СБОРНИК ТРУДОВ БЕЛОРУССКОГО ЛЕСОТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. С. М. КИРОВА. Вып. VI, 1940.

В. Н. ДРАКИН и Д. И. ВУЕВСКИЙ.

УПРОЩЕННАЯ СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ УРАВНЕНИЯ $y = a(1-e^{-kt})^m$, ХАРАКТЕРИЗУЮЩЕГО ХОД РОСТА НАСАЖДЕНИЙ ПО ВЫСОТЕ.

В выпуске № 5... записок Белорусского Лесотехнического института им. С. М. Кирова за 1939 г. помещена наша работа на тему: „Новая формула хода роста древостоев по высоте и диаметру".

В работе для выравнивания рядов высот и диаметров насаждений предложены схемы, которые требуют значительной вычислительной работы (в среднем 5—6 часов на схему).

Новые исследования этого вопроса дали нам возможность разработать более простую схему выравнивания, на которой мы здесь и остановимся.

Изменение высот насаждений с возрастом происходит по S-образным кривым, если за абсциссу принять возраст (t), а за ординату-высоту (Y).

Имея в виду геометрический смысл первой и второй производных от ординаты по абсциссе и принимая во внимание, что в нашем вопросе первая производная $\frac{dy}{dt}$ есть скорость роста высоты, мы можем S-образный вид кривой истолковать в форме следующей гипотезы:

скорость роста насаждения по высоте, начиная от 0, возрастает до некоторого максимума, после чего стремится к 0 при неограниченном увеличении возраста.

Эта гипотеза, за исключением первого пункта („начиная от 0") и последнего („при неограниченном увеличении возраста"), есть не что иное, как „закон большего периода роста" САКСА.

Первый пункт гипотезы вытекает из допущения, что S-образная кривая роста касается оси абсцисс в начале координат, а последний—отражает затухающий под'ем кривой.

Учитывая эти два момента, мы и называем наше положение, содержащее в себе закон САКСА, не законом, а гипотезой. Наша формулировка гипотезы может рассматриваться, как словесное выражение некоторого диференциального уравнения. В таком случае S-образная кривая является интегральным выражением закона САКСА с вышеуказанными оговорками.

Можно, разумеется, дать различные варианты вышеуказанного диференциального уравнения. Наш вариант, отражающий все пункты гипотезы и достаточно простой для интегрирования, дает следующее уравнение интегральной кривой:

$$y = a\,(1 - e^{-kt})^{m} \qquad (1),$$

где:

y — высота;
a — верхняя граница роста;
t — возраст;
e — Неперово число;
k, m — положительные величины.

При $m > 1$, кривая имеет s-образный вид.
Если $m < 1$, или $= 1$, то s-образная форма утрачивается.
При $m = 1$ мы получаем известное уравнение Вебера:

$$y = a\ (1 - e^{-kt})$$

Применение нашей формулы к опытному материалу сводится к определению трех параметров a, k, m, причем условие $m < 1$ дает нам весьма простой критерий несоответствия опытных данных нашей гипотезе, т. е. закону САКСА.

Возраст, когда скорость роста достигает максимума, выражается формулой:

$$t = \frac{lg\,m}{k\,lge} \qquad (2)$$

Эта формула еще раз подтверждает условие $m > 1$ и дает еще один критерий соответствия.

Рассмотрим схему вычисления параметров.

Так как предлагаемая формула—трансцендентная, то вычисление параметров по способу наименьших квадратов распадается на два этапа. Сначала находятся каким-либо способом предварительные значения параметров a, k и m, а затем по способу наименьших квадратов отыскиваются к предварительным значениям поправки, которые мы обозначим соответственно через α, ν, μ.

В таком случае исправленные значения параметров будут:

$$a_{,} = a + \alpha;\ k_{,} = k + \nu;\ m_{,} = m + \mu.$$

Теперь формула (1) примет вид:

$$y = (a + \alpha)\ [1 - e^{-(k+\nu)\,t}]^{\,m+\mu}$$

или

$$ln\,y = ln\,(a+\alpha) + (m+\mu)\ ln\,[1 - e^{-(k+\nu)\,t}] = f(a+\alpha, k+\nu, m+\mu) \quad (3)$$

Разлагая функцию (3) в строку Тэйлора по степеням поправок и отбрасывая члены высших порядков относительно поправок, получим линейное относительно поправок ур-ние:

$$lny = ln\overline{y} + \frac{\alpha}{a} + \frac{te^{-kt}}{1-e^{-kt}}\nu + ln(1-e^{-kt})\mu \qquad (4),$$

где $\overline{y}$ означает вычисленные предварительные значения высот, соответствующие предварительным значениям параметров a, k, m.

