

НОВАЯ ФОРМУЛА ХОДА РОСТА ДРЕВОСТОЕВ ПО ВЫСОТЕ И ДИАМЕТРУ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕ- ДОВАНИЮ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ВЫСОТОЙ И ДИАМЕТРОМ

ВВЕДЕНИЕ

Лесная таксация располагает большим опытным материалом, который дает ей возможность делать разного рода обобщения, изучать закономерности и зависимости между отдельными таксационными элементами. Изучением этих зависимостей начали заниматься во второй половине XIX века.

Ряд исследований, обобщений в этих вопросах принадлежит таким исследователям, как проф. Вейзе, Вименаур, Копецкий, Гуттенберг, Вебер. Особенно же много в этой области сделано Шиффелем.

Зависимости между таксационными элементами приближенно выражаются функциями разного вида. Большинство исследователей сводили и сводят эти зависимости к уравнению прямой линии или уравнениям кривых 2 порядка.

Вебер, анализируя связь между таксационными элементами и рассматривая таксационные элементы, как функции возраста, применил в своей схеме трансцендентную функцию

$$y = a \left(1 - \frac{1}{1,0p^x} \right),$$

где:

y — текущая ордината (высота);

a — максимальное значение признака (высота);

x — возраст;

p — некоторый коэффициент, характеризующий энергию роста дерева, связанный с породой и условиями местопроизрастания и положения, занимаемого деревом в насаждении. (Проф. Тюрин).

После критики закономерностей, выраженных уравнениями Вебера, исследователи старались найти более простые формулы, связывающие таксационные элементы дерева и насаждения.

Ряд авторов делал даже выводы о невозможности математического толкования зависимостей и об ограниченном применении математических приемов при составлении таксационных таблиц.

Работы последнего времени показывают, что зависимость между таксационными элементами не такая уже простая. Это и понятно, если вспомнить, что таксационный элемент есть функция многих переменных (возраст, бонитет, тип леса и т. д.). Более полное изучение этих фактов приводит нас к довольно сложным уравнениям и ставит вопрос перед математической статистикой о нахождении методов для выравнивания рядов при помощи уравнений.

Так, проф. Н. В. Третьяков в работе „Методика учета текущего и среднего приростов древостоев“ (Вопросы таксации — Сборник трудов ЦНИИЛХ, 1937 г.) для выравнивания числа деревьев и обратной величины объема среднего дерева приводит уравнение $\ln(y - b) = kx + c$,

где:

y — текущая ордината (число стволов или $\frac{1}{v_{ср}}$);

x — возраст;

b — минимальное значение признака;

k и c — параметры.

Для выравнивания высот и диаметров проф. Н. В. Третьяков приводит уравнение:

$$\ln \frac{By}{B-y} = kx + c,$$

где B — максимальное значение признака, а остальные обозначения те же, как и для первого уравнения.

Это показывает, что все эти вопросы требуют разработки, так как уравнений прямой и кривых 2 порядка для изучения этих зависимостей недостаточно.

В работе „Методика исследования хода роста древостоев, установление пригодности существующих и составление новых таблиц хода роста“, помещенной в том же сборнике, Н. П. Курбатский и Г. А. Мокеев в главе „Камеральные работы“ (стр. 70—72) рекомендуют путь кривых 2 порядка.

Путь этот является более простым, но он имеет ряд существенных недостатков. Возьмем уравнение, связывающее высоту (H) с возрастом (A). Оно имеет вид уравнения гиперболы

$$H = 10,3 - \frac{1237,6}{A} \quad (\text{стр. 72})$$

Если в этом уравнении положить $A = 10$, то уже

Это показывает, что эта схема имеет крупные недостатки, так как не охватывает всего периода роста и что нужно работать над изысканием более совершенных схем.

В предлагаемой работе частично освещается этот вопрос по установлению зависимостей между таксационными элементами.

Работа состоит из 2-х разделов: 1. Анализ уравнения, характеризующего зависимость между таксационными элементами, выполнен В. Н. Дракиным.

2. Проверка теоретических положений на опытном материале и введение написаны Д. И. Вуевским.

Р а з д е л I

Математическое выражение функциональной зависимости $H=f(D)$ между высотой (H) и диаметром на высоте груди (D) имеет для таксации большое практическое значение. В литературе имеется несколько формул, которые в отдельных случаях в известном интервале дают весьма удовлетворительное совпадение с фактическим материалом. В качестве примера можно указать формулу Расторгуева $H = \lg_{2,3} D - 1,870$, приведенную в книге М. Г. Здорика „Статистика для лесных специалистов“. Указанная формула, полученная на основании 2425 измерений в еловых насаждениях II бонитета Дальне-Восточного края, дает следующие результаты:

Эмпир. D (в см.)	15,0	20,0	25,0	30,0	35,0	40,0	45,0	50,0	55,0	60,0	65,0
Эмпир. H (в м)	13,9	17,1	20,0	22,1	24,0	25,6	27,0	28,0	29,4	30,2	31,4
Вычисл. H (в м). . . .	13,8	17,3	19,9	22,1	24,0	25,6	27,0	28,3	29,4	30,4	31,4

Для ели I бонитета Расторгуев дает формулу:

$$H = \lg_{2,23} D - 1,656.$$

Пользуясь материалами Расторгуева для ели II бонитета, М. Г. Здорик получил формулу:

$$H = 12,4836 + 17,3236 \lg D,$$

дающую несколько худшее совпадение вычисленных данных с эмпирическими. Кроме логарифмической формулы в виде

$$H = a + b \lg D, \text{ или } H = a + bD + c \lg D$$

применяются такие формулы:

$$H = a + bD + cD^2$$

$$\text{и } H = a + \frac{b}{D}.$$

Общим недостатком этих формул является их чисто эмпирический характер, выражающийся прежде всего в том, что эти формулы теряют смысл при $D=0$. Таким образом, эти формулы не охватывают всего процесса роста насаждений. Это обстоятельство приравнивает подобные формулы по своему значению к кривым, полученным путем графического сглаживания опытного материала, и ограничивает их практическое применение узкими рамками.

С нашей точки зрения попытка найти непосредственно математическую зависимость между H и D , рассматривая одну из этих величин, как аргумент, а другую, как функцию, является теоретически несостоятельной, поскольку величины H и D , из которых вторая (диаметр на высоте груди) имеет искусственный характер, необходимо рассматривать, как два количественных признака, абстрагируемых нами от весьма сложного комплекса условий, определяющих рост насаждений. Однако, мы можем всякий количественный признак насаждения рассматривать, как функцию времени. Если найти эту функциональную зависимость от времени для интересующих нас величин H и D , то, исключив из уравнений:

$$H=f(t) \text{ и } D=\varphi(t)$$

переменный параметр t , т. е. время, мы сумеем найти искомую зависимость между H и D . Если эта зависимость выразится сложной формулой, то можно будет внести допустимые упрощения.

Любые таблицы хода роста насаждений дают нам эти функции, но в табличной форме, а нам необходимы формулы и формулы не эмпирические.

Известная формула Вебера

$$H=a(1-e^{-kt}), \quad (1)$$

где

H — высота, t — возраст, a и k — постоянные параметры, на первый взгляд кажется приемлемой, так как охватывает процесс роста в целом: при $t=0$, $H=0$.

Попробуем применить эту формулу к данным „всеобщих опытных таблиц хода роста нормальных сосновых насаждений“. (Проф. Орлов. Лесная вспомогательная книжка, табл. 52, I-а бон.).

Пользуясь способом средних для вычисления параметров a и k , находим:

$$H=42,2(1-e^{-0,01656t}). \quad (2)$$

Результаты вычислений по этой формуле даны в ниже-следующей таблице № 1.

Таблица № 1

1	2	3	4	5
№	t	$H(m)$ табличн.	H вычислен.	H исправл.
1	20	9,6	11,9	—
2	30	14,3	16,5	14,20
3	40	18,4	20,4	18,45
4	50	22,2	23,8	22,10
5	60	25,3	26,6	25,20
6	70	27,9	28,9	27,75
7	80	30,0	31,0	29,95
8	90	31,9	32,7	31,85
9	100	33,6	34,1	33,40
10	110	34,8	35,4	34,75
11	120	36,0	36,4	35,90
12	130	36,8	37,3	36,85
13	140	37,5	38,1	37,70

В графе 4-й показаны высоты, вычисленные по приведенной формуле, а в графе 5-й — исправленные высоты, которые значительно ближе подходят к табличным высотам. Поправки найдены весьма просто: каждая высота в графе 5-й есть среднее арифметическое двух соседних высот в графе 4-й, например,

$$14,20 = \frac{11,9 + 16,5}{2}$$

Смысл этих поправок, очевидно, заключается в том, что в приведенной формуле необходимо t (возраст) уменьшить на 5, т. е. на половину табличного интервала возрастов. Таким образом, «исправленные» высоты получаются по «исправленной» формуле:

$$H = 42,2 [1 - e^{-0,0155(t-5)}]. \quad (3)$$

Ясно, что эта поправка обращает нашу формулу в эмпирическую, так как при $t=0$, мы уже не получим $H=0$.

Дифференцируя уравнение (1), находим:

$$\frac{dH}{dt} = k(a - H), \quad (4)$$

где $\frac{dH}{dt}$ есть скорость роста высоты.

Отсюда видно, что согласно формулы Вебера, скорость роста высоты, начиная от значения ka при $t=0$, $H=0$, все время убывает. Но это не соответствует действительности, так как в младших возрастах скорость роста по высоте имеет максимум.

Дифференцируя равенство (4), получаем вторую производную:

$$\frac{d^2H}{dt^2} = -k^2(a - H). \quad (5)$$

Из формулы (5) видно, что вторая производная все время отрицательна. Следовательно, кривая роста высоты все время обращена выпуклостью вверх и не имеет точки перегиба (рис. 1).

Это также не соответствует действительности. На рис. 2 и 3, заимствованных нами из статьи проф. Н. В. Третьякова,

„Вопросы лесной таксации“ (Сборник трудов ЦНИИЛХ'а, Гостехлесиздат, 1937 г.) даны кривые хода роста высоты и диаметра в насаждениях.

На этих кривых, полученных путем сглаживания опытного материала, ясно виден перегиб, проходящий на молодой возраст.

Таким образом, формула Вебера не отображает всех особенностей хода роста насаждений по высоте; по тем же соображениям ее нельзя применить и к выравни-

ванию кривой хода роста по диаметру.

В упомянутой статье проф. Третьякова приведена формула автора:

$$(AT)^2 + k(AT) - CA^3 = 0,$$

где A — возраст, а T — или высота, или диаметр.

