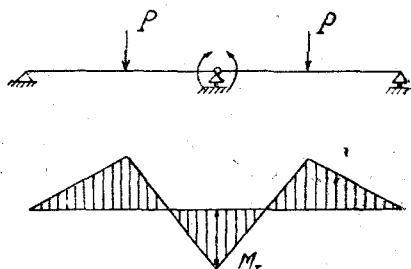
а) Нагрузка состоит из сосредоточенных сил в середине каждого пролета (черт. 35).

Упругий расчет дает следующие значения изгибающих моментов: на опоре $M_2 = -\frac{3}{16} Pl$, в пролете $M_p = \frac{5}{32} Pl$.

Следовательно 1-й шарнир текучести появляется над промежуточной опорой. При этом $M_2 = M_T$, степень статической неопределимости снижается на единицу и получаются две свободно лежащие балки (черт. 36).



Черт. 35.



Черт. 36.

Изгибающий момент в середине пролета каждой из этих балок равен $M = \frac{Pl}{4} - \frac{M_T}{2}$.

Работоспособность балки будет исчерпана, когда этот момент достигнет предельной величины и в пролетах появятся шарниры текучести.

$$M_T = \frac{P_T l}{4} - \frac{M_T}{2},$$

отсюда
$$M_T = \frac{P_T l}{6}, \quad P_T = \frac{6M_T}{l}.$$

Сравнивая работоспособность неразрезной балки и такого же пролета свободнолежащей на опорах, получим:

простая балка $P'_T = \frac{4M_T}{l},$

неразрезная балка $P''_T = \frac{6M_T}{l},$ откуда $\frac{P''_T}{P'_T} = 1,5.$

При расчете по допускаемым напряжениям:

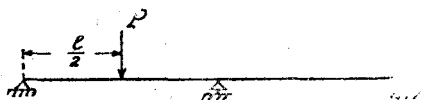
простая балка $P'_{дон} = \frac{4M}{l},$

неразрезная балка $P''_{дон} = \frac{32M}{6l},$ откуда $\frac{P''_{дон}}{P'_{дон}} = 1,33.$

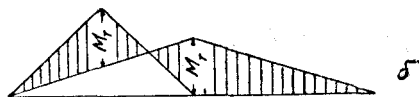
Это еще раз показывает, что действительный запас прочности неразрезной балки выше, чем предполагается при упругом расчете.

б) Нагрузка состоит из сосредоточенной силы в середине первого пролета (черт. 37).

Как показывает упругий расчет, момент на опоре $M_2 = -0,094Pl$, момент под грузом $M_p = 0,203Pl$. Т. к. $M_p > M_2$, то 1-й шарнир текучести появится в пролете, в точке приложения груза. Балка обращается в статически определимую (черт. 38-а), оставаясь работоспособной. Разрушение наступит после появления второго шарнира текучести, возникающего



Черт. 37.



Черт. 38.

над промежуточной опорой. Этому состоянию соответствует эпюра моментов, изображенная на чертеже 38-б.

Из этой эпюры следует:

$$M_T = \frac{P_T l}{4} - \frac{M_T}{2},$$

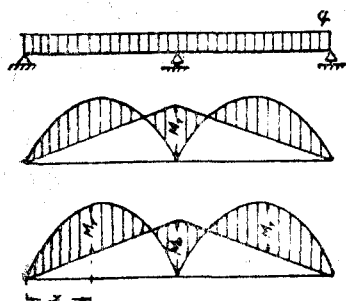
откуда
$$M_T = \frac{P_T l}{6}, \quad P_T = \frac{6M_T}{l},$$

т. е. получаем тот же результат, что и в предыдущем примере, хотя порядок возникновения шарниров различный. Это свидетельствует о том, что для неразрезной балки, так же как и для заделанной обоими концами, последовательность появления шарниров текучести не имеет значения, а отсюда следует, что для двухпролетной балки безразлично, нагружен ли один пролет или оба.

в) Нагрузка, равномерно распределенная.

При возрастании интенсивности нагрузки q сначала появляется шарнир текучести над средней опорой ($M_2 = M_T$), а затем такой же шарнир в пролете в том сечении, где пролетный момент максимальный.

