Доцент И. С. АЛЬТШУЛЕР

ПОСТРОЕНИЕ СФЕРЫ ЧЕРЕЗ ОКРУЖНОСТЬ ДАННОГО РАДИУСА КАСАТЕЛЬНО К ЗАДАННОЙ ПЛОСКОСТИ

Вопрос о построении плоскостей, касательных к кривым поверхностям, довольно широко освещен в литературе.[1] Тем не менее в ней не нашли отражения методы решения ряда обратных задач и, в частности, такой, как построение сферы через окружность данного радиуса касательно к заданной плоскости. Эта задача была предложена проф. Н. Ф. Четверухиным (3) и может рассматриваться как в частном, так и в общем случае расположения исходных данных.

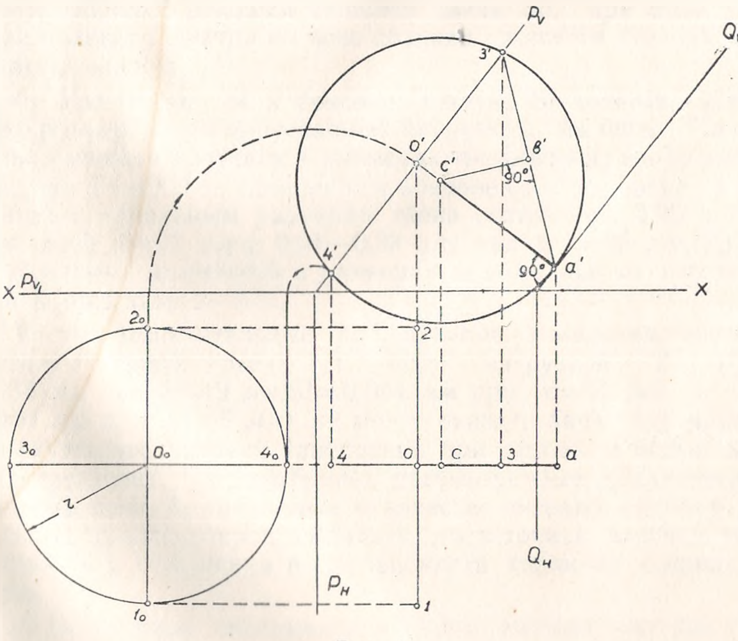

Рис. 1.

[1] Основная литература приведена в конце статьи.

Обозначим касательную плоскость через Q, а плоскость круга, определяемую заданной окружностью, через P. В частном случае задания плоскость Q параллельна плоскости P. В общем же случае это не имеет места. Как частный, так и общий случаи задания имеют по два варианта. Рассмотрим отдельные варианты поставленной задачи.

1. Частный случай.

а) Первый вариант. Плоскости P и Q являются фронтально-проектирующими (рис. 1). Окружность задана величиной радиуса r и положением центра O. Определим проекции центра окружности (o; o′), фронтальную проекцию окружности (отрезок 3′—4′) и величины осей эллипса, определяющих горизонтальную проекцию окружности (отрезок 1_0—2_0—большая ось и отрезок 3_0—4_0—малая ось). Горизонтальную проекцию окружности не строим, так как она не нужна для решения задачи. Опустим из точки o′ перпендикуляр на след Q_V и получим точку a′. Отрезок o′—a′ определяет расстояние между плоскостями P и Q. Фронтальная проекция центра искомой сферы должна быть на этом отрезке и равноудалена как от точки 3′ (или 4′), так и от точки a′. Соединим точки a′ и 3′ отрезком прямой, разделим его пополам и в точке деления b′ восстановим перпендикуляр к отрезку a′—3′ до пересечения с отрезком o′—a′. Точка пересечения c′ будет фронтальной проекцией центра искомой сферы. Горизонтальная проекция центра c будет расположена на линии oa. Радиус искомой сферы равен отрезку c′a′. В случае, если o′a′=r, центр сферы будет в точке O (o; o′) и отрезок прямой 3′—4′ будет фронтальной проекцией большого круга сферы, по которому плоскость P рассекает его на две равные части. Если же отрезок o′a′<r, центр сферы смещается влево от точки O(o; o′).

