

## УРАВНОВЕШИВАНИЕ НАПРАВЛЕНИЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПО ГОТОВЫМ ФОРМУЛАМ

Формулы для уравнивания типичных геодезических фигур, в том числе и центральной системы, в случае, когда независимо измеренными величинами являются углы, нами были предложены еще в 1935 г.

Применение этих формул для уравнивания независимо измеренных направлений значительно искажает поправки. Искажения эти, как показали исследования советских геодезистов, равносильны тому, что из общего числа приемов измерения направлений используется лишь около половины.

Однако на производстве практикуется уравнивание углов вместо измеренных направлений, так как уравнивание направлений, как правило, значительно сложнее и требует больше времени.

В настоящей работе приводятся формулы совершенно строго, с точки зрения способа наименьших квадратов, уравнивания независимых направлений для одной из типичных фигур—центральной системы.

При выводе этих формул мы исходили из способа общего выражения коррелят через свободные члены уравнений.

Не останавливаясь на выводах, приведем в готовом виде рабочие формулы для уравнивания направлений центральной системы, состоящей из любого числа треугольников (рис. 1).

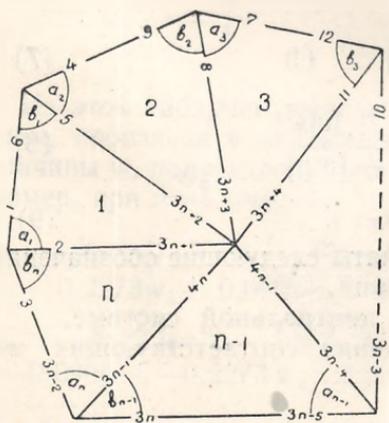


Рис. 1.

### Рабочие формулы:

$$w_1 = 2 - 1 + 6 - 5 + (3n + 2) - (3n + 1) - 180^\circ$$

$$w_2 = 5 - 4 + 9 - 8 + (3n + 3) - (3n + 2) - 180^\circ$$

$$w_i = (3i - 1) - (3i - 2) + (3i + 3) - (3i + 2) + \\ + (3n + i + 1) - (3n + i) - 180^\circ \quad (1)$$

$$w_n = 3 - 2 + (3n - 1) - (3n - 2) + (3n + 1) - 4n - 180^\circ$$

$$w_{n+1} = \Sigma \lg \sin a - \Sigma \lg \sin b \quad (2)$$

$$p_1 = 2(\alpha_1 - \beta_1) + \beta_n - \alpha_2$$

$$p_2 = 2(\alpha_2 - \beta_2) + \beta_1 - \alpha_3$$

$$p_i = 2(\alpha_i - \beta_i) + \beta_{i-1} - \alpha_{i+1} \quad (3)$$

$$p_n = 2(\alpha_n - \beta_n) + \beta_{n-1} - \alpha_1$$

$$[p] = [\alpha] - [\beta] \quad (!)^1$$

$$m_i = f_{i,1} p_1 + f_{i,2} p_2 + \dots + f_{i,n} p_n \quad (4)$$

$$t_i = f_{i,1} w_1 + f_{i,2} w_2 + \dots + f_{i,n} w_n \quad (5)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

$$[m] = -\frac{1}{2}[p] \quad (!) \quad (6)$$

$$[t] = -\frac{1}{2}[w] \quad (!) \quad (7)$$

$$k_{n+1} = -\frac{w_{n+1} + [mw]}{[d^2] + [mp]} \quad (8)$$

$$k_i = t_i + m_i k_{n+1} \quad (9)$$

В приведенных формулах приняты следующие обозначения:  
 $w$  — свободные члены уравнений,  
 $p$  — число треугольников в центральной системе,  
 $1, 2, 3, \dots, 4n$  — численные значения соответствующих направлений,

<sup>1</sup> Восклицательный знак в скобках указывает, что данная формула является контрольной.

- а и b—связующие углы треугольников,  
 $\alpha$  и  $\beta$ —приращения логарифмов синусов этих углов при увеличении самих углов на 1,  
 f—коэффициенты разложения коррелят по свободным членам условных уравнений,  
 p, m и t—вспомогательные величины, являющиеся функциями величин  $\alpha$  и  $\beta$ ,  
 k—корреляты,  
 d—общее обозначение величин, показанных в графе 3 таблицы 1.

Уравнительные вычисления по приведенным формулам располагаются в трех формулярах. Эти формуляры в общем виде приводятся ниже (табл. 1, 2, и 3).

Коэффициенты разложения f коррелят по свободным членам, которые вписываются в первые n граф таблицы 3, выбираются по аргументу n из следующей таблички<sup>1</sup>.