Положение этого сечения найдем следующим образом: Если x —расстояние сечения от левой опоры, то



Черт. 39.

$$M_x = \frac{ql}{2}x - \frac{M_2}{l}x - \frac{qx^2}{2},$$

при

$$M_2 = M_T$$

$$M_x = \frac{ql}{2}x - \frac{M_T}{l}x - \frac{qx^2}{2},$$

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{ql}{2} - \frac{M_T}{l} - qx,$$

откуда
$$x = \frac{l}{2} - \frac{M_T}{ql}.$$

Подставляя значение x в уравнение для M_x , находим:

$$M_{\max} = \frac{ql}{2} \left(\frac{l}{2} - \frac{M_T}{ql} \right) - \frac{M_T}{l} \left(\frac{l}{2} - \frac{M_T}{ql} \right) - \frac{q}{2} \left(\frac{l}{2} - \frac{M_T}{ql} \right)^2 = \frac{q}{8} \left(l - \frac{2M_T}{ql} \right)^2.$$

Величина предельной нагрузки находится из уравнения:

$$M_T = \frac{q_T}{8} \left(l - \frac{2M_T}{q_T l} \right)^2.$$

После преобразований получаем:

$$l^4 q_T^2 - 12M_T l^2 q_T + 4M_T^2 = 0,$$

$$q_T = \frac{M_T}{l^2} (6 \pm 4\sqrt{2}); \quad q_T = 11,64 \frac{M_T}{l^2},$$

откуда

$$M_T = 0,086 q_T l^2,$$

при этом

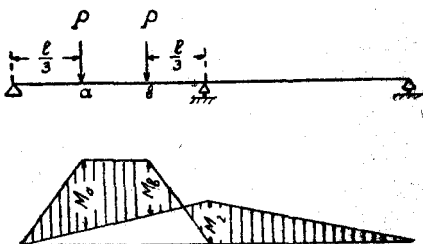
$$x = 0,414l.$$

г) Нагрузка в виде двух сосредоточенных сил в одном из пролетов (черт. 40).

Упругий расчет дает следующие величины изгибающих моментов на средней опоре (M_2) и в пролете, в местах приложения сил (M_a , M_b):

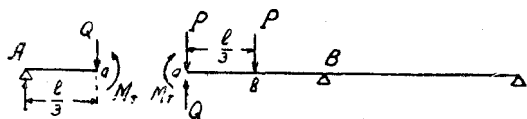
$$M_2 = -\frac{3Pl}{18}; \quad M_a = \frac{5Pl}{18}; \quad M_b = \frac{4Pl}{18}$$

т. е. $M_a > M_b > M_2.$



Черт. 40.

Из сравнения абсолютных величин изгибающих моментов легко установить, что 1-й шарнир текучести возникает в точке a ($M_a = M_T$). Казалось бы, что т. к. $M_b > M_T$, то 2-й шарнир текучести должен появиться в точке b , но более внимательное изучение опровергает это предположение. После появления первого шарнира текучести, нагруженного постоянным моментом M_T , моменты в точке b и на опоре 2 растут иначе, чем



Черт. 41.

при упругой работе балки, опорный момент возрастает значительно быстрее пролетного и ранее его достигает предельной величины. Таким образом второй шарнир появляется на средней опоре. Это легко подтверждается следующими вычислениями.

После появления первого шарнира в точке a балка превращается в статически определимую (черт. 41). Из равновесия левой части находим:

$$\Sigma M_A = M_T - Q \cdot \frac{l}{3} = 0 \quad \text{и} \quad Q = \frac{3M_T}{l}.$$

Рассматривая правую часть балки, получим:

$$M_2 = M_T + \frac{3M_T}{l} \cdot \frac{2}{3}l - P \cdot \frac{2}{3}l - P \cdot \frac{l}{3} = 3M_T - Pl;$$

$$M_b = M_T + \frac{3M_T}{l} \cdot \frac{l}{3} - \frac{Pl}{3} = 2M_T - \frac{Pl}{3}.$$

Предельная величина момента (M_T) может быть достигнута в точке b при условии:

$$-M_T = 2M_T - \frac{Pl}{3}, \quad \text{т. е. при} \quad P = \frac{9M_T}{l}.$$

Предельная величина момента на опоре 2 будет достигнута, если

$$-M_T = 3M_T - Pl, \quad \text{т. е. при} \quad P = \frac{4M_T}{l}.$$

Следовательно второй шарнир текучести появится не в точке b , а на опоре 2.