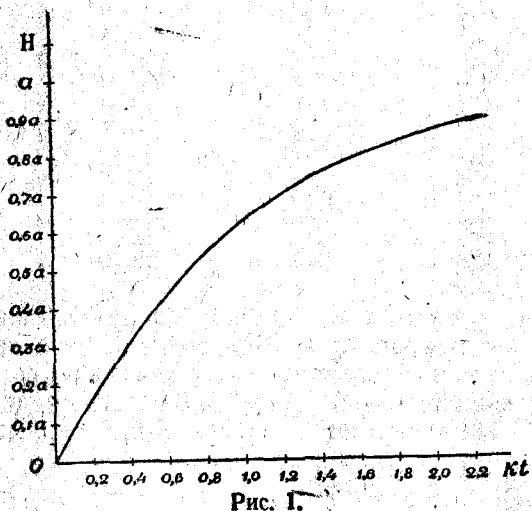


Рис. 1.

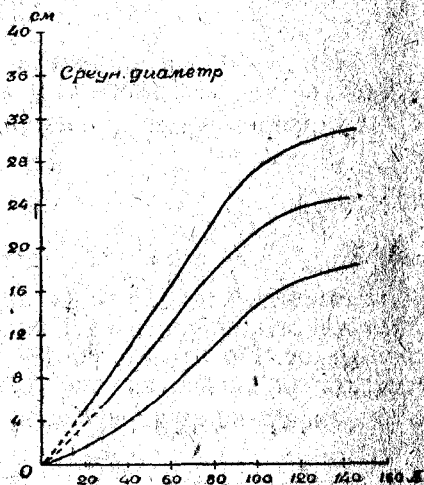
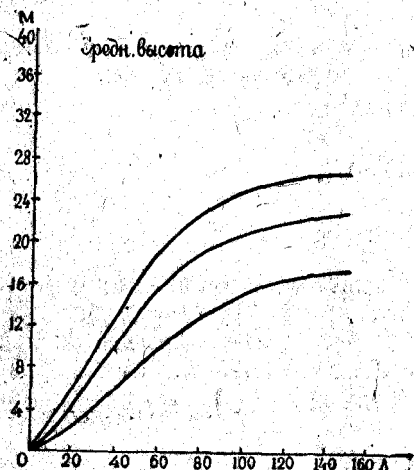


Рис. 2 и 3.

В наших обозначениях формула принимает вид:

$$(tH)^2 + k(tH) - Ct^2 = 0, \quad (6)$$

или, после сокращения на t ,

$$tH^2 + kH - Ct = 0. \quad (6')$$

Исследуем эту формулу.

При $t=0$ и $H=0$.

Представив уравнение (6') в виде

$$H^2 = C - \frac{kH}{t}, \quad (7)$$

находим, что при $t \rightarrow \infty$ $H^2 \rightarrow C$.

Таким образом, $\sqrt{C}$ есть верхняя граница роста высоты H , т. е. величина аналогичная параметру a в формуле Вебера. Так как при $t=0$ и $H=0$, то из формулы (7) вытекает, что

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ H \rightarrow 0}} \frac{H}{t} = \frac{C}{k}. \quad (8)$$

Дифференцируя уравнение (6') по t , находим:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{C - H^2}{2tH + k}. \quad (9)$$

При $t=0$ и $H=0$, получаем:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{C}{k}. \quad (10)$$

Следовательно, $\frac{C}{k}$ есть начальная скорость роста по высоте, что видно и из формулы (8).

Формула (9) показывает, что, начиная от $\frac{C}{k}$, скорость роста по высоте все время убывает, стремясь к нулю, когда H стремится к $\sqrt{C}$.

Поэтому, не обращаясь ко второй производной, мы можем сказать, что $\frac{dH}{dt}$ максимума не имеет, а кривая (6') не имеет точки перегиба.

Для второй производной мы имеем выражение:

$$\frac{d^2H}{dt^2} = -2 \frac{kH + C}{(2tH + k)^2} \cdot \frac{dH}{dt}. \quad (11)$$

Так как $\frac{dH}{dt} > 0$, то $\frac{d^2H}{dt^2} < 0$.

(Случай $H < 0$ мы, конечно, исключаем).

Исследование показывает, что кривая Третьякова аналогична кривой Вебера.

В той же статье проф. Третьякова приводится еще одна формула для выравнивания высот и диаметров —

$$\ln \frac{By}{B-y} = kx + C, \quad (12)$$

где y — высота, x — время, B и C — постоянные.

По формуле (12) при $x=0$ y не может быть равным 0.

Пусть при $x=0$, $y = \frac{B}{n}$.

Подстановка этих значений в уравнение (12) дает

$$C = \ln \frac{B}{n-1},$$

и формула (12) принимает вид:

$$\ln \frac{(n-1)y}{B-y} = kx, \quad (13)$$

откуда

$$y = \frac{B}{1 + (n-1)e^{-kx}}. \quad (14)$$

При $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow B$; при $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow 0$.

По формуле (12) берем производную высоты по времени, т. е. скорость роста по высоте:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{B} (B-y). \quad (15)$$

Подставляя сюда значение y по формуле (14), получаем:

$$\frac{dy}{dx} = kB \frac{(n-1)e^{-kx}}{[1 + (n-1)e^{-kx}]^2}. \quad (15')$$

Если $x=0$, то значение производной будет

$$\frac{dy}{dx} = kB \frac{n-1}{n^2}. \quad (16)$$

Из формулы (15') получаем:

$$\frac{dy}{dx} < kB \frac{(n-1)e^{-kx}}{[(n-1)e^{-kx}]^2} = \frac{kB}{(n-1)e^{-kx}}. \quad (17)$$

Чем больше параметр n , тем меньше начальная ордината $y = \frac{B}{n}$, тем меньше начальная скорость роста по высоте, как это видно из формулы (16). Однако, вместе с этим уменьшаются

все ординаты и скорость роста по высоте вообще, как это видно из формул (14 и 17).

Кривая имеет точку перегиба при $y = \frac{B}{2}$, как это видно из формулы второй производной:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{k^2}{B^2} y(B-y)(B-2y). \quad (18)$$

При $y < \frac{B}{2}$ кривая обращена выпуклостью вниз, так как $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$. При $y > \frac{B}{2}$ кривая обращена выпуклостью вверх, так как $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$. Кривая имеет вид, показанный на рис. 4.

Исследование показывает, что формула (12) не отображает хода роста по высоте в целом, однако, наличие 3-х параметров (B , k , n) дает возможность вычислить по этой формуле значения

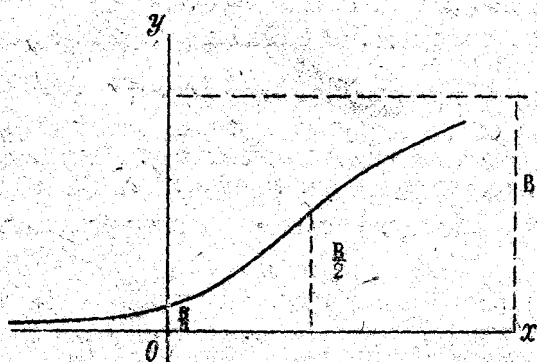


Рис. 4.

высот, близко подходящие, начиная с определенного возраста, к опытным данным.

Итак, ни одна из разобранных нами формул не выражает полностью хода роста насаждения по высоте или диаметру. Попробуем теперь построить гипотезу, которая привела бы нас к кривой, подобной кривым на рис. 2 и 3.

Форма этих кривых позволяет предполагать, что они касаются оси абсцисс в начале координат. Для этого необходимо, чтобы угловой коэффициент касательной в начале координат равнялся 0. Обозначая ординату (высота, диаметр) через y , а абсциссу (время) через t , имеем: $\frac{dy}{dt} = 0$ при $t = 0$.

Наличие точки перегиба показывает, что вторая производная должна обращаться в 0 при некотором значении t , приходящемся

на младший возраст. При этом до упомянутого значения t вторая производная должна быть положительной, так как кривая обращена здесь выпуклостью вниз, а после — отрицательной, так как после перегиба кривая обращена выпуклостью вверх. Далее, затухающий подъем кривой означает, что угловой коэффициент касательной, т. е. первая производная, стремится к 0 при неограниченно возрастающем t . Отсюда вытекает, что первая производная $\frac{dy}{dt}$, будучи положительной, возрастает от 0 до некоторого максимума, после чего стремится снова к 0 при неограниченном увеличении t . Но первая производная в данном случае выражает скорость роста насаждения по высоте (диаметру), и мы можем на основании предыдущего высказать следующую гипотезу: *скорость роста насаждения по высоте (диаметру), начиная от нулевого значения, достигает максимального значения (в младшем возрасте), после чего стремится к 0 при неограниченном увеличении возраста. Наша гипотеза имеет в виду естественный ход роста насаждения.*

Каждая из трех исследуемых нами формул, если ее рассматривать, как интеграл дифференциального уравнения $\frac{dy}{dt} = f(t)$, опирается на соответствующую гипотезу о поведении скорости роста насаждения по высоте (диаметру). Такими дифференциальными уравнениями являются формулы (4), (9) и (15).

На первый взгляд дифференциальное уравнение (15)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{B} y (B - y)^*$$

соответствует нашей гипотезе.

В самом деле, при $y = 0$ $\frac{dy}{dt} = 0$; далее, при $y = \frac{B}{2}$, скорость роста, как это видно из формулы (18), проходит через максимум; наконец, при $y \rightarrow B$ $\frac{dy}{dt} \rightarrow 0$.

Но дело в том, что $y = 0$ не при $t = 0$, а при $t = -\infty$.

Что касается максимальной скорости роста, то наступление ее при $y = \frac{B}{2}$, где B — верхняя граница высоты, при всяких условиях, констатирует как бы некоторый „закон“ роста по высоте. Но для констатации такого закона таблицы хода роста не дают никаких оснований.

* Буква x , обозначающая время в формулах (12) — (18), заменена здесь буквой t .

Мы выражаем нашу гипотезу посредством следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{dy}{dt} = ky^p (a^q - y^q), \quad (19)$$

где y —высота (диаметр), t —возраст, k —коэффициент пропорциональности, a —верхняя граница, p и q —положительные величины.

За начальные условия принимаем $t=0$; $y=0$.

При $t=0$ $\frac{dy}{dt}=0$, т. е. первое условие соблюдается.

Дифференцируя уравнение (19), получаем:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = k^2 y^{2p-1} (a^q - y^q) [pa^q - (p+q)y^q]. \quad (20)$$

Таким образом, точка перегиба интегральной кривой получается при $pa^q - (p+q)y^q = 0$.