К ур-нию (4) и применяем способ наименьших квадратов для получения трех, так называемых „нормальных" ур-ний, откуда находим неизвестные поправки α, ν, μ.

Таким образом вычисление поправок производится по обычной схеме принятой для трансцендентных функций. Дело однако в том, что, как видно из формулы (4), вычисление коэфициентов при поправках в нормальных ур-ниях требует значительной вычислительной работы. Эту работу можно значительно (раза в три) сократить, если составить таблицы функций, служащих коэфициентами при поправках.

Эти таблицы составляются, но в настоящее время еще не готовы.

Применение способа наименьших квадратов в ответственных случаях является необходимым, но при этом надо иметь в виду, что в нашем случае точность полученных по способу наименьших квадратов результатов зависит от точности предварительных данных. Поэтому иногда результаты, полученные по способу наименьших квадратов (в приложении к трансценд. функциям), приходится рассматривать, как предварительные и искать к ним дальнейшие поправки опять по способу наименьших квадратов. Таким образом качество способа определения предварительных данных приобретает важное значение.

Способы нахождения предварительных значений параметров могут быть различные. После нескольких проб мы остановились на следующей схеме.

Обозначим возраст кульминации прироста через t_c

По формуле (2) имеем:

$$t_c = \frac{lg\ m}{klge} = \frac{ln\, m}{k} \qquad (5)$$

Подставив значение t_c в уравнение (1), найдем высоту насаждения в момент кульминации;

$$y_c = a\left(\frac{m-1}{m}\right)^m \qquad (6)$$

Диференцируя ур-ние (1) по возрасту находим:

$$y'_t = akme^{-kt}(1-e^{-kt})^{m-1} \qquad (7)$$

Если в выражение (7) подставить значение t_c, то получим выражение для скорости роста в момент кульминации:

$$y'_c = ak\left(\frac{m-1}{m}\right)^{m-1} \qquad (8)$$

Теперь, умножая почленно равенства (8) и (5) и деля на равенство (6), находим:

$$\frac{y_c' t_c}{y_c} = \frac{m \ln m}{m-1} = \frac{m \lg m}{(m-1) \lg e} = \frac{m \lg m}{m-1} \cdot 2{,}3026 \qquad (9)$$

Введем обозначения:

$$\frac{y'_c t_c}{y_c} = U \qquad (10)$$

$$U = \frac{m \ln m}{m-1} \qquad (11)$$

Составим теперь таблицу значений функции (11), давая m значения через 0.01, начиная от $m = 1$.

(В приложении № 1 на стр. 73 дана таблица для значений m через 0,05)

Если нам дан анализ ствола или таблица хода роста, включающая возраст кульминации, то мы найдем приближенные значения

$$y_c,\ t_c \text{ и } y'_c\ ,$$

причем последнюю величину рассматриваем, как текущий периодический прирост в возрасте кульминации. По этим величинам найдем V по формуле (10), а затем, и m по таблице значений функции (11).

Таблицы хода роста медленно растущих пород, как ель, пихта, включают возраст кульминации. Что же касается таблиц для более быстро растущих, как сосна, то, начинаясь чаще всего с 20 лет, эти таблицы не содержат в себе периода кульминации.

В таких случаях мы не можем использовать формулу (10) для нахождения V.

Однако, возвышая обе части уравнения (1) в квадрат, получаем:

$$y^2 = a^2 \left(1 - e^{-kt}\right)^{2m} \qquad (12)$$

откуда для возраста кульминации прироста квадратов высот по формуле (2), находим:

$$t'_c = \frac{\ln 2m}{k} \qquad (13)$$

Это значит, что кульминация прироста квадратов высот наступает в более позднем возрасте, поэтому, возвышая табличные высоты в квадрат, мы найдем в пределах таблицы кульминацию прироста квадратов высот.

Теперь, обозначив максимальный текущий периодический прирост квадрата высоты через $y_c^{2'}$, соответствующий ему квадрат через y_c^2, а возраст через t'_c, найдем:

$$\frac{y_c^{2'} t_c}{y_c^2} = U, . \qquad (14)$$

Далее по таблице значений функции (11) находим, соответствующее V' значение

$$m_{,} = 2m,$$

откуда и получим:

$$m = \frac{m'}{2}$$

Рассмотрим пример. В таблице № 1 в графе Y даны высоты сосновых насаждении 1^a бонитета по всеобщим таблицам проф. Тюрина.