Расчетные величины: $M_T = \frac{P_T l}{4}$ и $P_T = \frac{4M_T}{l}$.

Если бы место шарниров удалось установить без детальных исследований, то тот же результат мы могли бы получить гораздо проще, рассматривая эпюру моментов предельного состояния (черт. 42).

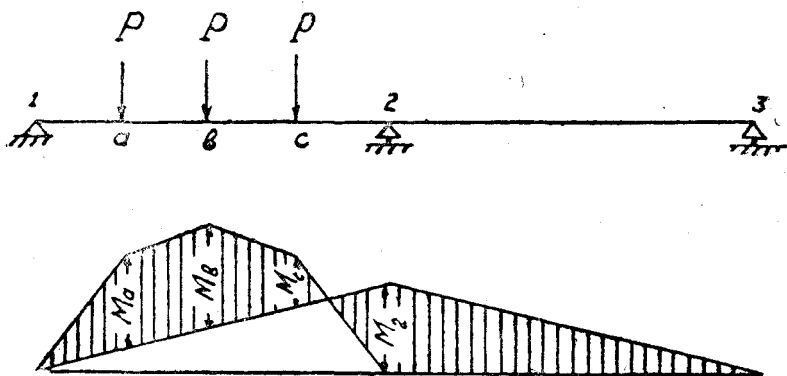


Черт. 42.

При этом
$$M_a = \frac{Pl}{3} - \frac{M_2}{3}; \quad M_T = \frac{P_T l}{3} - \frac{M_T}{3},$$

откуда
$$M_T = \frac{P_T l}{4}; \quad P_T = \frac{4M_T}{l}.$$

д) Нагрузка в виде трех сосредоточенных сил, в одном из пролетов (черт. 43).



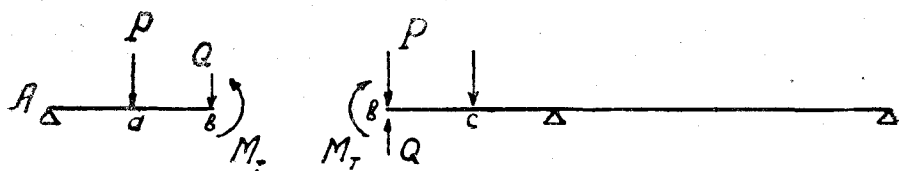
Черт. 43.

При упругой работе моменты имеют следующую величину:

$$M_a = \frac{81Pl}{256}; \quad M_b = \frac{98Pl}{256}; \quad M_c = \frac{51Pl}{256}; \quad M_2 = -\frac{60Pl}{256}.$$

$$M_b > M_a > M_2 > M_c.$$

1-й шарнир текучести появляется в точке b , $M_b = M_T$, при этом балка становится статически определимой (черт. 44).



Черт. 44.

Составляя уравнения равновесия для левой части

$$\Sigma M_1 = M_T - Q \frac{l}{2} - \frac{Pl}{4} = 0,$$

находим:

$$Q = \frac{2M_T}{l} - \frac{P}{2}; \quad M_a = M_T - \left(\frac{2M_T}{l} - \frac{P}{2} \right) \frac{l}{4} = \frac{M_T}{2} + \frac{Pl}{8};$$

$$M_c = M_T + \left(\frac{2M_T}{l} - \frac{P}{2} \right) \frac{l}{4} - \frac{Pl}{4} = \frac{3M_T}{2} - \frac{3Pl}{8};$$

$$M_2 = M_T + \left(\frac{2M_T}{l} - \frac{P}{2} \right) \frac{l}{2} - \frac{Pl}{2} - \frac{Pl}{4} = 2M_T - Pl.$$

Шарниры текучести могут появиться при достижении силой P следующих величин:

шарнир в точке a $M_T = \frac{M_T}{2} + \frac{Pl}{8}; \quad P = \frac{4M_T}{l};$

„ „ „ c $- M_T = \frac{3M_T}{2} - \frac{3Pl}{8}; \quad P = 6,7 \frac{M_T}{l};$

„ „ „ 2 $- M_T = 2M_T - Pl; \quad P = \frac{3M_T}{l}.$

Очевидно, что шарнир текучести возникает на опоре. Разрушающая нагрузка равна

$$P_T = \frac{3M_T}{l}.$$

И в этом случае разрушающая нагрузка находится гораздо проще, непосредственно из эпюры моментов предельного состояния (черт. 45).