Следовательно, максимальная скорость роста имеет место при $y = a \left(\frac{p}{p+q} \right)^{\frac{1}{q}}$, (21)

где множитель при a —правильная дробь. Наконец, при $y \rightarrow a$

$$\frac{dy}{dt} \rightarrow 0.$$

Уравнение (19) содержит 4 параметра: a, k, p, q . Мы оставляем за собой право в дальнейшем наложить добавочное условие на параметры p и q и придти к трем параметрам.

Найдем общий интеграл уравнения (19). Отделяя переменные, имеем: $\int \frac{dy}{y^p (a^q - y^q)} = k \int dt$. (22)

Введем новую переменную:

$$z = \ln(a^q - y^q); \quad dz = -q \frac{dy}{y^{1-q} (a^q - y^q)}.$$

Далее полагаем $1 - q = p$. (23)

В таком случае: $dz = -q \frac{dy}{y^p (a^q - y^q)}$,

и уравнение (22) принимает вид:

$$\int dz = -kq \int dt, \quad (22')$$

откуда $z = -kqt + C$,

или

$$\ln(a^q - y^q) = -kqt + C \quad (24)$$

Начальные условия $t=0$, $y=0$ дают для произвольной постоянной C значение

$$C = \ln a^q$$

Подставляя это значение в уравнение (24), находим:

$$\ln \frac{a^q - y^q}{a^q} = -kqt,$$

или

$$y = a(1 - e^{-kqt})^{\frac{1}{q}}. \quad (25)$$

Теперь, вводя новые обозначения, а именно: вместо kq — k а вместо $\frac{1}{q}$ — m , окончательно получаем:

$$y = a(1 - e^{-kt})^m. \quad (26)$$

Так как $1 - q = p > 0$, то $q < 1$, следовательно,

$$\frac{1}{q} = m > 1. \quad (27)$$

При условии (23) формула (21) принимает вид:

$$y = a(1 - q)^{\frac{1}{q}},$$

или в новых обозначениях: $v = a \left(\frac{m-1}{m} \right)^m. \quad (28)$

Отсюда видно, что чем ближе m к 1, тем меньшую часть a составляет высота, соответствующая максимальной скорости роста.

Подставляя выражение (28) в формулу (26), находим после простых преобразований возраст, когда скорость роста достигает максимума:

$$t = \frac{\lg m}{k \lg e}. \quad (29)$$

Если положить $m=1$, то формула (26) переходит в формулу Вебера.

При $m < 1$ получается кривая, не имеющая точки перегиба, обращенная выпуклостью вверх и касающаяся в начале координат оси ординат.

Изменение вида кривой в зависимости от значения m показано на рисунке 5.

Пусть ход роста данного насаждения по высоте и диаметру* выражается по формуле (26). Обозначая высоту через y , а диаметр через x , имеем: $y = b(1 - e^{-kt})^m$ $x = a(1 - e^{-lt})^n$,

$$\text{или } -kt = \ln \frac{b^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}} \quad -lt = \ln \frac{a^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}}.$$

Примечание: Имеется в виду диаметр у шейки корня или расстояние $\frac{H}{n}$ от шейки

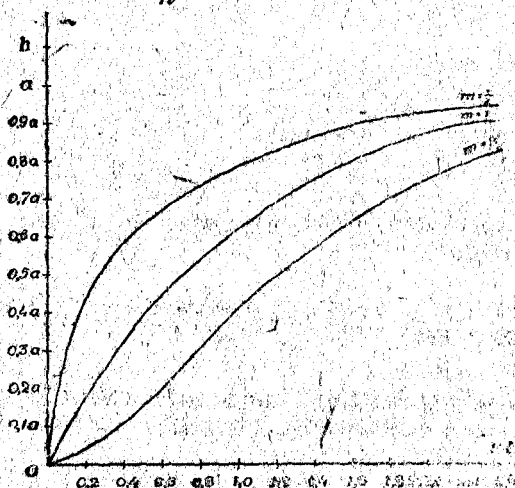


Рис. 5.

Исключая из последних уравнений t , получаем:

$$\ln \frac{b^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}} = \frac{k}{l} \ln \frac{a^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}}, \quad (30)$$

или, обозначая $\frac{k}{l}$ через p ,

$$\ln \frac{b^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}} = p \ln \frac{a^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}}. \quad (30')$$

Решая уравнение (30') относительно y , находим:

$$y = b \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^p \right\}^m. \quad (31)$$

* Примечание. Имеется в виду диаметр у шейки корня или на расстоянии $\frac{H}{n}$ от шейки.

Как видим, формула получается довольно сложная, содержащая 5 параметров a, b, n, m, p . Конечно, наличие 5 параметров обещает хорошую увязку с опытными данными, но предварительное определение параметров и уточнение их по способу наименьших квадратов приводит к сложным вычислениям.

Упростим формулу (30¹). Логарифмы в формуле (30⁴) разлагаются в бесконечные ряды, сходящиеся при $x < a$; $y < b$.

Чтобы несколько усилить сходимость рядов, введем новые переменные, а именно:

$$\frac{a^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}; \quad \frac{b^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}, \quad (32)$$

отсюда находим:

$$\alpha = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{2a^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}; \quad \beta = \frac{y^{\frac{1}{m}}}{2b^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}}}. \quad (33)$$

Подставляя выражения (32) в равенство (31) и разлагая логарифмы, получаем:

$$\beta + \frac{\beta^3}{3} + \frac{\beta^5}{5} + \dots = p \left(\alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} + \dots \right) \quad (34)$$

Отбрасывая члены высших порядков слева и справа и заменяя β и α их значениями (33), имеем:

$$\frac{y^{\frac{1}{m}}}{2b^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}}} = p \frac{x^{\frac{1}{n}}}{2a^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}, \quad (35)$$

или:

$$2a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{m}} - 2pb^{\frac{1}{m}} x^{\frac{1}{n}} = (1-p) y^{\frac{1}{m}} x^{\frac{1}{n}}. \quad (36)$$

Вводя обозначения $\frac{2a^{\frac{1}{n}}}{1-p} = A_1$; $-\frac{2pb^{\frac{1}{m}}}{1-p} = B_1$, имеем уравнение $A_1 y^{\frac{1}{m}} + B_1 x^{\frac{1}{n}} = y^{\frac{1}{m}} x^{\frac{1}{n}}$,
(37)

содержащее 4 параметра: A_1, B_1, m, n .

Так как m и n вообще заключаются между 1 и 1,5, то полагая $m = n = 1$ находим:

$$Ay + Bx = xy. \quad (38)$$

Это — гипербола, проходящая через начало координат и имеющая асимптотами прямые, параллельные осям координат (рис. 6).

Если формулу (38) принять за первое приближение формулы (37), то, вычислив параметры A и B по уравнению прямой $A\xi + B\eta = 1$, (39)

где $\xi = \frac{1}{x}$; $\eta = \frac{1}{y}$, можем представить параметры формулы (37) в виде $A_1 = A + \alpha$; $B_1 = B + \beta$; $m = 1 + \mu$; $n = 1 + \nu$

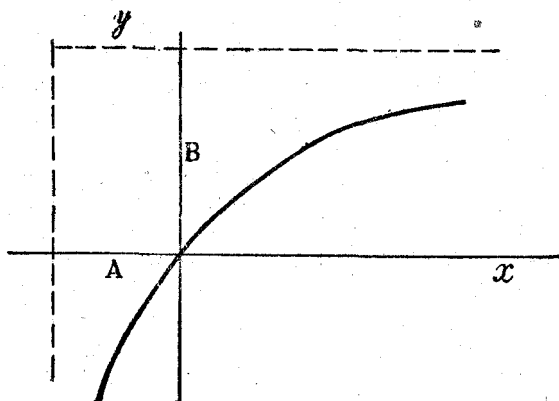


Рис. 6.

и вычислить поправки α , β , μ , ν по способу наименьших квадратов. Получим кривую, подобную кривой на рис. 6, но с одной асимптотой и измененной кривизной.

Число параметров можно свести к 3, положив $m = n$.

Если в формуле (36) положить $p = 1$, то получим:

$$a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{m}} - b^{\frac{1}{m}} x^{\frac{1}{n}} = 0,$$

или

$$y = \frac{b}{a^{\frac{n}{m}}} x^{\frac{m}{n}}. \quad (40)$$

Вводя обозначения $\frac{b}{a^{\frac{n}{m}}} = A$; $\frac{m}{n} = q$,

$$\text{имеем } y = Ax^q, \quad (41)$$

$$\text{или } \lg y = \lg A + q \lg x. \quad (41^1)$$

Кривая (41) проходит через начало координат и обращена выпуклостью вверх при $q < 1$.

Параметры формулы (41¹) можно вычислить по уравнению прямой $\eta = a + q\xi$, (42)

где $\eta = \lg y$; $\xi = \lg x$; $a = \lg A$.

Как видим, формула получается довольно сложная, содержащая 5 параметров: a, b, n, m, p . Конечно, наличие 5 параметров обещает хорошую увязку с опытными данными, но предварительное определение параметров и уточнение их по способу наименьших квадратов приводит к сложным вычислениям.

Упростим формулу (30¹). Логарифмы в формуле (30⁴) разлагаются в бесконечные ряды, сходящиеся при $x < a$; $y < b$.

Чтобы несколько усилить сходимость рядов, введем новые переменные, а именно:

$$\frac{a^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}; \quad \frac{b^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}, \quad (32)$$

отсюда находим:

$$\alpha = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{2a^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}; \quad \beta = \frac{y^{\frac{1}{m}}}{2b^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}}}. \quad (33)$$

Подставляя выражения (32) в равенство (31) и разлагая логарифмы, получаем:

$$\beta + \frac{\beta^3}{3} + \frac{\beta^5}{5} + \dots = p \left(\alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} + \dots \right) \quad (34)$$

Отбрасывая члены высших порядков слева и справа и заменяя β и α их значениями (33), имеем:

$$\frac{y^{\frac{1}{m}}}{2b^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}}} = p \frac{x^{\frac{1}{n}}}{2a^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}, \quad (35)$$

или:

$$2a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{m}} - 2pb^{\frac{1}{m}} x^{\frac{1}{n}} = (1-p) y^{\frac{1}{m}} x^{\frac{1}{n}}. \quad (36)$$

Вводя обозначения $\frac{2a^{\frac{1}{n}}}{1-p} = A_1$; $-\frac{2pb^{\frac{1}{m}}}{1-p} = B_1$, имеем уравнение $A_1 y^{\frac{1}{m}} + B_1 x^{\frac{1}{n}} = y^{\frac{1}{m}} x^{\frac{1}{n}}$,
содержащее 4 параметра: A_1, B_1, m, n .

Так как m и n вообще заключаются между 1 и 1,5, то полагая $m = n = 1$ находим:

$$Ay + Bx = xy. \quad (38)$$

Это — гипербола, проходящая через начало координат и имеющая асимптотами прямые, параллельные осям координат (рис. 6).