Таблица № 1.

t	y	Δy	Δt	$\frac{\Delta y}{\Delta t}$	y^2	Δy^2	$\frac{\Delta y^2}{\Delta t}$
20	9.6	4.7	10	0.47	92.2	112,1	11.21
30	14.3	4.1	»	0.41	204.5	134.1	13.41
40	18.4	3.8	»	0.38	338.6	154.2	15 42
50	22.2	3.1	»	0.31	492.8	147.3	14.73
60	25.3	2.6	»	0.26	640.1	138.3	13.83
70	27.9	2.1	»	0.21	778.4	—	—
80	30.0	1.9	»	0.19	—	—	—
90	31.9	1.7	»	0.17	—	—	—
100	33.6	1.2	»	—	—	—	—
110	34.8	—	—	—	—	—	—
120	36.0	—	—	—	—	—	—
130	36.8	—	—	—	—	—	—

В графе $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ показаны значения текущего периодического прироста, которые мы рассматриваем, как приближенные значения y_t^1 для середины каждого десятилетия, так напр., 0,47 есть приближенное значение $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ в возрасте 25 лет. Так как кульминация прироста по высоте для сосны имеет место приблизительно в середине второго десятилетия; то в нашей таблице y_c^1 отсутствует. Обращаясь к квадратам высот и их приростам в графах y^2 и Δy^2, видим, что прирост квадрата высоты кульминирует в пятом десятилетии, к середине которого мы и отнесем табличный максимум:

$$\frac{\Delta y^2}{\Delta t} = 15,42 \cong y_c^{2'}$$

Таким образом мы принимаем:

$$t_c^1 = \frac{40+50}{2} = 45.$$

Точно так же принимаем

$$y_c^2 = \frac{338,6 + 492,8}{2} = 415,7;$$

отсюда находим:

$$U_, = \frac{y_c^{2,} t_c^1}{y_c^2} = \frac{15,42.45}{415,7} = 1.67.$$

По таблице значений функции (11) определяем:

$$m_, = 3,10,$$

следовательно

$$m = \frac{m_1}{2} = 1,55.$$

Аналогичным образом можно для определения m воспользоваться и кубами высот.

Пользование квадратами (или другими степенями) высот для определения предварительного значения m исходит из допущения, что т. назыв. „линия развития" (Тюрин) остается неизменной в математическом смысле. По нашему мнению понятие „линии развития" не является определенным. Скорее под этим названием скрывается своего рода постулат. Разумеется, линия развития, выражаемая той или иной таблицей хода роста, не будет „единой" в математическом смысле. Поэтому m, определяемое по различным степеням высот, будет принимать различные значения. Но, поскольку всякая математическая кривая в таксации есть линия регрессии, постольку всякий параметр вообще будет вар'ировать в известных пределах на протяжении всего периода роста.

Зная предварительное значение m, можно определить параметры k и a и вторичные, более точные значения m и a.

Порядок вычислений показан в таблице № 2 (стр. 66, 69). Эта таблица применяется в том случае, если в нашем распоряжении нет соответствующих таблиц функции e^{-x}

В графах 1, 2, 3, 4 выписываем номера табличных высот (i), возрасты (t), высоты (y) и их логарифмы.

Далее умножаем все логарифмы на величину, обратную предварительному значению m, т. е. на $\frac{1}{m}$ и результаты записываем в графу 5.

Везде берем четырехзначные логарифмы (напр. по табл. Брадиса).

По логарифмам графы 5 находим значения $\frac{1}{\sqrt[m]{y}} = \eta$ и записываем в графе 6, а их квадраты (по таблицам Брадиса) в графе 7.

По этим данным находим параметры k и a по формулам, которые нами даны в выпуске V записок БЛТИ.

Введем обозначения:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = t_n - t_{n-1} \tag{15}$$

$$e^{-k\Delta t} = h \tag{16}$$

Для определения h имеем формулу *):

$$h^2 = \frac{(n-1)\sum_2^n \eta_i^2 - \left(\sum_2^n \eta_i\right)^2}{(n-1)\sum_1^{n-1} \eta_i^2 - \left(\sum_1^{n-1} \eta_i\right)^2} \tag{17}$$

Определив отсюда h, находим k по формуле:

$$k = -\frac{lg\, h}{\Delta\, t\, lg e} \tag{18}$$

Далее находим a по формулам:

$$a^{\frac{1}{m}} = a^{1} = \frac{\sum_2^n \eta_i - h \sum_1^{n-1} \eta_i}{(n-1)(1-h)} \tag{19}$$

$$lga = m\, lga' \tag{2}$$

Значение a в дальнейшем уточняется, при чем поправка вообще невелика.