Черт. 45.

$$M_b = M_b^0 - \frac{M_2}{2}; \quad M_b^0 = \frac{2Pl}{4}, \quad M_T = \frac{2P_T l}{4} - \frac{M_T}{2},$$

откуда $M_T = \frac{P_T l}{3}; \quad P_T = \frac{3M_T}{l}.$

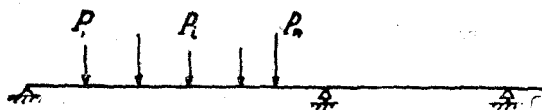
е) *Случай любой нагрузки в крайнем пролете неразрезной балки.*

В предыдущих примерах порядок возникновения шарниров текучести в крайнем пролете неразрезной балки не удавалось совместить с данными упругого расчета и приходилось вести специальное исследование для установления последовательности и мест появления шарниров.

Во всех рассмотренных случаях первый шарнир возникал в том месте, где абсолютная величина изгибающего момента в балке наибольшая (по данным упругого расчета), а второй шарнир возникал на опоре (независимо от данных упругого расчета).

Легко показать, что эта последовательность сохраняется при любых нагрузках.

Возьмем балку, нагруженную в крайнем пролете системой сосредоточенных сил $P_1, P_2, \dots, P_n$ (черт. 46).



Черт. 46.

Число сил может быть любое, равно как и их расположение и величина. Как известно, наибольший момент будет под одной из сил. Допустим, что 1-й шарнир текучести появится в точке i под грузом P_i . Очевидно в этом случае $M_i = \max M = M_T$ и перерезывающая сила в сечении i меняет знак.

Перерезывающая сила левее данного сечения

$$Q = R_A - \sum P_{1 \dots i-1},$$

и поскольку в данном сечении Q меняет знак, постольку

$$|Q| < P_i.$$

После возникновения шарнира текучести в сечении i рассматриваем правую от шарнира часть балки как статически определимую и нагруженную постоянным моментом M_T и силой Q в шарнире (черт. 47).

Исследуем изменение изгибающих моментов в сечениях этой статически определимой балки при увеличении нагрузки. Для этого построим эпюры M от каждого вида нагрузки отдельно.

Эпюра от действия постоянного момента M_T для правой балки положительна, изображается линией $abcd$ и остается неизменной при увеличении нагрузки.

Эпюра моментов от действия силы Q так же положительна, но ординаты этой эпюры изменяются с увеличением нагрузки,

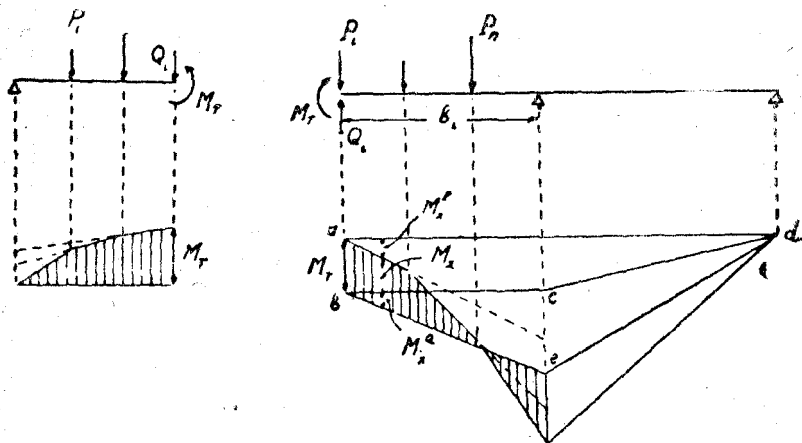
причем ордината в любом сечении балки пропорциональна расстоянию от шарнира (x):

$$M_x^Q = Qx.$$

Эпюра моментов от внешних сил, расположенных между шарниром и опорой ($P_i \dots P_n$), отрицательна. Ординаты эпюры возрастают с увеличением нагрузки и пропорциональны расстоянию от шарнира:

$$M_x^P = P_i x.$$

Как было установлено в начале исследования, $Q < P_i$, следовательно $|M_x^Q| < |M_x^P|$, т. е. отрицательные ординаты растут быстрее положительных, а при этом изгибающий момент $M_x = M_T + M_x - M_x^P$ ни в одном сечении балки в пределах от i до опоры B не может достигнуть величины M_T .