Если формулу (38) принять за первое приближение формулы (37), то, вычислив параметры A и B по уравнению прямой $A\xi + B\eta = 1$, (39)

где $\xi = \frac{1}{x}$; $\eta = \frac{1}{y}$, можем представить параметры формулы (37) в виде $A_1 = A + \alpha$; $B_1 = B + \beta$; $m = 1 + \mu$; $n = 1 + \nu$

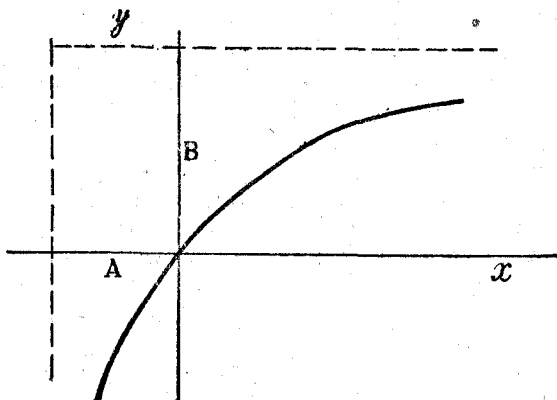


Рис. 6.

и вычислить поправки α , β , μ , ν по способу наименьших квадратов. Получим кривую, подобную кривой на рис. 6, но с одной асимптотой и измененной кривизной.

Число параметров можно свести к 3, положив $m = n$.

Если в формуле (36) положить $p = 1$, то получим:

$$a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{m}} - b^{\frac{1}{m}} x^{\frac{1}{n}} = 0,$$

или

$$y = \frac{b}{a^{\frac{n}{m}}} x^{\frac{m}{n}}. \quad (40)$$

Вводя обозначения $\frac{b}{a^{\frac{n}{m}}} = A$; $\frac{m}{n} = q$,

$$\text{имеем } y = Ax^q, \quad (41)$$

$$\text{или } \lg y = \lg A + q \lg x. \quad (41')$$

Кривая (41) проходит через начало координат и обращена выпуклостью вверх при $q < 1$.

Параметры формулы (41') можно вычислить по уравнению прямой $\eta = a + q\xi$, (42)

где $\eta = \lg y$; $\xi = \lg x$; $a = \lg A$.

Разлагая функцию (31) по формуле Ньютона, получаем:

$$y = A_1 x^{\frac{m}{n}} + A_2 x^{\frac{m+1}{n}} + A_3 x^{\frac{m+2}{n}} + A_4 x^{\frac{m+3}{n}} + \dots \quad (43)$$

Если $m = n$, то $y = A_1 x + A_2 x^{1+\frac{1}{n}} + A_3 x^{1+\frac{2}{n}} + \dots \quad (44)$

Наконец, при $n = 1$, $y = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots \quad (45)$

Последнюю формулу можно написать без всяких предварительных исследований, если принять, что функция $y = f(x)$ разлагается в сходящийся ряд по формуле Маклорена и при $x=0$ $y=0$.

Переходим к вычислению параметров основной формулы (26). Мы уже указывали, что в общем m содержится между 1 и 1,5. В качестве первого приближения полагаем $m = 1$. Формула (26) принимает вид $y = a(1 - e^{-kt})$. (46)

Оставшиеся параметры a и k можно вычислить по табличным данным различными способами. Простейшим будет следующий способ. Пусть нам дана таблица высот или диаметров (y) и соответствующих возрастов (t).

i	1	2	3		n
t_i	t_1	t_2	t_3		t_n
y_i	y_1	y_2	y_3		y_n

Применяя к этой таблице формулу (46), получаем n равенств:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a + ae^{-kt_1} \\ y_2 &= a + ae^{-kt_2} \\ &\dots \dots \dots \\ y_{n-1} &= a + ae^{-kt_{n-1}} \\ y_n &= a + ae^{-kt_n} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Так как интервалы возрастов в таблицах берутся равными, то $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_n - t_{n-1} = \Delta t$.

Обозначая $e^{-k\Delta t}$ через h , имеем:

$$e^{-kt_1} \cdot h = e^{-k(t_1 + \Delta t)} = e^{-kt_2}$$

$$e^{-kt_2} \cdot h = e^{-kt_3} \text{ и т. д.}$$

Умножим теперь первые $n - 1$ уравнений (47) почленно на h и почленно сложим.

Получим: $h \sum_{i=1}^{n-1} y_i = h(n-1)a - a(e^{-kt_1} + e^{-kt_2} + \dots + e^{-kt_n})$. (48)

Складывая почленно уравнения (47), за исключением первого получаем:

$$\sum_2^n y_i = (n-1)a - a(e^{-kt_2} + e^{-kt_3} + \dots + e^{-kt_n}). \quad (49)$$

Вычитая теперь почленно уравнение (48) из уравнения (49), находим: $\sum_{i=2}^n y_i - h \sum_{i=1}^{n-1} y_i = a(n-1)(1-h)$,

откуда

$$a = \frac{\sum_2^n y_i - h \sum_1^{n-1} y_i}{(n-1)(1-h)} \quad (50)$$

Для определения h в уравнениях (47) переносим член a в левую часть и возводим обе части в квадрат:

$$\left. \begin{aligned} a^2 - 2ay_1 + y_1^2 &= a^2 e^{-2kt_1} \\ a^2 - 2ay_2 + y_2^2 &= a^2 e^{-2kt_2} \\ . &. \\ a^2 - 2ay_{n-1} + y_{n-1}^2 &= a^2 e^{-2kt_{n-1}} \\ a^2 - 2ay_n + y_n^2 &= a^2 e^{-2kt_n} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Складывая почленно уравнения (51), за исключением первого, получаем:

$$(n-1)a^2 - 2a \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2 = a^2(e^{-2kt_1} + e^{-2kt_2} + \dots + e^{-2kt_n}). \quad (52)$$

Умножим все уравнения (51), кроме последнего, почленно на h^2 и сложим почленно:

$$(n-1)a^2h^2 - 2ah^2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i + h^2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 = a^2(e^{-2kt_2} + e^{-2kt_3} + \dots + e^{-2kt_n}). \quad (53)$$

Вычитая уравнение (53) из уравнения (52), имеем:

$$(n-1)a^2(1-h^2) + 2a \left(h^2 \sum_1^{n-1} y_i - \sum_2^n y_i \right) + \sum_2^n y_i^2 - h^2 \sum_1^{n-1} y_i^2 = 0.$$

Подставляя сюда значения a из формулы (50) и производя упрощения, получаем:

$$h^2 = \frac{(n-1) \sum_2 y_i^2 - \left(\sum_2 y_i \right)^2}{(n-1) \sum_1 y_i^2 - \left(\sum_1 y^2 \right)^2}. \quad (54)$$

Сначала вычисляем h по формуле (54), затем a по формуле (50). Далее по формуле $h = e^{-kt}$ определяем k , а именно:

$$k = -\frac{\lg h}{\Delta t \lg e}. \quad (55)$$

Теперь введем обозначения:

$$A_1 = e^{-kt_1}; A_2 = e^{-kt_2} \text{ и т. д.} \quad (56)$$

В таком случае на основании формулы (55)

$$\left. \begin{aligned} \lg A_1 &= -kt_1 \lg e = t_1 \frac{\lg h}{\Delta t}, \\ A_2 &= e^{-kt_2} \cdot e^{-k\Delta t} = A_1 h, \\ \lg A_2 &= \lg A_1 + \lg h, \\ \lg A_3 &= \lg A_2 + \lg h \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Найдя по $\lg A_i$ все A_i , берем величины $1 - A_i = 1 - e^{-kt}$, после чего находим первоначальные, невыравненные значения $\bar{y}$ по формуле:

$$\lg \bar{y}_i = \lg (1 - A_i) + \lg a. \quad (58)$$

Ход выше указанных вычислений показан в графах 1—10 табл. № 2. Далее приступаем к выравниванию значений $\bar{y}_i$, причем выравненные значения мы будем обозначать через y_i .

По формуле (46) имеем:

$$\bar{y} = a(1 - e^{-kt})^m = f(a, k, m); \quad (59)$$

где $m = 1$.

Обозначая поправки параметров a , k и m через α , λ , μ , имеем

$$y = (a + \alpha) [1 - e^{-(k+\lambda)t}]^{m+\mu} = f(a + \alpha, k + \lambda, m + \mu). \quad (60)$$

Разлагая функцию (60) в строку Тэйлора и ограничиваясь членами первого порядка относительно приращений α , λ , μ , получаем:

$$y = f(a, k, m) + \alpha f'_a + \lambda f'_k + \mu f'_m. \quad (61)$$

Найдем входящие в формулу (61) частные производные функции (59), принимая во внимание, что начальное значение m равно 1,

$$f'_a = (1 - e^{-kt})^m = 1 - e^{-kt} = \frac{\bar{y}}{a},$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
i	t	y	y^2	$\lg A$	A	$1-A$	$\lg(1-A)$	$\lg \bar{y}$	$\frac{q}{y}$	$\frac{p}{y-\bar{y}}$	$\frac{r}{tA}$	$\lg(1-A)$	$\frac{s}{\bar{y}\lg(1-A)}$	q^2	r^2	s^2

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
qp	qr	qs	rp	rs	sp	$\lg B$	B	$1-B$	$\lg(1-B)$	$m \lg(1-B)$	$\lg \bar{y}$	$\bar{y}$	$y-\bar{y}$	$\%$

$$f'_k = ate^{-kt} = atA,$$

$$f'_m = a(1 - e^{-kt})^m \ln(1 - e^{-kt}) = \bar{y} \frac{\lg(1-A)}{\lg e}.$$

Теперь уравнение (61) принимает вид:

$$y = \bar{y} + \frac{\bar{y}}{a} \alpha + atA \lambda + \bar{y} \frac{\lg(1-A)}{\lg e} \mu. \quad (61^1)$$

Введем обозначения:

$$\frac{\alpha}{a} = u; \quad a\lambda = v; \quad \frac{\mu}{\lg e} = w; \quad y - \bar{y} = p;$$

$$\bar{y} = q; \quad tA = r; \quad \bar{y} \lg(1-A) = s.$$

В таком случае уравнение (61¹) принимает вид:

$$qu + rv + sw = p. \quad (62)$$

Теперь обычным способом находим три уравнения для определения u , v , w

$$\left. \begin{aligned} u \sum q^2 + v \sum rq + w \sum sq &= \sum pq, \\ u \sum qr + v \sum r^2 + w \sum sr &= \sum pr, \\ u \sum qs + v \sum rs + w \sum s^2 &= \sum ps. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Найдя из уравнений (63) u , v , w , вычисляем поправки по формулам:

$$\alpha = au; \quad \lambda = \frac{v}{a}; \quad \mu = w \lg e. \quad (64)$$

Обозначив исправленные параметры через k_1, a_1, m_1 , получаем:

$$a_1 = a + \alpha; k_1 = k + \lambda; m_1 = 1 + \mu. \quad (65)$$

Далее, по формуле (55) находим h_1 , т. е. исправленное h :

$$\lg h_1 = -k_1 \Delta t \lg e. \quad (66)$$

Обозначая исправленное A_i через B_i , находим по формулам (57):

$$\lg B_1 = t_1 \frac{\lg h_1}{\Delta t},$$

$$\lg B_2 = \lg B_1 + \lg h_1$$

$$\lg B_3 = \lg B_2 + \lg h_1 \text{ и т. д.}$$

После этого находим величины $1 - B_i$, $\lg(1 - B_i)$ и $\lg \bar{y}_i =$

$$= m_1 \lg(1 - B_i) + \lg a_1. \quad (67)$$

Откуда и получаем $\bar{y}_i$. Ход вычислений по выравниванию показан в табл. № 2 в графах 11—32.