Ч и с л о   т р е у г о л ь н и к о в						
4	5	6	7	8	9	10
—0,	—0,	—0,	—0,	—0,	—0,	—0
233333	227273	225000	224138	223810	223684	223636
100000	090909	087500	086207	085714	085526	085454
066667	045455	037500	034483	033337	032895	032727
100000	045455	025000	017241	014284	013158	012728
	090909	037500	017241	009520	006579	005454
		087500	034483	014284	006570	003638
			086207	033337	013158	005454
				085714	032895	012728
					085526	032727
						085454

Из этой таблички выписывают f для первой корреляты, а затем, произведя в выписанном выражении круговую замену величины w, получают f для всех остальных коррелят. Так, например, при n=5 имеем:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f_{1,1} w_1 + f_{1,2} w_2 + f_{1,3} w_3 + f_{1,4} w_4 + f_{1,5} w_5 = \\
 &= -0,2273 w_1 - 0,0909 w_2 - 0,0455 w_3 - 0,0455 w_4 - 0,0909 w_5, \\
 k_2 &= f_{2,1} w_1 + f_{2,2} w_2 + f_{2,3} w_3 + f_{2,4} w_4 + f_{2,5} w_5 = \\
 &= -0,0909 w_1 - 0,2273 w_2 - 0,0909 w_3 - 0,0455 w_4 - 0,0909 w_5 \text{ и т. д.}
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Смотри, например, Урмаев Н. А., О последовательном уравнивании тригонометрических сетей, Труды ЦНИГАНК, «Геодезист» № 5, 1930 г.

Таблица I

Схема уравнивания  
Данные и окончательные результаты

№ направ-лений	Приведенные направления	d		Поправки				Уравненные направления
		обозначения	числа	первая часть			суммарная	
				обозначения	числа	вторая часть		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		$-\alpha_1$		$-k_1$				
2		$\alpha_1 + \beta_n$		$k_1 - k_n$				
3		$-\beta_n$		$+ k_n$				
			0		0	0	0	
4		$-\alpha_2$		$-k_2$				
5		$\alpha_2 + \beta_1$		$k_2 - k_1$				
6		$-\beta_1$		$+ k_1$				
			0		0	0	0	
7		· ·		· ·				
· ·		· ·		· ·				
· ·		· ·		· ·				
			0		0	0	0	
$3n - 2$		$-\alpha_n$		$-k_n$				
$3n - 1$		$\alpha_n + \beta_{n-1}$		$k_n - k_{n-1}$				
$3n$		$-\beta_{n-1}$		$+ k_{n-1}$				
			0		0	0	0	
$3n + 1$				$k_n - k_1$				
$3n + 2$				$k_1 - k_2$				
$3n + 3$				$k_2 - k_3$				
· ·								
$4n - 1$				$k_{n-2} - k_{n-1}$				
$4n$				$k_{n-1} - k_n$				
			0		0		0	

[d<sup>2</sup>] =

## Вычисление свободных членов

Обозначения углов	№ направлений	Углы	Логарифмы синусов углов	$\alpha$	Обозначения углов	№ направлений	Углы	Логарифмы синусов углов	$\beta$	№ направлений	Углы	$w_i$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$a_1$	2-1				$b_1$	6-5				$(3n+2)-(3n+1)$		
$a_2$	5-4				$b_2$	9-8				$(3n+3)-(3n+2)$		
.	.				.	.				.		
.	.				.	.				.		
$a_{n-1}$	$(3n-4)-(3n-5)$				$b_{n-1}$	$3n-(3n-1)$				$4n-(4n-1)$		
$a_n$	$(3n-1)-(3n-2)$				$b_n$	3-2				$(3n+1)-4n$		
		$\Sigma_1$					$\Sigma_2$					
		+	-	-								
		$\Sigma_2$										

## Вычисление коррелат

	$w_1 =$	$w_2 =$	...	$w_n =$	$m$	$t$	$m_i$	$k_{n+1}$	$k_i$
	$p_1 =$	$p_2 =$	...	$p_n =$					
	1	2	...	n	n+1	n+2	n+3	n+4	
$f_{1,i}$									
$f_{2,i}$									
⋮									
$f_{n,i}$									

$$-\frac{1}{2}[p] = \quad (!) \quad [mw] =$$

$$-\frac{1}{2}[w] = \quad (!) \quad [mp] =$$

$$k_{n+1} =$$

Порядок вычислений проследим на примере уравнивания направлений центральной системы, состоящей из пяти треугольников.

1. Составляем схематический чертеж сети, на котором нумеруем направления и обозначаем углы, как это сделано на рис. 2. Желательно иметь заранее напечатанные бланки для центральных систем с различным числом треугольников (от 4 до 8). На этих бланках должны быть даны чертежи с занумерованными направлениями, а также напечатаны обозначения первой, третьей и пятой граф таблицы 4, первой, второй, шестой, седьмой и одиннадцатой граф таблицы 5, а также числа первых пяти граф таблицы 6.