Черт. 47.

Левее точки i шарнир мог бы появиться, как видно из чертежа только в сечении $i-1$. Это возможно лишь тогда, когда $Q_i = 0$. Действительно $M_{i-1} = M_T - Q_i(b_{i-1} - b_i)$, но момент на опоре B

$$-M_B = M_T + Q_i b_i - \sum_i^n P b_i$$

и при уменьшении Q_i момент M_B по абсолютной величине быстро возрастает. Если $M_B = M_T$, то

$$-M_T = M_T + Q_i b_i - \sum_i^n P b_i \text{ и } Q_i = \frac{\sum_i^n P b_i - 2M_T}{b_i} > 0,$$

т. е. второй шарнир текучести в пролете возникнуть не может и можно считать доказанной следующую теорему:

„Если первый шарнир текучести возникает в пролете в том сечении балки, где изгибающий момент, определенный упругим расчетом, по абсолютной величине наибольший, то второй шарнир текучести при любой нагрузке появляется на промежуточной опоре“.

Эта теорема является обоснованием возможности расчета статически неопределимых балок по выравненной эпюре моментов, в предположении равенства моментов на опорах и максимального момента в пролете.

Пользуясь этой теоремой, можно чрезвычайно упростить расчет, как это было показано в конце каждого из предыдущих примеров.

ж) *Определение положения первого шарнира текучести в крайнем пролете при сложной нагрузке.*

При сложной нагрузке определение положения шарнира текучести, соответствующего максимальному моменту в пролете, может оказаться затруднительным и потребовать громоздких вычислений.

Существует довольно удобный способ определения положения шарнира в крайнем пролете неразрезной балки.

Представим себе крайний пролет неразрезной балки, находящийся под действием нагрузки $R = \sum P + \int q dx$ (черт. 48).

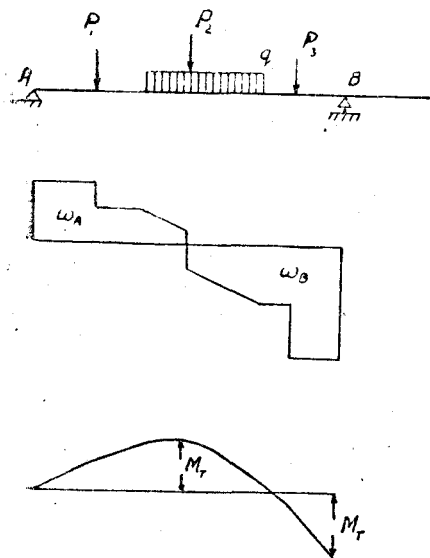
Построим эпюру моментов, полагая, что наибольший момент в пролете равен моменту на опоре. Пусть этому состоянию соответствует эпюра перерезывающих сил, изображенная на чертеже. Максимальный момент, как известно, находится в том сечении балки, где перерезывающая сила меняет знак.

Максимальный момент в пролете:

$$M_e = \int_0^{x_0} Q dx = \omega_Q \Big|_0^{x_0} = \omega_A,$$

где ω_Q — площадь эпюры перерезывающей силы.

ω_A — „ левый участок эпюры Q ,
 ω_B — „ правого „ „ Q .



Черт. 48.

Момент на опоре:

$$M_B = \int_0^l Q dx = \int_0^{x_0} Q dx + \int_{x_0}^l Q dx = \omega_A - \omega_B.$$

Предполагая равенство моментов в пролете и на опоре в предельном состоянии

$(M_e) = (M_B) = (M_T)$, получим:

$$\omega_A = -(\omega_A - \omega_B) = \omega_B - \omega_A; \quad \omega_B = 2\omega_A,$$

т. е. при выравнивании моментов удвоенная левая часть площади эпюры перерезывающих сил равна правой части эпюры.

Подбирая величины опорных значений перерезывающей силы $Q_A = \alpha R$, $Q_B = (1 - \alpha)R$ или абсциссу x_0 , удовлетворяющие поставленному условию, можем сравнительно быстро установить положение шарнира текучести.