Изложенный способ дает наименьшую сумму квадратов отклонений $y - \bar{y}$. Можно видоизменить способ вычисления таким образом, чтобы наименьшей была сумма квадратов относительных отклонений $\frac{y - \bar{y}}{\bar{y}} \approx \frac{y - \bar{y}}{y}$. Это несколько сократит ведомость вычислений.

Переходя к этому способу, представим уравнение (61¹) в виде:

$$100 \frac{y - \bar{y}}{\bar{y}} = 100 \frac{\alpha}{a} + 10 \frac{tA}{y} 10a\lambda + 100 \lg(1 - A) \frac{\mu}{\lg e}, \quad (68)$$

или $p = u + qv + rw, \quad (68')$

где: $p = 100 \frac{y - \bar{y}}{\bar{y}}; q = 10 \frac{tA}{y}; r = 100 \lg(1 - A);$

$$\left. \begin{aligned} u &= 100 \frac{\alpha}{a}; v = 10a\lambda; w = \frac{\mu}{\lg e}. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Уравнения для определения u, v, w имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \sum p &= nu + v \sum q + w \sum r \\ \sum pq &= u \sum q + v \sum q^2 + w \sum qr \\ \sum pr &= u \sum r + v \sum rq + w \sum r^2 \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Вычислив u , v , w , находим поправки:

$$\alpha = \frac{au}{100}; \lambda = \frac{v}{10a}; \mu = w \lg e. \quad (71)$$

Если пользоваться таблицами функции e^{-x} , то вычислив по формуле (55) k , находим величины kt_1 , kt_2 и т. д., а по таблицам—величины $A_1 = e^{-kt_1}$; $A_2 = e^{-kt_2}$ и т. д.

Величины $\bar{y}$ находим умножением.

Таким же способом вычисляем выравненные значения $\bar{y}$ по исправленным параметрам $a_1 = a + \alpha$; $k_1 = k + \lambda$; $m_1 = 1 + \mu$. (65)

Получаем: $B_1 = e^{-k_1 t_1}$; $B_2 = e^{-k_1 t_2}$; $B_3 = e^{-k_1 t_3}$ и т. д.,

$$\lg(1 - B_1); \lg(1 - B_2) \text{ и т. д.,} \quad (67')$$

$$m_1 \lg(1 - B_1); m_1 \lg(1 - B_2) \text{ и т. д.,}$$

$$\lg \bar{y}_1 = m_1 \lg(1 - B_1) + \lg a_1 \text{ и т. д.}$$

Ход вычислений показан в таблице № 3.

К сожалению, имеющиеся в печати таблицы функции e^{-x} содержат значения x с двумя десятичными знаками, между тем значения kt приходится брать с тремя знаками.

Если составить таблицы значений функций e^{-x} ; $1 - e^{-x}$; $\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$; $\lg(1 - e^{-x})$ и некоторых других с значениями x , содержащими 3 десятичных знака, то заполнение таблиц вычислений по выравниванию весьма упростится.

Второй способ можно видоизменить, взяв вместо относительных отклонений $\frac{y - \bar{y}}{\bar{y}}$ разности натуральных логарифмов $\ln y - \ln \bar{y}$. Смысл способа от этого не изменится, так как при достаточно малых отклонениях имеем:

$$\Delta \ln y \cong d \ln y = \frac{dy}{y} \cong \frac{\Delta y}{y}.$$

Из основной формулы (26) получаем:

$$\ln y = \ln a + m \ln(1 - e^{-kt}). \quad (72)$$

Так как первоначальное значение $m = 1$, то

$$\ln \bar{y} = \ln a + m \ln(1 - e^{-kt}) = f(a, k, m) \text{ при } m = 1. \quad (73)$$

Выравнивание
(Всеобщие таблицы хода роста сосновых)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
i	t	y	y^2	kt	A e^{-kt}	$1-A$	$\bar{y}$	$y-\bar{y}$	$\frac{p}{100} \frac{y-\bar{y}}{\bar{y}}$	tA	$\frac{q}{100} \frac{tA}{y}$	r $100 \lg(1-A)$	pq
1	20	9,6	92,16	0,32	0,7262	0,2738	11,61	-2,01	-20,94	14,524	15,13	56,25	316,82
2	30	14,3	204,49	0,48	0,6188	0,3812	16,16	-1,86	-13,01	18,564	12,98	41,89	168,87
3	40	18,4	338,56	0,64	0,5273	0,4727	20,04	-1,64	-8,91	21,092	11,46	32,55	102,11
4	50	22,2	497,29	0,80	0,4493	0,5507	23,35	-1,15	-5,18	22,465	10,12	25,91	52,42
5	60	25,3	640,09	0,96	0,3829	0,5171	26,17	-0,87	-3,44	22,974	9,08	20,96	31,24
6	70	27,9	778,41	1,12	0,3263	0,6737	28,56	-0,66	-2,72	22,841	8,19	17,15	22,28
7	80	30,0	900,00	1,28	0,2780	0,7220	30,61	-0,61	-2,03	25,020	8,34	14,15	16,98
8	90	31,9	1017,61	1,44	0,2369	0,7631	32,36	-0,46	-1,44	21,321	6,68	11,74	9,62
9	100	33,6	1128,96	1,60	0,2019	0,7981	33,84	-0,24	-0,71	20,190	5,99	9,79	4,25
10	110	34,8	1211,04	1,76	0,1720	0,8280	35,11	-0,31	-0,89	18,920	5,44	8,20	4,84
11	120	36,0	1296,00	1,92	0,1466	0,8534	36,18	-0,18	-0,50	17,592	4,89	6,89	2,45
12	130	36,8	1354,24	2,08	0,1249	0,8751	37,10	-0,30	-0,82	16,237	4,41	5,80	3,62
13	140	37,5	1406,25	2,24	0,1065	0,8935	37,88	-0,38	-1,01	14,910	3,98	4,89	4,02
Σ		358,2	10865,10						-61,60		106,69	-256,17	-739,47
Σ_{n-1}^n		348,7	10772,94										
Σ_1^{n-1}		320,8	9458,85										

$$1) h^2 = \frac{(n-1) \sum y_i^2 - \left(\sum y_i \right)^2}{(n-1) \sum y_i^2 - \left(\sum y_i \right)^2} = \frac{12 \cdot 10772,94 - 348,7^2}{12 \cdot 9458,85 - 320,8^2} = 0,7253;$$

$$2) h = \sqrt{0,7253} = 0,8516; \quad 3) a = \frac{\sum y_i - h \sum y_i}{(n-1)(1-h)} = \frac{348,7 - 0,8516 \cdot 320,8}{12 \cdot 0,1484} = 42,4;$$

$$4) k = \frac{-\lg h}{\Delta t \lg e} = \frac{0,0648}{10 \cdot 0,4343} = 0,01606 \approx 0,016; \quad 5) kt_1 = 0,32; \quad kt_2 = 0,48 \text{ и т. д.}$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma p &= nu + v \Sigma q + w \Sigma r \\ \Sigma pq &= u \Sigma q + v \Sigma q^2 + w \Sigma qr \\ \Sigma pr &= u \Sigma r + v \Sigma r q + w \Sigma r^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -61,60 &= 13u + 106,69v - 256,17w; \\ -739,47 &= 106,69u + 1019,52v - 2739,21w; \\ 2338,87 &= -256,17u - 2739,21v + 7989,25w; \end{aligned}$$

$$7) 1,626 = v + 4,425w;$$

$$1,934 = v + 4,849w.$$

$$8) 0,308 = 0,424w;$$

насаждений профессора Тюрина—1^а бонитет)

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
pr	qr	q^2	r^2	$k_1 t$	B $e^{-k_1 t}$	$1-B$	$\lg(1-B)$	$m_1 \lg(1-B)$	$\lg y =$	$y =$	$y =$	$y - y =$	% абсол. откл.
177,87	851,06	228,92	3164,06	0,395	0,6737	0,3263	1,5136	1,3604	0,9721	9,38	9,4	0,2	2,1
544,99	543,73	168,48	1754,77	0,593	0,5527	0,4473	1,6506	1,5404	1,1524	14,20	14,2	0,1	0,7
290,02	373,02	131,33	1059,50	0,790	0,4538	0,5462	1,7374	1,6545	1,2665	18,47	18,5	-0,1	0,5
134,21	262,21	102,41	671,33	0,988	0,3723	0,6273	1,7975	1,7336	1,3456	22,16	22,2	0,0	0,0
72,10	190,32	82,45	439,32	1,185	0,3058	0,6942	1,8415	1,7915	1,4035	25,32	25,3	0,0	0,0
46,65	140,46	67,08	294,12	1,383	0,2509	0,7491	1,8746	1,8350	1,4470	27,99	28,0	-0,1	0,4
28,72	118,01	59,66	200,22	1,580	0,2060	0,7940	1,8998	1,8682	1,4802	30,21	30,2	-0,2	0,7
16,91	78,42	44,62	137,83	1,778	0,1690	0,8310	1,9196	1,8942	1,5062	32,07	32,1	-0,2	0,6
6,95	58,64	35,88	95,84	1,975	0,1388	0,8612	1,9351	1,9146	1,5266	33,52	33,6	0,0	0,0
7,30	44,61	29,59	67,24	2,173	0,1139	0,8861	1,9474	1,9308	1,5428	34,89	34,9	-0,1	0,3
3,45	33,69	23,91	47,47	2,370	0,0935	0,9065	1,9573	1,9438	1,5558	35,96	36,0	0,0	0,0
4,76	25,58	19,45	33,64	2,568	0,0767	0,9237	1,9655	1,9546	1,5666	36,87	36,9	-0,1	0,3
4,94	19,46	15,84	23,91	2,765	0,0630	0,9370	1,9717	1,9628	1,5748	37,57	37,6	-0,1	0,3
2338,87	-2739,21	1019,52	7989,25										5,9

9) $w = 0,7264$;

$v = 1,688$;

$u = -3,457$.