Графа 8 заполняется по формулам:

$$lg\, A_1 = -kt_1\, lge = t_1 \frac{lgh}{\Delta t},$$

$$lg\, A_2 = lg\, A_1 + lg\, h,$$

$$lg\, A_3 = lg\, A_2 + lg\, h, \tag{21}$$

и. т. д.

По $lg\, A_i$. находим все A_i (e^{-kt_i}) и выписываем в графу 9. Далее заполняем графы 10 $(1-A = 1-e^{-kt})$ и 11 $[lg(1-A)]$.

В графе 12 записываются $\Delta\, lg(1-A)$.

---

* *Примечание:* $\sum_1^{n-1}$ обозначает сумму всех чисел графы без последнего числа; $\sum_2^n$ — всех чисел без первого.

Это „двойные" разности логарифмов графы 11, т. е. разнос логарифмов, взятых через один. Первое и последнее ме в этой графе остаются пустыми

Во второй строке записываем разность $lg\ (1-A_3)-lg\ (1-$ в третьей — $lg\ (1-A_4)-lg\ (1-A_2)$ и т. д.

Все полученные разности суммируем и получаем

$$\sum\nolimits_1 \bar{\Delta}\ lg\ (1-A)$$

Эта сумма, а вместе с ней и все разности проверяются п формуле:

$$\sum\nolimits_1 \bar{\Delta}\ lg\ (1-A)=[lg\ (1-A_n)+lg\ (1-A_{n-1})]-[lg\ (1-A_1)+ + lg\ (1-A_2)] \quad (22$$

Проверка обязательна.

Сумму $\sum_1 \bar{\Delta}\ lg\ (1-A)$ записываем внизу два раза.

Далее отбрасываем две первые разности и две последние остальные разности складываем—получаем

$$\sum\nolimits_2 \bar{\Delta}\ lg\ (1-A)$$

и записываем под $\sum_1$.

Из числа оставшихся разностей снова отбрасываем две ра ности сверху и две снизу и остальные складываем. Это буде

$$\sum\nolimits_3 \bar{\Delta}\ lg\ (1-A)$$

и так далее.

В последней сумме, в зависимости от числа данных y_i, може оказаться 4, 3 и 1 слагаемое.

Наконец все суммы $\bar{\Delta}\ lg\ (1-A)$ складываем и получаем око чательную сумму

$$\sum \bar{\Delta}\ lg\ (1-A)$$

Точно таким же способом находятся и суммируются $\bar{\Delta}\ lg$ в графе 13.

После этого находим более точное значение m_1 по формул

$$m_1=\frac{\sum \bar{\Delta}\ lg\ y}{\sum \bar{\Delta}\ lg\ (1-A)} \quad (23$$

Далее заполняем графу 14 произведениями $m_1\ lg\ (1-A)$. Хо все lg (1—А) имеют отрицательные характеристики, нет необх димости при умножении переходить к отрицательнмм манти сам. Поступаем так:

Ставим на барабан m_1 и умножаем на цифры первой мантисс справа налево, не прибегая к сокращению числа оборотов в сл чае больших цифр. Дойдя до разряда характеристики, повор чиваем барабан в обратную сторону (вычитание) столько раз, сколько единиц в характеристике. Получим на каретке положительную мантиссу, а на месте характеристики цифру 9 или 8.

В случае девятки характеристика будет $\bar{1}$, в случае восьмерки—$\bar{2}$, далее складываем на счетах положительные мантиссы графы 14, подсчитываем сумму отрицательных характеристик и результат записываем сначала с положительной мантиссой и отрицательной характеристикой а потом приводим к отрицательной мантиссе—получим отрицательное десятичное число.

Для проверки (обязательной) складываем таким же способом $lg\,(1—A)$, приводим результат к отрицательной мантиссе и умножаем на полученное число (отрицательное) значение m_1, еще не сброшенное с барабана.

Значения

$$\sum m_1\,lg(1-A) \text{ и } m_1 \sum lg\,(1-A)$$

должны различаться не более, как на единицу последнего разряда.

После этого находим вторичное, более точное значение a по формуле:

$$lg\,a = \frac{\sum lg\,y_i - m_1 \sum lg\,(1-A)}{n} \qquad (24)$$

Разность между значениями по формуле (24) и (20) обычно незначительна.

Теперь на счетах находим $lg\,\bar{y}$ по формуле:

$$lg\,y^i = lg\,a + m_1\,lg\,(1-A_i)$$

а по логарифмам и самые значения $\bar{y}$ (по четырехзначным таблицам).