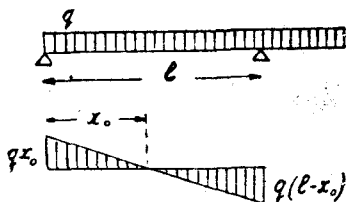
Например, при равномерно распределенной нагрузке (черт. 49)

$$\omega_A = \frac{qx_0x_0}{2} = \frac{qx_0^2}{2},$$

$$\omega_B = \frac{q(l-x_0)(l-x_0)}{2} = \frac{q(l-x_0)^2}{2};$$

следовательно

$$\frac{q(l-x_0)^2}{2} = 2 \frac{q \cdot x_0^2}{2},$$

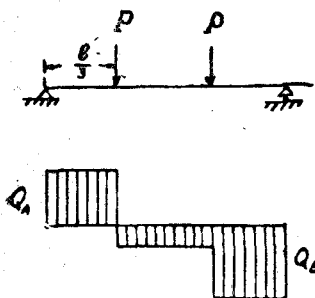


Черт. 49.

т. е. $x_0^2 + 2l \cdot x_0 - l^2 = 0$, откуда: $x_0 = 0,414l$,

т. е. получаем тот же результат, что и обычным путем. В том случае, когда на балке находятся сосредоточенные силы, наибольший изгибающий момент получается под одной из сил и вычисление x_0 не требуется. Например, если балка нагружена двумя сосредоточенными силами (черт. 50), то построение эпюры Q , удовлетворяющей условию

$2\omega_A = \omega_B$, сразу дает $x_0 = \frac{l}{3}$. Эпюрой Q можно воспользоваться для нахождения предельного момента и предельной силы:



Черт. 50.

$$2Q_A \cdot \frac{l}{3} = (P - Q_A) \frac{l}{3} + Q_B \frac{l}{3}; \quad 2Q_A = P - Q_A + Q_B;$$

$$\begin{cases} 3Q_A - Q_B = P \\ Q_A + Q_B = 2P. \end{cases}$$

Решая эти уравнения совместно, находим:

$$Q_A = \frac{3}{4}P; M_{x_0} = Q_A \cdot \frac{l}{3} = \frac{3}{4}P \cdot \frac{l}{3} = \frac{Pl}{4},$$

$$M_T = \frac{P_T l}{4}, \quad P_T = \frac{4M_T}{l},$$

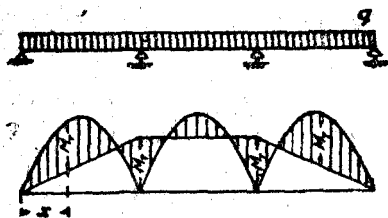
т. е. получим тот же результат, который получен раньше иначе.

Трехпролетные балки.

а) Нагрузка равномерно распределенная во всех трех пролетах (черт. 51).

Пользуясь выведенными выше теоремами о выравнивании моментов и порядке появления шарниров, наносим эпюру M предельного состояния без предварительного упругого расчета. По виду эпюры устанавливаем, что шарниры текучести появятся на промежуточных опорах и в крайних пролетах.

Пользуясь приведенной выше теоремой, находим положение шарнира в крайнем пролете.



Черт. 51.

$$x_0 = 0,414l.$$

Зная x_0 , легко отыскиваем изгибающий момент в соответствующем сечении простой балки:

$$M_{x_0}^0 = \frac{ql}{2}x_0 - \frac{qx_0^2}{2} = 0,207ql^2 - 0,086ql^2 = 0,121ql^2$$

и момент в данном сечении неразрезной балки:

$$M_T = 0,121ql^2 - \frac{M_T \cdot 0,414l}{l} = 0,121ql^2 - 0,414M_T,$$

откуда

$$M_T = \frac{0,121}{1,414}ql^2 = 0,086ql^2; \quad q_l = 11,64 \frac{M_T}{l^2},$$

т. е. предельный момент и предельная нагрузка для рассматриваемой балки получились точно такой же величины, как для двухпролетной балки, нагруженной равномерной нагрузкой. Для сравнения приводим данные упругого расчета:

моменты в пролетах: в 1-м: $M_{np1} = 0,078ql^2$,

в 2-м: $M_{np2} = 0,025ql^2$,

на опорах $M_1 = M_2 = -0,1ql^2$.