12) $\bar{y} = 40,93 (1 - e^{-0,01975t}) 1,3155$;

10) $\alpha = \frac{au}{100} = -1,466$;

13) Среднее отклонение в процентах = 0,45;

$\lambda = \frac{v}{10a} = 0,003745$;

$\mu = w \lg e = 0,3155$.

11) $a_1 = a + \alpha = 40,93$;

14) $t_m = \frac{\lg m_1}{k_1 \lg e} = 14,0$;

$k_1 = k + \lambda = 0,01975$;

$m_1 = 1 + \mu = 1,3155$.

Исправленное значение $\ln y$ будет:

$$\ln y = \ln(a + \alpha) + (m + \mu) \ln [1 - e^{-(k+\lambda)t}] = f(a + \alpha, k + \lambda, m + \mu) \quad (74)$$

Разлагая функцию (74) в ряд по степеням приращений и отбрасывая члены высших порядков малости, имеем:

$$\ln y = f(a, k, m) + \alpha f'_a + \lambda f'_k + \mu f'_m. \quad (74')$$

Из уравнения (73) находим:

$$f'_a = \frac{1}{a}; \quad f'_m = \ln(1 - e^{-kt});$$

$$f'_k = m \frac{te^{-kt}}{1 - e^{-kt}} = \frac{te^{-kt}}{1 - e^{-kt}};$$

так как $m = 1$.

Теперь уравнение (74') принимает вид:

$$\ln y = \ln \bar{y} + \frac{\alpha}{a} + \frac{te^{-kt}}{1 - e^{-kt}} \lambda + \ln(1 - e^{-kt}) \mu. \quad (75)$$

Для того, чтобы перейти от натуральных логарифмов к десятичным, умножим обе части уравнения (75) на $\lg e$, получим:

$$\lg y - \lg \bar{y} = \frac{\alpha \lg e}{a} + \frac{tA}{1 - A} \lambda \lg e + \lg(1 - A) \mu. \quad (75')$$

Вводя новые обозначения, а именно:

$$\lg y - \lg \bar{y} = p; \quad \frac{tA}{1 - A} = q; \quad \lg(1 - A) = r;$$

$$\frac{\alpha \lg e}{a} = u; \quad \lambda \lg e = v; \quad \mu = w,$$

получаем окончательно:

$$p = u + qv + rw. \quad (76)$$

Уравнения для вычисления u , v , w будут:

$$\left. \begin{aligned} nu + v \sum q + w \sum r &= \sum p \\ u \sum q + v \sum q^2 + w \sum qr &= \sum pq \\ u \sum r + v \sum rq + w \sum r^2 &= \sum pr \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Определив отсюда u , v , w , вычисляем:

$$\alpha = \frac{ua}{\lg e}; \lambda = \frac{v}{\lg e}; \mu = w,$$

после чего находим все $\lg \bar{y}_i$ по формуле (67').

Вместо этого мы можем вычислить все $\lg \bar{y}_i$ по формуле (75) или, что то же самое, по формуле

$$\lg \bar{y} = \lg \bar{y} + p_1, \quad (78)$$

где p_1 есть выравненное p по формуле (76).

Результаты по формуле (78) будут ближе к табличным значениям y , так как в этом случае мы вычисляем значения $\bar{y}$ по формуле (74'), по которой производится и выравнивание.

Что же касается вычислений по формуле (67'), то они дают значения $\bar{y}$ по формуле (74). Ясно, что результаты вычислений по одному и другому способу будут отличаться.

Отклонение одних результатов от других можно оценить, взяв в разложении функции (74) члены второго порядка малости.

Обозначив значение $\bar{y}$ по формуле (74) через $\bar{y}^I$, а по формуле (74') через $\bar{y}^{II}$, получаем:

$$\begin{aligned} \ln \bar{y}^I - \ln \bar{y}^{II} = & \frac{1}{2} (\alpha^2 f''_{aa} + \lambda^2 f''_{kk} + \mu^2 f''_{mm} + \\ & + 2\alpha\lambda f''_{ak} + 2\alpha\mu f''_{am} + 2\lambda\mu f''_{km}). \end{aligned} \quad (79)$$

$$\text{Так как } f''_{aa} = -\frac{1}{a^2}; f''_{mm} = 0; f''_{kk} = -t^2 \frac{e^{-kt}}{(1 - e^{-kt})^2};$$

$$f''_{ak} = 0; f''_{am} = 0; f''_{km} = \frac{te^{-kt}}{1 - e^{-kt}},$$

то

$$\ln \bar{y}^I - \ln \bar{y}^{II} = \frac{1}{2} \left[-\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{t^2 e^{-kt}}{(1 - e^{-kt})^2} \lambda^2 + 2 \frac{te^{-kt}}{1 - e^{-kt}} \lambda \mu \right],$$

или

$$\lg \bar{y}^I - \lg \bar{y}^{II} = \frac{\lg e}{2} \left[2 \frac{te^{-kt}}{1 - e^{-kt}} \lambda \mu - \frac{t^2 e^{-kt}}{(1 - e^{-kt})^2} \lambda^2 - \frac{\alpha^2}{a^2} \right] \quad (80)$$

Если предварительные значения $\bar{y}$ будут значительно отличаться от y , то α , λ , μ не будут достаточно малыми и отклонения $\lg \bar{y}^I - \lg \bar{y}^{II}$ могут оказаться значительными. В таком случае придется произвести вторичное сглаживание для того, чтобы получить такие поправки α_1 , λ_1 , μ_1 , при которых по формуле (67) получились бы значения y , не менее близкие к y , чем

значения $\bar{y}$, вычисленные по формуле (78), т. е. по формуле (74'), (75).

Ход вычислений по третьему способу с применением формулы (78), показан в табл. 6, разд. II.

Раздел II

По разработанной схеме вычислений для уравнения $y = a(1 - e^{-kt})^m$ нами вычислены значения высот и диаметров* для ряда таблиц хода роста сосновых насаждений: всеобщих таблиц хода роста сосновых насаждений проф. Тюрина, таблиц Варгаса-де-Бедемара для Ленинградской губернии, шведских таблиц Мааса.

Для I бонитета таблиц Варгаса-де-Бедемара по высоте приведены полностью все вычисления (табл. № 6).

Для остальных же таблиц приведены окончательные результаты.

Таблица № 4.

Высоты по всеобщим таблицам профессора Тюрина.

сосна

t (возраст)	I-а бонитет				I бонитет			
	Высота по таблиц. (H)	H по предлагаемому уравнению	% абсолютного отклонения	H по ги-перболе	H таблиц.	H по предлагаемому уравнению	% абсолютного отклонения	H по ги-перболе
20	9,6	9,6	0,6	—	8,4	8,8	4,7	—
30	14,3	14,3	0,0	—	12,3	12,6	2,4	—
40	18,4	18,5	0,5	19,3	16,2	16,2	0,0	17,2
50	22,2	22,2	0,0	24,2	19,6	19,2	2,0	21,5
60	25,3	25,3	0,0	27,4	22,4	22,1	1,3	24,4
70	27,9	27,9	0,0	29,7	24,8	24,6	0,9	26,4
80	30,0	30,1	0,3	31,5	26,7	26,8	0,3	28,0
90	31,9	31,9	0,0	32,8	28,4	28,7	1,0	29,2
100	33,6	33,5	0,3	33,9	29,9	29,6	1,0	30,1
110	34,8	34,7	0,3	34,8	31,0	31,1	0,3	30,9
120	36,0	35,8	0,5	35,5	32,0	32,0	0,0	31,6
130	36,8	36,7	0,3	36,2	32,7	32,8	0,3	32,1
140	37,5	37,4	0,3	36,7	33,3	33,5	0,2	32,6
Среднее . .	—	0,2	—	—	—	—	1,1	—

* Примечание. Применяя формулу (26) к таблицам хода роста сосны по диаметру на высоте груди, мы рассматриваем значения последнего, как искаженные значения диаметра на высоте $\frac{n}{n}$. Близость вычисленных диаметров к табличным показывает, что гибкость формулы (26) и при этих условиях дает хорошие результаты в пределах табличных возрастов.

Таблица № 5

III бонитет					V бонитет			
<i>t</i> (возраст)	<i>H</i> таблич.	По предлагаемому уравнению	% абсолютного отклонения	<i>H</i> по гиперболе	<i>H</i> таблич.	По предлагаемому уравнению	% абсолютного отклонения	<i>H</i> по гиперболе
20	5,6	5,7	1,7	—	3,5	3,4	2,8	—
30	8,7	8,7	0,0	—	5,4	5,6	3,7	—
40	11,7	11,4	2,6	12,5	7,4	7,5	1,3	8,3
50	14,3	14,0	2,0	15,9	9,2	9,3	1,0	10,5
60	16,5	16,1	2,4	18,1	10,8	10,8	0,0	11,9
70	18,5	18,0	2,7	19,7	12,3	12,1	1,6	13,0
80	20,0	19,7	1,3	20,9	13,4	13,3	0,7	13,8
90	21,4	21,1	1,4	21,9	14,3	14,2	0,6	14,4
100	22,5	22,4	0,5	22,6	15,1	15,0	0,6	14,9
110	23,4	23,3	0,0	23,2	15,6	15,6	0,0	15,3
120	24,0	24,4	1,2	23,7	16,0	16,1	0,6	15,6
130	24,6	24,8	0,8	24,2	—	—	—	—
140	25,0	25,1	0,5	24,5	—	—	—	—
Среднее			1,3	—	—	—	1,0	—