Значения k и m_i берем с четырьмя значащими цифрами, значения a и $\bar{y}$—с двумя десятичными знаками.

Если m_1 значительно отличается от m, то вычисления следует проделать вновь, начиная с графы 8, взяв вместо m новое значение m_1. Тогда получим m_2, обычно мало отличающееся от m_1

В графе (17) суммируем отдельно положительные и отрицательные отклонения, далее берем сумму абсолютных велечин и делим на n, т. е. на число данных y_i—найдем среднее отклонение.

Также поступаем и с отклонениями в $^0/_0$.

При хорошем выравнивании положительные и отрицательные суммы в графах 17 и 18 будут близкими.

При наличии таблиц значений функции $1—e^{-kt}$ для значений аргумента с четырьмя десятичными знаками вычисления несколько сокращаются.

Порядок вычислений в этом случае, начиная с графы 8, показан в таблице № 3.

Схема вы

Сосна 1-а бонитета (Всеоб

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
i	t	y	$\lg y$	$\frac{1}{m}\lg y$	$y^{\frac{1}{m}}=\eta$	η^2	$\lg A$	$A\left(e^{-kt}\right)$	$1-A$	$\lg(1-A)$	$\bar{\Delta}\lg(1-A)$
1	20	9.6	0. 9823	0.6338	4. 303	18.52	$\bar{1}.8182$	0.6580	0.3420	$\bar{1}.5340$	—
2	30	14.3	1. 1553	0.7454	5. 564	30.95	$\bar{1}.7273$	0.5337	0.4663	$\bar{1}.6687$	0.2197
3	40	18.4	1. 2648	0.8160	6. 546	42.85	$\bar{1}.6364$	0.4329	0.5671	$\bar{1}.7537$	0.1434
4	50	22.2	1. 3464	0.8687	7. 391	54.62	$\bar{1}.5455$	0.3512	0.6488	$\bar{1}.8121$	0.1007
5	60	25.3	1. 4031	0.9053	8. 041	64.66	$\bar{1}.4546$	0.2848	0.7152	$\bar{1}.8544$	0.0738
6	70	27.9	1. 4456	0.9327	8. 565	73.36	$\bar{1}.3637$	0.2311	0.7688	$\bar{1}.8859$	0.0555
7	80	30.0	1. 4771	0.9530	8. 974	80.53	$\bar{1}.2728$	0.1874	0.8126	$\bar{1}.9099$	0.0425
8	90	31.9	1. 5038	0.9703	9. 340	87.24	$\bar{1}.1819$	0.1520	0.8480	$\bar{1}.9284$	0.0325
9	100	33.6	1. 5263	0.9848	9. 656	93.24	$\bar{1}.0910$	0.1233	0.8767	$\bar{1}.9428$	0.0259
10	110	34.8	1. 5416	0.9946	9. 877	97.56	$\bar{1}.0001$	0.1000	0.9000	$\bar{1}.9542$	0.0208
11	120	36.0	1. 5563	1.0041	10. 090	101.81	$\bar{2}.9092$	0,0814	0.9186	$\bar{1}.9631$	0.0162
12	130	36.8	1. 5658	1.0103	10. 240	104.86	$\bar{2}.8183$	0.0658	0.9342	$\bar{1}.9704$	0.0130
13	140	37.5	1. 5740	1.0155	10. 360	107.33	$\bar{2}.7274$	0.0534	0.9466	$\bar{1}.9762$	—
$\sum_{1}^{n-1}$	—	—	—	—	98. 587	850.20	—	—	—	—	$\sum_1 \bar{\Delta}$ 0.7438
$\sum_{2}^{n}$	—	—	—	—	104.644	939.01	—	—	—	—	$\sum_1 \bar{\Delta}$ 0.743
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$\sum_2 \bar{\Delta}$ 0.351
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$\sum_3 \bar{\Delta}$ 0,130
$\sum$	—	—	18.3424	—	—	—	—	—	—	1.8463	$\sum \bar{\Delta}$ 1.97