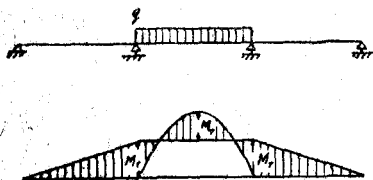
б) *Равномерно распределенная нагрузка только в среднем пролете* (черт. 52).

По эпюре моментов в предельном состоянии видим, что шарниры текучести появляются на 2-й и 3-ей опорах и в середине второго пролета. Предельный момент M_T находится из уравнения:

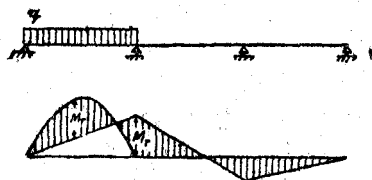
$$M_T = \frac{ql^2}{8} - M_T,$$

откуда

$$M_T = \frac{ql^2}{16} = 0,063ql^2, \quad q_T = 16 \frac{M_T}{l^2}.$$



Черт. 52.



Черт. 53.

в) *Нагрузка только в одном из крайних пролетов* (черт. 53).

Из эпюры моментов предельного состояния видно, что шарниры текучести появляются на второй опоре и в первом пролете; x_0 , M_T и q_T находятся совершенно таким же путем и получаются той же величины, что в случае расположения нагрузки на всех трех пролетах:

$$x_0 = 0,414l, \quad M_T = 0,086ql^2, \quad q_T = 11,64 \frac{M_T}{l^2}.$$

Таким образом, при расчете трехпролетных неразрезных балок могут иметь место два случая: 1) шарнир текучести является в крайнем пролете—в этом случае расчет ведется так же, как и двухпролетной балки и 2) шарнир текучести появляется в среднем пролете. В этом случае определение расчетного момента или нагрузки производится еще проще и никаких затруднений не вызывает.

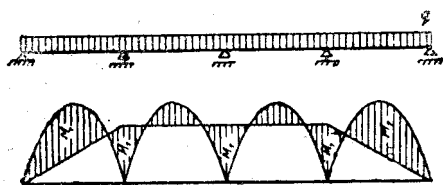
Многопролетные балки.

Расчет многопролетных балок по существу ничем не отличается от расчета трехпролетных: как и для последних следует установить, в каких пролетах появятся шарниры текучести: в крайних или промежуточных, после чего определение расчетных моментов производится уже известными способами. Положение шарниров в каждом частном случае нетрудно установить по эпюре моментов предельного состояния.

В качестве примера рассмотрим четырехпролетную балку при двух вариантах нагрузки.

а) *Нагрузка равномерно распределенная постоянной интенсивности* (черт. 54).

Из эпюры моментов предельного состояния видно, что шарнир текучести возникает в крайнем пролете. Следовательно, предельный момент и нагрузка имеют значения, соответствующие этому случаю, и как было найдено выше:



Черт. 54.

$$M_T = 0,086ql^2, \quad q_T = 11,64 \frac{M_T}{l^2}.$$

б) *Распределенная нагрузка интенсивностью q в крайних пролетах и интенсивностью 2q в промежуточных* (черт. 55).

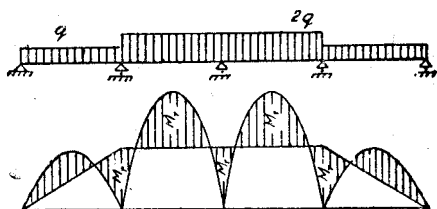
Из эпюры моментов предельного состояния видно, что шарниры текучести возникают в промежуточных пролетах.

При этом величина предельного момента находится из условия, что момент в середине промежуточного пролета равен опорному.

$$M_T = \frac{2q \cdot l^2}{8} - M_T,$$

откуда
$$M_T = \frac{2q \cdot l^2}{16} = \frac{q \cdot l^2}{8},$$

$$q_T = 8 \frac{M_T}{l^2}.$$



Черт. 55.

§ 9. Подбор сечений.

Подбор сечений балок, рассчитываемых по пластическому методу, не представляет затруднений и сводится к определению пластического момента сопротивления W_T .

Если схема балки и допускаемая нагрузка P заданы и установлен коэффициент безопасности n , то предельная нагрузка равна: $P_T = P \cdot n$.