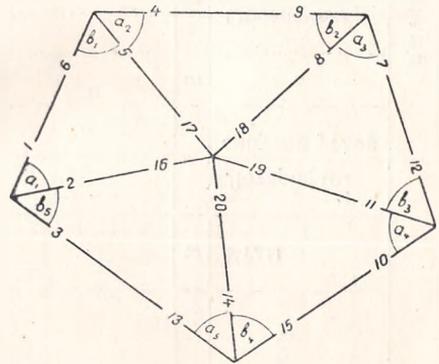


Рис. 2.

2. Выписываем во вторую графу таблицы 4 приведенные плоские направления.

3. Заполняем таблицу 5 и получаем свободные члены  $w$  в первых  $n$  уравнений сравнением со  $180^\circ$  сумм углов, расположенных в соответствующих строчках. Например:

$$w_4 = 65^\circ 21' 26'' + 48^\circ 59' 15'' + 65^\circ 39' 16'' - 180^\circ = -1'' , 9.$$

Для контроля используем формулу

$$\sum_{i=1}^n w = \sum a + \sum b - 180^\circ (n - 2).$$

4. Вычисляем свободный член  $w_{n+1}$  по формуле (2).

5. Заполняем четвертую графу таблицы 4 и находим сумму квадратов чисел этой графы. Эта сумма обозначена через  $[d^2]$ .

6. По формуле (3) вычисляем значения  $p$  и вписываем их во вторую строку таблицы 6. Сумма чисел  $p$  должна равняться разности сумм пятой и десятой граф таблицы 5, т. е.

$$[p] = [z] - [z].$$

7. Числа  $m$  шестой графы таблицы 6 получают суммированием на арифмометре произведений чисел, записанных в графах 1—5, на соответствующие значения  $p$ . Например, значение  $m_4$  получается так:

$$-0,054(-19,4) + (-0,0455)(+7,0) + (-0,05(9)(+37,5) + \\ + (-0,2273)(-20,3) + (-0,0909)(-5,2) = +2,24.$$

Аналогично вычисляем  $t$ . Только вместо  $p$  множителями будут  $w$ , записанные в верхней строчке таблицы 6. Контроль вычисленных  $m$  и  $t$  осуществляется по формулам (6) и (7).

Эти формулы являются следствием того, что сумма коэффициентов  $f$  разложения по свободным членам  $w$  для любой коррелаты  $k$  в центральной системе, состоящей из любого числа треугольников, есть величина постоянная, равная  $-1/2$ .

8. Вычисляем  $[mw]$  и  $[mp]$  суммированием на арифмометре соответствующих произведений:

$$[mw] = m_1 w_1 + m_2 w_2 + \dots + m_n w_n , \\ [mp] = m_1 p_1 + m_2 p_2 + \dots + m_n p_n .$$

9. Определяем  $k_6$  по формуле (8) и заполняем восьмую графу.

10. Складывая построчно числа седьмой и восьмой граф, получаем значения первых пяти коррелат.

11. Заполняем шестую графу таблицы 4 согласно обозначениям пятой графы. В седьмую графу той же таблицы вписываем произведения чисел четвертой графы на  $k_6$ .

12. Наконец, вычисляем суммарные поправки как сумму чисел шестой и седьмой граф и исправляем измеренные направления.