Таблица № 2

13	14	15	16	17	18	
$\bar{\Delta}\ lg y$	$m_1\, lg\,(1-A)$	$lg\ \bar{y}$	y	$y-\bar{y}$	%	Примечание:
—	$\bar{1}.3678$	0.9714	9.4	+ 0.2	2.1	
0.2825	$\bar{1}.5506$	1,1542	14.3	0.0	0.0	
0.1911	$\bar{1}.6659$	1.2695	18.6	− 0.2	1.1	
0.1383	$\bar{1}.7451$	1.3487	22.3	− 0.1	0.5	
0.0992	$\bar{1}.8025$	1.4061	25.5	− 0.2	0.8	
0.0740	$\bar{1}.8452$	1.4488	28.1	− 0.2	0.7	
0,0582	$\bar{1}.8778$	1.4814	30.3	− 0.3	0.1	
0.0492	$\bar{1}.9029$	1.5065	32.1	− 0.2	0.6	
0.0378	$\bar{1}.9224$	1.5260	33.6	− 0.0	0.0	
0.0300	$\bar{1}.9379$	1.5415	34.8	− 0.0	0.0	
0.0242	$\bar{1}.9499$	1.5535	35.8	+ 0.2	0.6	
0.0177	$\bar{1}.9598$	1.5634	36.6	+ 0.2	0.5	
—	$\bar{1}.9676$	1.5712	37.3	+ 0.2	0.5	
$\sum_1 \bar{\Delta}$ 1.0022	—	—	—	—	—	
$\sum_1 \bar{\Delta}$ 1.0022	—	—	—	—	—	
$\sum_2 \bar{\Delta}$ 0.4867	—	—	—	—	—	
$\sum_3 \bar{\Delta}$ 0.1814	—	—	—	—	—	
$\sum \bar{\Delta}$ 2.6725	−2.5046	—	—	Ср. = 0.6		

Из таблицы № 1, имеем:

$$m = 1.55;$$

$$\frac{1}{m} = 0.6452$$

Находим h.

$$h^2 = \frac{12.939{,}01 - 104{,}644^2}{12.850{,}20 - 98{,}587^2} = 0{,}6579;$$

$$h = 0{,}8111;\ lgh = \bar{1}{,}9091;$$

$$k = \frac{0.0909}{4.\ 343} = 0.02093;$$

$$a^{\frac{1}{m}} = a^1 = \frac{104{,}644 - 0{,}8111.98.587}{12.0{,}1889} =$$

$$= 10{,}887;$$

$$lg\ a = mlga^1 = 1{,}55.1{,}0370 =$$

$$= 1.6074;$$

$$a = 40{,}5\ м.$$

$$m_1 = \frac{2.6725}{1.9700} = 1.3566;$$

$$lg\,a_{\text{исправл}} = \frac{\sum lg\ yi - m_1 \sum lg(1\text{-}A)}{n} =$$

$$= \frac{18{,}3424 - (-2{,}5046)}{13} =$$

$$= 1.6036\ ;$$

$$a\ \text{испр.} = 40.15\ м.$$

Таблица № 3.

8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
kt	$1-e^{-kt}$	$lg\left(1-e^{-kt}\right)$	$\bar{\Delta}\, lg\left(1-e^{-kt}\right)$	$\bar{\Delta}\, lg\, y$	$m_1 lg\left(1-e^{-kt}\right)$	$lg\bar{y}$	$\bar{y}$	$y-\bar{y}$	%

Схемы вычислений по способу наименьших квадратов, по вышеизложенным соображениям, мы здесь не приводим.

Заметим, что вторичное вычисление по разобранной схеме дает вообще результаты, практически почти равноценные таковым же по способу наименьших квадратов, при значительно меньшей затрате труда. Во всяком случае данная схема вполне достаточна для оценки практического значения предлагаемой нами формулы.

ПРОВЕРКА УРАВНЕНИЯ $y = a(1-e^{-kt})^m$ НА ОПЫТНОМ МАТЕРИАЛЕ

По разработанной схеме для уравнения $y = a(1-e^{-kt})^m$ нами вычислены значения высот для сосны всеобщих таблиц проф. Тюрина и таблиц Варгаса-де-Бедемара для Ленинградской губернии.

Здесь мы приводим только окончательные результаты и то лишь по части бонитетов. Для сравнения в табл. № 4, 5, 6, 7 приведены высоты, найденные по предлагаемому уравнению, по способу средних, по способу наименьших квадратов, по ур-нию гиберболы и по уравнению Шуберта

$$y = y_0 + c(x-x_0) + c_1(x-x_0)^2 + c_2(-x_0)^3 + c_3(x-x_0)^4)$$

по схеме, которую он предлагает в статье (Über Gesetzmäßigkeiten und Ihren mathematischen Ausdruck mit Beispielen aus forstlichen Zuwachslehre (Forst-und Jagdwesen, 1923.), хотя эта схема является далеко несовершенной, т. к. само уравнение не охватывает всего периода роста.

Всеобщие таблицы проф. Тюрина.

Сосна 1-а бонитета. Высоты в м.