Предельный момент может быть выражен в функции от P в зависимости от схемы балки и расположения нагрузки $M_T = f(P)$. С другой стороны, как известно,

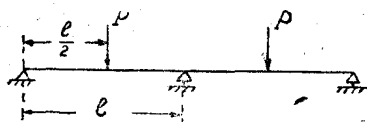
$$M_T = \sigma_s \cdot W_T,$$

откуда

$$W_T = \frac{M_T}{\sigma_s} = \frac{f(P_T)}{\sigma_s}.$$

Зная выражение W_T для принятой формы сечения, нетрудно подобрать размеры сечения.

Пример 1. Подобрать сечение двутавровой стальной балки, изображенной на чертеже 56, если $P = 2400$ кг,



Черт. 56.

$$\sigma_s = 2400 \text{ кг/см}^2,$$

$$l = 4 \text{ м},$$

$$n = 2.$$

Предельная нагрузка $P_T = P \cdot n = 2400 \cdot 2 = 4800$ кг. Значение предельного момента для данного случая нагрузки было установлено на стр. 105 настоящей работы.

$$M_T = \frac{P_T \cdot l}{6} = \frac{4800 \cdot 400}{6} = 320000 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Момент сопротивления (пластический)

$$W_T = \frac{M_T}{\sigma_s} = \frac{320000}{2400} = 133,3 \text{ см}^3.$$

Для того, чтобы установить № балки по существующему сортаменту, необходимо знать величину обычного момента сопротивления W , соответствующего найденному W_T . Обращаясь к таблице, находим:

$$\frac{W_T}{W} = 1,17,$$

откуда

$$W = \frac{W_T}{1,17} = \frac{133,3}{1,17} = 113,8 \text{ см}^3.$$

Этому значению W соответствует в сортаменте ОСТ балки № 16.

Подбор сечений можно вести и иначе, пользуясь не предельными нагрузками, а действительными, но вводя условные напряжения.

Сохраняя прежние обозначения, имеем следующие исходные зависимости:

$$M_T = f(P_T) \text{ и } M_T = \sigma_s \cdot W_T.$$

Деля обе части этих равенств на принятый коэффициент безопасности n , получим:

$$M = f(P) \text{ и } M = \frac{M_T}{n} = \frac{\sigma_s}{n} \cdot W_T.$$

Здесь M — действительный допускаемый момент,

P — допускаемая нагрузка.

Величина $\frac{\sigma_s}{n}$ может быть принята, как условное допускаемое напряжение R_T . Это напряжение в действительности не имеет места, так как уравнения пластической теории не применимы при упругой работе балки.

Вводя это напряжение, как условную величину для упрощения расчета, получим: $M = R_T \cdot W_T$,

откуда $W_T = \frac{M}{R_T}$.

Причем M определяется по формулам пластической теории в зависимости от допускаемой нагрузки P .

Пример 2. Подобрать размеры балки квадратного сечения, изображенной на чертеже 57, если $q = 1,2 \text{ т/м}$,



Черт. 57.

$$\sigma_s = 2400 \text{ кг/см}^2,$$

$$l = 4 \text{ м},$$

$$n = 2.$$

Согласно пластической теории:

$$M = \frac{q \cdot l^2}{16} = \frac{1,2 \cdot 16}{16} = 1,2 \text{ т} \cdot \text{м} = 120000 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Условное допускаемое напряжение:

$$R_T = \frac{\sigma_s}{n} = \frac{2400}{2} = 1200 \text{ кг/см}^2.$$

Пластический момент сопротивления:

$$W_T = \frac{M}{R_T} = \frac{120000}{1200} = 100 \text{ см}^3.$$

Как было установлено ранее,

$$W_T = \frac{bh^2}{4}.$$

При $h = 2b$ $W_T = \frac{h^3}{8} = 100 \text{ см}^3.$

Следовательно,

$$h = \sqrt[3]{8W_T} = \sqrt[3]{800} \cong 9,30 \text{ см}; \quad b = \frac{h}{2} \cong 4,65 \text{ см}.$$

Вследствие большого объема монографии „Расчет конструкций по разрушающим нагрузкам“ и недостатка места, в настоящем сборнике помещена только первая часть. Вторая часть содержит расчет балок переменного сечения, влияние осадки опор, расчет рамных конструкций, шпренгельных балок, стержневых ферм, расчет сооружений под подвижную нагрузку и будет напечатана в следующем выпуске сборника.