Схема уравнивания  
Данные и окончательные результаты

№ направ-лений	Приведенные направления	d		П о п р а в к и				Уравнение направления
		обозначения	числа	первая часть		вторая часть	суммарная	
				обозначения	числа			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0°00'00"	$-\alpha_1$	-13,1	$-k_1$	+1,59	+0,16	+1,8	0°00'00"
2	58 16 22,6	$\alpha_1 + \beta_5$	+29,7	$k_1 - k_5$	+0,29	-0,36	-0,1	58 16 20,7
3	110 01 01,5	$-\beta_5$	-16,6	$+k_5$	-1,88	+0,20	-1,7	110 00 58,0
			0		0	0	0	
4	0 00 00	$-\alpha_2$	-20,4	$-k_2$	-0,14	+0,25	+0,1	0 00 00
5	45 46 25,4	$\alpha_2 + \beta_1$	+41,3	$k_2 - k_1$	+1,73	-0,50	+1,2	45 46 26,5
6	91 00 06,0	$-\beta_1$	-20,9	$+k_1$	-1,59	+0,25	-1,3	91 00 04,6
			0		0	0	0	
7	0 00 00	$-\alpha_3$	-24,5	$-k_3$	-0,70	+0,30	-0,4	0 00 00
8	40 35 21,8	$\alpha_3 + \beta_2$	+39,6	$k_3 - k_2$	+0,56	-0,48	+0,1	40,35 22,3
9	94 56 00,3	$-\beta_2$	-15,1	$+k_2$	+0,14	+0,18	+0,3	94 56 01,0
			0		0	0	0	
10	0 00 00	$-\alpha_4$	-9,6	$-k_4$	+0,12	+0,12	+0,2	0 00 00
11	65 21 26,3	$\alpha_4 + \beta_3$	+18,1	$k_4 - k_3$	-0,82	-0,22	-1,0	65 21 25,1
12	133 27 02,2	$-\beta_3$	-8,5	$+k_3$	+0,70	+0,10	+0,8	133 27 02,8
			0		0	0	0	
13	0 00 00	$-\alpha_5$	-11,4	$-k_5$	+1,88	+0,14	+2,0	0 00 00
14	61 36 40,4	$\alpha_5 + \beta_4$	+29,7	$k_5 - k_4$	-1,76	-0,36	-2,1	61 36 36,3
15	110 35 55,5	$-\beta_4$	-18,3	$+k_4$	-0,12	+0,22	+0,1	110 35 53,6
			0		0	0	0	
16	203 37 03,8			$k_5 - k_1$	-0,29		-0,3	203 37 04,1
17	280 07 06,4			$k_1 - k_2$	-1,73		-1,7	280 07 05,3
18	0 00 00			$k_2 - k_3$	-0,56		-0,6	0 00 00
19	71 18 58,6			$k_3 - k_4$	+0,82		+0,8	71 19 00,0
20	136 58 15,3			$k_4 - k_5$	+1,76		+1,8	136 58 17,7
					0		0	

$$[d^2] = + 8123,3$$

Таблица 5

## Вычисление свободных членов

Обознач. углов	№ направ- лений	Углы	Логарифмы синусов углов	$a$	Обозначен. углов	№ направ- лений	Углы	Логарифмы синусов углов	$b$	№ направ- лений	Углы	$w_i$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$a_1$	2—1	58°16'22",6	9.9297064	+13,1	$b_1$	6—5	45°13'40",6	9.8512060	+20,9	20—19	76°30'02",6	+5",8
$a_2$	5—4	45 46 25 ,4	9.8552712	+20,4	$b_2$	9—8	54 20 38 ,5	9.9098403	+15,1	18—17	79 52 53 ,6	-2 ,5
$a_3$	8—7	40 35 21 ,8	9.8133365	+24,5	$b_3$	12—11	68 05 35 ,9	9.9674509	+ 8,5	19—18	71 18 58 ,6	-3 ,7
$a_4$	11—10	65 21 26 ,3	9.9585283	+ 9,6	$b_4$	15—14	48 59 15 ,1	9.8776976	+18,3	20—19	65 39 16 ,7	-1 ,9
$a_5$	14—13	61 36 40 ,4	9.9443552	+11,4	$b_5$	3—2	51 44 38 ,9	9.8950100	+16,6	19—18	66 38 48 ,5	+7 ,8
	+	271°36'16",5 268 23 49,0	9.5012076 9.5012048	+79,0 79,4			268°23'49",0	9.5012048	+79,4			-5,5

$$540 \ 00 \ 05,5 \quad w_a = +28 \ [p] = -0.4 \ (!)$$

$$[w] = +5,5 \ (!)$$

## Вычисление коррелят

	$w_1 = +5,8$	$w_2 = -2,5$	$w^3 = -3,7$	$w_4 = -1,9$	$w_5 = +7,8$	m	t	$m_i k_6$	$k_i$
	$p_1 = -19,4$	$p_2 = +7,0$	$p^3 = +37,5$	$p_4 = -20,3$	$p_5 = -5,2$				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_{1,1}$	-0,2273	-0,0909	-0,0454	-0,0455	-0,0909	+3,46	-1,55	-0,04	-1,59
$f_{2,1}$	-0,0909	-0,2273	-0,0909	-0,0454	-0,0455	-2,08	+0,11	+0,03	+0,14
$f_{3,1}$	-0,0455	-0,0909	-0,2273	-0,0909	-0,0454	-6,20	+0,62	+0,08	+0,70
$f_{4,1}$	-0,0454	-0,0455	-0,0909	-0,2273	-0,0909	+2,24	-0,09	-0,03	-0,12
$f_{5,1}$	-0,0909	-0,0454	-0,0455	-0,0909	-0,2277	+2,77	-1,85	-0,03	-1,88
						+0,19	-2,76	+0,01	-2,75

$$-\frac{1}{2}[p] = +0,20 \quad (!)$$

$$-\frac{1}{2}[w] = -2,75 \quad (!)$$

$$[mw] = +65,56$$

$$[mp] = +374,50$$

$$k_6 = -\frac{+28,0 + 65,56}{+8123,3 - 374,5} = -0,0121$$