Таблица № 4.

t Возр.	Табл. выс.	Выс. по пр. ур. (сп. ср. 1-е выр.)	Выс. по пр. ур. (сп. ср. 2-е выр.)	% абс. откл.	Выс. по опос. наим. квадратов	% абс. откл.	Выс. по гиперб. 1)	% абсол. откл.	Выс. по Шуберту	% абсол. откл.
20	9.6	9.4	9.5	1.0	9.6	0.0	—	—	—	—
30	14.3	14.3	14.3	0.0	14.3	0.0	11.2	27.6	—	—
40	18.4	18.6	18.5	0.5	18.5	0.5	19.3	4.8	18.3	0.6
50	22.2	22.3	22.2	0.0	22.2	0.0	24.2	9.0	21.9	1.3
60	25.3	25.5	25.3	0.0	25.3	0.0	27.4	8.3	25.0	1.2
70	27.9	28.1	28.0	0.4	27.9	0.0	29.7	6.5	27.6	1.1
80	30.0	30.1	30.2	0.7	30,1	0,3	31.5	5,0	29.9	0.3
90	31.9	32.1	32.0	0.3	31.9	0.0	32.8	2.7	31.8	0.3
100	33.6	33.6	33.5	0.3	33.5	0.3	33.9	0.7	33.3	0.9
110	34.8	34.8	34.8	0.0	34.7	0.3	34.8	0.0	34.6	0.6
120	36.0	35.8	35.9	0,3	35.8	0,5	35.5	1.4	35.8	0.6
130	36.8	36,6	36.7	0.3	36.7	0.3	36.2	1.6	—	—
140	37.5	37.2	37.4	0 3	37.4	0.3	36.7	2.1	—	—
Среднее	—	—	—	0.3	—	0.2	—	—	—	0.7

Сосна III бонитета, высоты в метрах

Таблица № 5.

t Возр.	Табл. высота	Высота по предл. уравн. (сп. сред. 1-е выр.)	Высота по предл. уравн. (сп. средн. 2-е выр.)	% абсол. откл.	Высота по способу наим. квадрат.	% абсол. откл.	Высота по гиперболе	% абсол. откл.	Высота по Шуберту	% абсол. откл.
20	5.6	5.8	5.6	0.0	5.7	1.7	—	—	—	—
30	8.7	8.8	8.8	1.2	8.7	0.0	—	—	—	—
40	11.7	11.7	11.7	0.0	11.4	2.6	12.5	6.7	11.6	0.6
50	14.3	14.2	14.2	0.7	14.0	2.0	15,9	11.2	14.1	1.5
60	16.5	16.3	16.4	0.6	16.1	2.4	18.1	9.7	16.4	0.6
70	18.5	18.2	18.3	1.1	18.0	2.7	19.7	6.4	18.4	0.6
80	20.0	19.8	19,9	0.5	19.7	1.3	20.9	4.4	19.9	0.5
90	21.4	21.2	21.5	0.5	21.1	1.4	21.9	2.3	21.3	0.5
100	22.5	22.3	22.4	0.4	22.4	0.5	22.6	0.5	22,4	0.4
110	23.4	23.3	23.3	0.4	23.4	0.0	23.2	0.9	23.2	0.8
120	24.0	24.2	24.1	0.4	24.3	1.2	23.7	1.3	24.0	0.0
130	24.6	24.8	24.7	0.4	24.8	0.8	24.2	1.6	—	—
140	25.0	25.5	25.5	2.0	25.1	0.5	24.5	2.0	—	—
Среднее	—	—	—	0.6	—	1.3	—	—	—	0.6

1) Гипербола охватывает высоты только примерно с 40 лет.

Таблицы Каэгаса-де-Бедемара

Сосна I бонитета. Высоты в метрах

Таблица № 6.

t Возр.	Табл. высота	Высота по предлагаем. уравн. (сп. ср. 1-е выр.)	Высота по предлагаем уравн. (сп. ср. 2-е выр.)	% абсол. откл.	Высота по способу наим. квадрат.	% абсол. откл.	Высота по гиперболе	% абсол. откл.	Высота по Шуберту	% абсол. откл.
20	7.3	6.9	7.1	2.7	7.3	0.0	—	—	—	—
30	10.7	10.8	10.9	1.9	10.9	1.9	—	—	—	—
40	14.0	14.3	14.1	0.7	14.1	0.7	14.9	6.5	13.9	0.7
50	17.1	17.4	17.2	0.6	17.2	0.6	19.0	11.2	16.9	1.2
60	19.8	20.0	19.7	0.5	19.5	1.5	21.7	9.6	19.5	1.5
70	21.9	22.2	21.9	0.0	21.7	0.9	23.6	7.8	21.8	0.5
80	23.8	24.0	23.8	0.0	23.6	0.8	25.0	5.1	23.6	0.8
90	25.2	25.6	25.4	0.4	25.3	0.0	26.2	3.6	25.3	0.0
100	26.8	26.8	26.7	0.4	26.7	0.4	27.0	0.6	26.7	0.4
110	28.0	27.8	27.8	0.7	27.9	0.4	27.8	0.6	27.9	0.4
120	29.0	28.6	28.8	0.7	28.9	0.3	28.4	2.2	28.8	0.6
130	29.6	29.3	29.5	0.3	29.8	0.7	28.9	2.3	—	—
140	29.9	29.8	30.2	1.0	30.3	1.3	29.4	1.8	—	—
Среднее	—	—	—	0.8	—	0.7	—	—	—	0.7