Выравнивание высот сосны (таблица)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
i	t	y	y^2	$\lg A$	A e^{-kt}	$1-A$	$\lg(1-A)$	$\lg y$	$\lg y$	$\frac{p}{\lg y - \lg y}$	tA	$\frac{q}{1-A}$	$\lg(1-A)$
1	20	7,3	53	1,8710	0,7430	0,2570	1,4099	0,9507	0,8633	-0,0874	14,86	57,82	0,5901
2	30	10,7	114	1,8065	0,6404	0,3596	1,5558	1,0966	1,0294	-0,0672	19,21	53,42	0,4442
3	40	14,0	196	1,7420	0,5521	0,4479	1,6513	1,1921	1,1461	-0,0460	22,08	49,30	0,3487
4	50	17,1	292	1,6775	0,4758	0,5242	1,7195	1,2603	1,2330	-0,0270	26,21	50,00	0,2805
5	60	19,8	392	1,6130	0,4102	0,5898	1,7707	1,3115	1,2967	-0,0148	24,61	41,73	0,2293
6	70	21,9	480	1,5485	0,3536	0,6464	1,8105	1,3513	1,3404	-0,0109	24,75	38,29	0,1895
7	80	23,8	566	1,4840	0,3048	0,6952	1,8421	1,3829	1,3766	-0,0063	24,38	35,07	0,1579
8	90	25,3	640	1,4195	0,2627	0,7373	1,8677	1,4085	1,4031	-0,0054	23,64	32,06	0,1323
9	100	26,8	718	1,3550	0,2265	0,7735	1,8885	1,4293	1,4281	-0,0012	22,65	29,28	0,1115
10	110	28,0	784	1,2905	0,1952	0,8048	1,9057	1,4465	1,4472	+0,0007	21,47	26,68	0,0943
11	120	29,0	841	1,2260	0,1683	0,8317	1,9200	1,4608	1,4624	+0,0016	20,20	24,24	0,0800
12	130	29,6	876	1,1615	0,1451	0,8549	1,9520	1,4728	1,4713	-0,0015	18,86	22,06	0,0680
13	140	29,9	894	1,0970	0,1250	0,8750	1,9420	1,4828	1,4757	-0,0071	17,50	20,00	0,0580
$\sum_{i=1}^{n-1}$							3,2157	17,2461		-0,2725		480,00	-2,7843
$\sum_{i=1}^n$		253,3	5952										
$\sum_{i=2}^n$		275,9	6793										

$$1) h^2 = \frac{(n-1) \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{(n-1) \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)^2} = \frac{12 \cdot 6793 - 275,9^2}{12 \cdot 5952 - 253,3^2} = 0,7428; h = \sqrt{0,7428} = 0,8619;$$

$$\lg h = 1,9355;$$

$$2) a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - h \sum_{i=1}^{n-1} y_i}{(n-1)(1-h)} = \frac{275,9 - 0,8619 \cdot 253,3}{12 \cdot 0,1381} = 34,78 \text{ м}; \lg a = 1,5408.$$

$$3) \lg A_1 = \lg t_1 \frac{\lg h}{\Delta t}; \lg A_2 = \lg A_1 + \lg h \text{ и т. д.};$$

$$4) \lg \bar{y}_1 = \lg a + \lg(1 - A_1); \lg \bar{y}_2 = \lg a + \lg(1 - A_2) \text{ и т. д.}$$

5) Составляем уравнение с тремя неизвестными:

$$13u + 480v - 2,7843w = -0,2725;$$

$$480u + 19638,6v - 126,06w = -13,842;$$

$$-2,7843u - 126,06v + 0,9124w = 0,1263.$$

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
qr	pq	pr	q^2	r^2	vq	wr	δ ($u+vq+wr$)	$\lg y + \delta$ ($\lg y$)	y	Δ $y - y$	% абсол. откл.
34,12	-5,053	+0,05157	3343,2	0,34822	0,0443	-0,1345	-0,0901	0,8606	7,3	0,0	0,0
23,73	-3,590	+0,02985	2858,7	0,19730	0,0410	-0,1013	-0,0607	1,0359	10,9	-0,2	1,87
17,19	-2,268	+0,01604	2430,5	0,12160	0,0378	-0,0795	-0,0421	1,1500	14,1	-0,1	0,72
14,03	-1,350	+0,00757	2500,0	0,07868	0,0383	-0,0640	-0,0261	1,2342	17,2	-0,1	0,59
9,57	-0,618	+0,00339	1741,4	0,05257	0,0320	-0,0528	-0,0212	1,2903	19,5	+0,3	1,51
7,26	-0,417	+0,00207	1466,1	0,03590	0,0294	-0,0432	-0,0142	1,3371	21,7	+0,2	0,91
5,54	-0,221	+0,00099	1229,9	0,02493	0,0269	-0,0360	-0,0095	1,3734	23,6	+0,2	0,84
4,24	-0,173	+0,00071	1028,0	0,01750	0,0246	-0,0299	-0,0057	1,4028	25,3	0,0	0,00
3,26	-0,035	+0,00013	857,3	0,01243	0,0224	-0,0254	-0,0034	1,4259	26,7	+0,1	0,37
2,52	+0,019	-0,00007	711,8	0,00889	0,0205	-0,0215	-0,0014	1,4451	27,9	+0,1	0,36
1,94	+0,039	-0,00013	590,0	0,00640	0,0186	-0,0182	-0,0000	1,4608	28,9	+0,1	0,34
1,50	-0,033	+0,00010	486,7	0,00462	0,0169	-0,0155	+0,0010	1,4738	29,8	-0,2	0,68
1,16	-0,142	+0,00041	400,0	0,00336	0,0153	-0,0132	+0,0017	1,4811	30,3	-0,4	1,38
-126,06	-13,842	+0,11263	19638,6	0,91240							

6) Система с двумя неизвестными примет вид:

$$1,8613 u + 16,6123 v = 0,01192;$$

$$-0,2439 u + 17,6246 v = 0,01362.$$

7) Получаем уравнение с одним неизвестным:

$$81,18669 v = 0,62246.$$

$$8) v = 0,0007667; \quad u = -0,0004389; \quad w = 0,2280.$$

$$9) \alpha = u \cdot a \cdot 2,3026 = -0,0004389 \cdot 34,78 \cdot 2,3026 = -0,04;$$

$$\lambda = v \cdot 2,3026 = 0,0007667 \cdot 2,3026 = 0,00177;$$

$$k_o = -\frac{\lg h}{\Delta t} \cdot 2,3026 = \frac{0,0645}{10} \cdot 2,3026 = 0,01485.$$

$$10) \text{Окончательные параметры: } \alpha_1 = 34,74 \text{ м; } k_1 = 0,01662; \quad m_1 = 1,228.$$

11) Уравнение принимает вид:

$$y = 34,74 (1 - e^{-0,01662 t})^{1,228}.$$

12) Среднее отклонение=0,73%.

Таблица 7

Высоты по таблицам Ленинградской губернии.
с о с н а

t (возраст)	I бонитет				t (возраст)	III бонитет			
	Высота по таблицам (H)	H по предлагаемому уравниванию	% абсолютного откл.	H по гиперболе		Высота по таблицам (H)	H по предлагаемому уравниванию	% абсолютного отклонения	H по гиперболе
20	7,3	7,3	0,0	—	20	4,9	5,1	4,1	—
30	10,7	10,9	1,9	—	30	7,6	8,0	5,2	—
40	14,0	14,1	0,7	14,9	40	10,4	10,5	1,0	11,1
50	17,1	17,2	0,6	19,0	50	12,8	12,8	0,0	14,8
60	19,8	19,5	1,5	21,7	60	15,2	15,1	0,7	17,3
70	21,9	21,7	0,9	23,6	70	17,4	16,8	3,4	19,0
80	23,8	23,6	0,8	25,0	80	19,2	18,5	3,6	20,3
90	25,3	25,3	0,0	26,2	90	20,7	20,0	3,4	21,4
100	26,8	26,7	0,4	27,0	100	21,9	21,4	2,3	22,2
110	28,0	27,9	0,4	27,8	110	22,9	22,6	1,3	22,9
120	29,0	28,9	0,3	28,4	120	23,8	23,7	0,4	23,4
130	29,6	29,8	0,7	28,9	130	24,4	24,6	0,8	23,9
140	29,9	30,3	1,3	29,4	140	25,0	25,5	2,0	24,3
Среднее. . .				0,7	—	Среднее. . .			

Высоты по шведским таблицам
Сосна

Таблица № 9

<i>t</i> возраст	III бонитет				V бонитет			
	Высота по таблицам (<i>H</i>)	<i>H</i> по предлагаемому уравнинию	% абсолют. отклон.	<i>H</i> по гиперболе	Высота по таблицам (<i>H</i>)	<i>H</i> по предлагаемому уравнинию	% абсолют. отклон.	<i>H</i> по гиперболе
30	7,8	7,9	1,3	—	4,3	4,9	14,0	—
40	10,3	10,1	1,9	9,9	6,3	6,4	1,6	10,0
50	12,5	12,5	0,0	13,0	8,2	7,8	4,9	11,0
60	14,4	14,3	0,7	15,1	9,9	9,1	8,0	11,7
70	16,0	15,8	1,2	16,6	11,3	10,4	8,0	12,2
80	17,3	17,1	1,1	17,7	12,4	11,6	6,4	12,5
90	18,3	18,0	1,6	18,6	13,2	12,7	3,8	12,8
100	19,1	18,8	1,5	19,2	13,8	13,8	0,0	13,0
110	19,8	19,4	2,0	19,8	14,3	14,7	2,8	13,2
120	20,4	19,9	2,4	20,3	14,7	15,5	5,4	13,4
130	20,8	20,3	2,4	20,7	14,9	15,3	9,4	13,5
140	21,2	20,5	3,3	21,0	—	—	—	—
150	21,4	20,7	3,3	21,3	—	—	—	—
Среднее			1,7	—	Среднее		5,4	—

Таблица № 10

Диаметры (Д) по всеобщим таблицам профессора Тюрина.

<i>t</i> (возраст)	I-a бонитет			I бонитет			<i>t</i> (возраст)	III бонитет			V бонитет		
	Д таблиц.	Д по предлагаемому уравни.	% абсолют. отклон.	Д таблиц.	Д по предлагаемому уравни.	% абсолют. отклон.		Д таблиц.	Д по предлагаемому уравни.	% абсолют. отклон.	Д таблиц.	Д по предлагаемому уравни.	% абсолют. отклон.
20	9,6	9,6	0,0	8,4	8,5	1,2	20	5,9	5,8	1,8	3,2	3,2	0,0
30	14,5	14,5	0,0	12,6	12,6	0,0	30	8,8	8,9	1,2	5,2	5,2	0,0
40	19,0	19,1	0,5	16,6	16,5	0,6	40	11,8	11,8	0,0	7,1	7,1	0,0
50	23,3	23,3	0,0	20,4	20,1	1,4	50	14,5	14,5	0,0	9,0	9,0	0,0
60	27,2	27,2	0,0	23,8	23,5	1,2	60	17,2	17,2	0,0	10,6	10,6	0,0
70	30,8	30,9	0,3	27,0	26,8	0,7	70	19,5	19,6	0,5	12,2	12,2	0,0
80	34,1	34,1	0,0	30,2	29,7	1,6	80	21,8	21,8	0,0	13,7	13,7	0,0
90	37,2	37,0	0,5	33,0	32,5	1,4	90	24,1	23,9	0,8	15,1	15,1	0,0
100	40,0	39,7	0,7	35,5	35,0	1,2	100	26,1	25,8	1,1	16,4	16,4	0,0
110	42,4	42,1	0,7	37,6	37,5	0,2	110	27,9	27,6	1,1	17,5	17,5	0,0
120	44,5	44,3	0,4	39,4	39,4	0,0	120	29,4	29,2	0,7	18,4	18,5	0,1
130	46,0	46,2	0,4	40,8	41,5	1,7	130	30,7	30,7	0,0	—	—	—
140	47,0	47,7	0,4	41,8	43,6	4,3	140	31,6	31,9	0,9	—	—	—
Среднее		0,4	—	—	—	1,2	Среднее		0,6	—	—	—	—

Таблица № 11.