Сосна III бонитета. Высоты в метрах.

Таблица № 7..

t (возраст)	Табл. высота	Высота по предлагаем. уравн. сп. ср. 1-е выр.)	Высота по предлагаем уравн. (сп. ср. 2-е выр.)	% абсол. откл.	Высота по способу наименьш. квадрат.	% абсол. откл.	Высота по гиперболе	% абсол. откл.	Высота по Шуберту	% абсол. откл.
20	4,9	4,7	4,8	2,0	5,1	4,1	—	—	—	—
30	7,6	7,7	7,7	1,3	8,0	5,2	—	—	—	—
40	10,4	10,5	10,5	1,0	10,3	1,0	11,1	6,7	10,2	1,9
50	12,8	13,1	13,0	1,6	12,8	0,0	14,8	15,5	12,8	0,0
60	15,2	15,4	15,3	0,7	15,1	0,7	17,3	13,9	15,1	0,7
70	17,4	17,4	17,3	0,0	16,8	3,4	19,0	9,1	17,2	1,2
80	19,2	19,1	19,0	1,0	18,5	3,6	20,3	5,7	19,2	0,0
90	20,7	20,5	20,5	1,0	20,0	3,4	21,4	3,3	20,4	1,4
100	21,7	21,0	21,7	0,0	21,4	1,5	22,2	2,2	21,8	0,5
110	22,9	22,8	22,8	0,4	22,6	1,3	22,9	0,0	22,8	0,4
120	23,8	23,7	23,7	0,4	23,7	0,4	23,4	1,0	23,6	0,8
130	24,4	24,4	24,5	0,4	24,6	0,8	23,9	1,0	—	—
140	25,0	25,0	25,2	0,8	25,5	2,0	24,3	1,0	—	—
Среднее	—	—	—	0,9	—	2,2	—	—	—	0,8

Как видно из таблиц 4, 5, 6, 7, результаты, получаемые по предлагаемой схеме, почти не уступают по точности результатам способа наименьших квадратов.

Времени для вычисления по новой схеме требуется в 3-4 раза меньше, чем по схемам, помещенным в выпуске V записок БЛТИ, что говорит за необходимость широкого внедрения этой схемы в лесотаксационную практику.

Приложение № 1.

Таблица значений функции

$$U = \frac{m \ln m}{m-1} = \frac{m \lg m}{m-1} \cdot 2{,}3026$$

m	*u*	*m*	*u*	*m*	*u*	*m*	*u*
1,00	1,00	1,80	1,32	2,65	1,57	4,00	1,85
1,05	1,03	1,85	1,34	2,70	1,58	4,10	1,87
1,10	1,05	1,90	1,36	2,75	1,59	4,20	1,88
1,15	1,07	1,95	1,37	2,80	1,60	4,30	1,90
1,20	1,09	2,00	1,39	2,85	1,61	4,40	1,92
1,25	1,12	2,05	1,40	2,90	1,62	4,50	1,93
1,30	1,14	2,10	1,42	2,95	1,64	4,60	1,95
1,35	1,16	2,15	1,43	3,00	1,65	4,70	1,97
1,40	1,18	2,20	1,45	3,10	1,67	4,80	1,98
1,45	1,20	2,25	1,46	3,20	1,69	4,90	2,00
1,50	1,22	2,30	1,47	3,30	1,71	5,00	2,01
1,55	1,24	2,35	1,49	3,40	1,73	5,10	2,02
1,60	1,25	2,40	1,50	3,50	1,75	5,20	2,04
1,65	1,27	2,45	1,51	3,60	1,77	5,30	2,06
1,70	1,29	2,50	1,53	3,70	1,79	5,40	2,07
1,75	1,31	2,55	1,54	3,80	1,81	5,50	2,08
—	—	2,60	1,56	3,90	1,83	—	—