Диаметры по таблицам Ленинградской губернии.

t (возраст)	I бонитет			III бонитет			V бонитет		
	Д таблич.	Д по предл. уравниен.	% абсол. откл.	Д таблич.	Д по предл. уравниению	% абсол. откл.	Д таблич.	Д по предл. уравниению	% абсол. откл.
20	7,6	7,4	2,6	6,1	5,3	13,1	—	—	—
30	10,2	10,3	1,0	7,4	7,8	5,4	5,3	5,5	3,8
40	11,9	13,2	10,9	9,1	10,1	11,0	6,8	7,1	4,4
50	14,7	15,0	8,9	11,4	12,3	7,9	8,4	8,4	0,0
60	19,1	18,8	1,5	14,0	14,5	3,6	9,9	9,9	0,0
70	22,3	21,5	3,6	17,7	16,5	6,8	11,2	11,2	0,0
80	26,4	24,2	8,3	18,6	18,5	0,5	12,4	12,4	0,0
90	28,7	26,9	6,3	21,3	20,4	4,2	14,0	13,7	2,1
100	31,0	29,6	1,3	22,9	22,2	3,0	14,7	14,8	0,7
110	33,2	32,2	3,0	24,4	23,9	2,0	—	—	—
120	34,8	34,9	0,3	25,9	25,6	1,1	—	—	—
130	36,0	37,6	4,4	26,7	27,2	1,8	—	—	—
140	36,9	40,2	8,9	27,7	28,1	1,4	—	—	—
Среднее	—	—	4,7	—	—	3,5	—	—	1,1

Таблица № 12.

Диаметры по шведским таблицам.

t (возраст)	I бонитет			III бонитет			V бонитет		
	Д таблич.	Д по предл. уравниен.	% абсол. откл.	Д таблич.	Д по предл. уравниен.	% абсол. откл.	Д таблич.	Д по предл. уравниен.	% абсол. откл.
30	11,5	11,7	1,7	7,2	7,0	2,8	4,0	4,3	7,5
40	14,8	14,7	0,7	9,4	9,4	0,0	5,4	5,5	1,8
50	17,4	17,4	0,0	11,4	11,5	0,9	6,8	6,8	0,0
60	20,0	20,1	0,5	13,3	13,5	1,5	8,2	8,0	2,4
70	22,3	22,6	1,3	15,2	15,5	1,9	9,6	9,3	3,1
80	24,7	25,0	1,2	17,0	17,3	1,8	11,0	10,6	3,6
90	27,0	27,2	0,7	18,8	19,0	1,0	12,4	12,0	3,2
100	29,3	29,3	0,0	20,6	20,6	0,0	13,7	13,4	2,2
110	31,5	31,3	0,6	22,3	22,0	1,3	15,0	14,9	0,7
120	33,6	33,3	0,9	23,8	23,3	2,1	16,1	16,7	1,9
130	35,3	35,2	0,3	25,0	24,5	2,0	17,0	18,0	5,9
140	36,8	36,9	0,3	26,0	25,6	1,5	—	—	—
150	38,0	38,5	1,3	26,8	27,4	2,2	—	—	—
Среднее	—	—	0,7	—	—	1,5	—	—	1,8

Сосновые культуры I-а и I бонитетов Кореневской дачи, Ленинского лесничества, Гомельского лесхоза.

ВЫСОТЫ.

t (возраст)	I-а бонитет			I бонитет		
	Опытн. вы- соты (H)	H по предл. ур-нию	% отклон.	Опытн. высоты (H)	H по предл. ур-нию	% откл.
5	1,7	1,7	0,0	1,7	1,8	5,9
10	5,0	5,1	2,0	4,9	4,7	4,1
15	8,1	7,7	5,0	7,5	7,5	0,0
20	11,1	10,8	3,0	10,0	10,3	3,0
25	13,7	13,7	0,0	12,8	12,8	0,0
30	15,9	16,5	4,0	14,8	14,9	0,7
35	18,0	18,5	3,0	16,5	17,1	3,6
40	19,9	20,4	2,5	17,9	18,5	3,4
45	21,7	22,0	1,5	20,1	19,7	2,0
50	24,6	23,3	5,3	—	—	—
55	—	—	—	—	—	—
Среднее . .		—	2,6	—	—	2,5

По всем таблицам, начиная с всеобщих проф. Тюрина и кончая ленинградскими и шведскими, получается, что значения высот, вычисленных по уравнению $y = a(1 - e^{-kt})^m$ очень мало отличаются от приведенных в таблицах.

Показатель m в 19 случаях из 20—положительный, что полностью увязывается с гипотезой. В одном только случае m имеет значение 0,9, что может объясняться малым материалом для V бонитета шведских таблиц, а также неоднородностью материала, которой очень трудно добиться для этих бонитетов. Теоретический анализ дает уравнение скорости хода роста насаждения по высоте и время, когда насаждение имеет наибольший прирост по этому элементу.

К сожалению, таблицы хода роста для сосны не дают возможности проанализировать этот вывод, так как максимальный прирост по высоте имеет место до 20-ти лет. На 25-ти пробах I-а и I бонитетов в сосновых культурах Кореневской дачи Ленинского лесничества Гомельского лесхоза получается, что максимальный прирост для I-а и I бонитетов наблюдается в возрасте 10—15 лет.

По формуле же $t = \frac{\lg m}{k \lg e}$ для I-a и I бонитетов имеем максимальный прирост в возрасте 9—11 лет.

К. Ф. Мирон в своей работе „Тэхніка культур сасны, ёлкі і дуба“ (Беларускі Навукова-даследчы Інстытут Лісной гаспадаркі, 1935 г.) приводит изменение высот культур по трехлетиям, причем максимальная скорость прироста для посадок отмечена в возрасте 9—15 лет.

Зависимость между бонитетом и показателем m , который для всеобщих таблиц хода роста по высоте изменяется в пределах 1,022 до 1,537, характеризует коэффициент корреляции^(*) $= 0,67$, с коэффициентом Фишера $z = 0,811$ и $Q = 0,11$, которое показывает, что вероятность случайных отклонений от 0 до $\pm 0,67 = 0,11$, т. е. такие отклонения могут встретиться в 11 случаях из 100 рядов наблюдений, подобных нашему ряду. Вероятность положительного случайного отклонения от 0 до 0,67 будет вдвое меньше, т. е. 0,06. Таким образом, z указывает для нашего ряда на действительную прямую положительную связь между № бонитета и показателем m .

Совсем другая картина получается для таблиц Варгаса-де-Бедемара, где коэффициент корреляции между бонитетом и показателем $m = 0,20$, коэффициент Фишера $z = 0,203$, а $Q = 0,78$, что свидетельствует о слабой связи.

Между бонитетами и показателем k тесной зависимости не установлено. Параметр a тесно связан с бонитетом и с увеличением № бонитета уменьшается. Коэффициент корреляции между бонитетом и параметром a всеобщих таблиц хода роста $= -0,97$, что указывает на наличие почти функциональной связи. Такая же картина с параметром a наблюдается и по другим таблицам. Для того, чтобы показать насколько близко подходят к эмпирическим ординатам ординаты уравнения $y = a(1 - e^{-kt})^m$, и уравнения гиперболы $y = \frac{a}{x} + b$, нами приведены таковые для таблиц Варгаса-де-Бедемара (таблицы Ленинградской губернии), всеобщих и шведских (таблицы 4, 5, 7—12 вкл.).*

Рассмотрение таблиц показывает, что лучшие результаты для высот дает уравнение $y = a(1 - e^{-kt})^m$. Нам могут заметить, что материал в таблицах выравнен и поэтому значения ординат, полученных по уравнению $y = a(1 - e^{-kt})^m$, близки к табличным. Чтобы показать, что и на сыром эмпирическом материале уравнение $y = a(1 - e^{-kt})^m$ дает лучшие результаты, приводим высоты по пятилетиям для сосновых культур Корневской дачи (высоты взяты из дипломной работы студ. Журавлева, табл. № 13).

И здесь, как и выше, лучшие результаты получаются по предлагаемому уравнению. Значительно худшие результаты дает

* Примечание. Сравнение результатов по нашей формуле и по уравнению гиперболы проведено начиная от сорока лет.

уравнение $y = a(1 - e^{-kt})^m$ для диаметров. Это и понятно, так как вмешательство человека сильнее отражается на этом элементе, чем на высоте. Кроме того уравнение выведено при условии, что диаметр измеряется на $\frac{1}{n}$ высоты. В практике же таксации диаметр измеряется на высоте 1,3 метра. Таким образом, отношение 1,3 м ко всей высоте не есть постоянная величина $\left(\frac{1}{n}\right)$, а является величиной переменной, что сильно искажает результаты. Достаточно указать, что из 17 показателей m , которые по гипотезе должны быть положительны, имеем 10 положительных и 7 отрицательных. Параметры m и k не находятся в тесной связи с бонитетом. Параметр a тесно связан с бонитетом.

Время максимального прироста по диаметру по таблицам Варгаса-де-Бедемара равно 50—70 годам, по всеобщим таблицам этот максимум наступает ранее 20-ти лет. Такая же картина наблюдается по шведским таблицам, по ряду других таблиц и по культурам сосны Ленинского лесничества Гомельского лесхоза.

Из всего вышеизложенного вытекает:

1) Лучшие результаты при выравнивании высот и диаметров получаются не по уравнению Вебера, которое дает в наших таблицах невыравненные y и не по уравнениям гиперболы, а по уравнению $y = a(1 - e^{-kt})^m$, которое и нужно рекомендовать при изучении хода роста насаждений по высоте.

2) Ход роста по высоте полностью увязывается с гипотезой об изменении этого элемента.

3) Время максимальной скорости по высоте (формула 29) увязывается с опытными данными и приблизительно равно 10—15 годам (для сосны).

4) Время максимальной скорости по диаметру с гипотезой плохо увязывается и требует дальнейших исследований.

5) Изменение диаметров и высот показывает, что выравнивание этих элементов надо делать по разным формулам.