б) Второй вариант. Плоскости P и Q не являются проектирующими (рис. 2).

Положение центра окружности O (o; o′) в плоскости P задано. Проекции же окружности могут быть построены обычными приемами начертательной геометрии. Для этого достаточно определить размеры осей эллипса на горизонтальной (по прямым 1_0—2_0 и 3_0—4_0) и фронтальной (по прямым 5_0—6_0 и 7_0—8_0) плоскостях проекций, используя метод совмещения. Очертания эллипсов строят по найденным осям при помощи способа концентрических окружностей или треугольного «ключа пропорциональности». Для решения задачи изображение проекции окружности в системе $\frac{V}{H}$ излишне, а потому на рисунке 2 не дано.

Чтобы найти радиус искомой сферы и её центр, применим метод перемены плоскостей проекций и от системы $\frac{V}{H}$ перей-

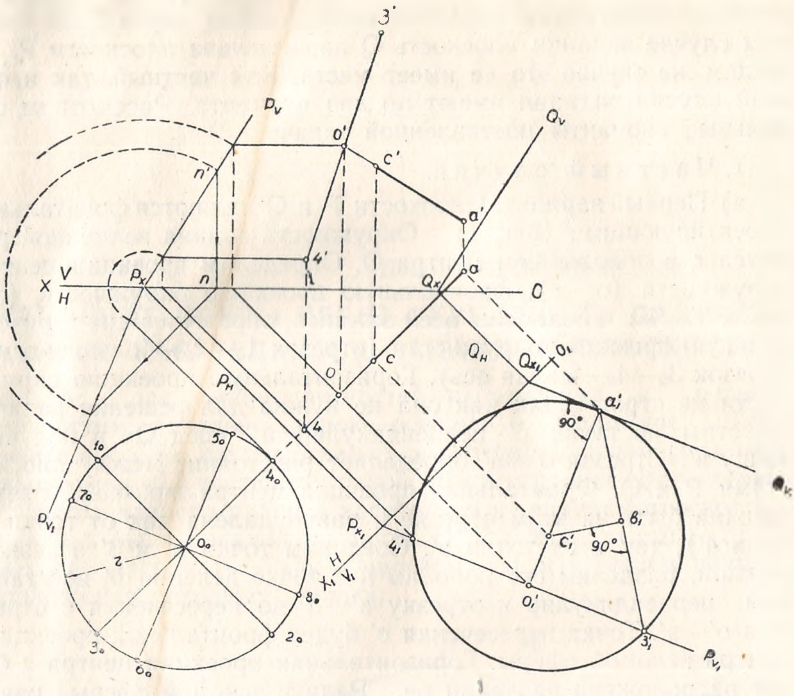

Рис. 2.

дем к новой системе $\frac{V_1}{H}$, в которой плоскости P и Q преобразуются в проектирующие. Построив в системе $\frac{V_1}{H}$ точки o'_1, $3'$ и $4'$, находим указанным выше способом точку c'_1—фронтальную проекцию центра сферы в системе $\frac{V_1}{H}$. Радиус искомой сферы будет равен отрезку c'_1—a'_1. Возвращаемся затем в систему $\frac{V}{H}$ и определяем положение проекций c и c′ центра сферы.

2. Общий случай.

а) Первый вариант. Пара одноименных следов плоскостей P и Q параллельны между собой (рис. 3). Пусть след P_H будет параллелен следу Q_H. Перейдем от системы $\frac{V}{H}$ к системе $\frac{V_1}{H}$, сделав плоскости P и Q фронтально-проектирующими. Аналогично предыдущему найдем и точки o'_1; $3'_1$ и $4'_1$. Предположим теперь, что расстояние от центра заданной окружности до плоскости R, проведенной нами параллельно плоскости Q, равно радиусу заданной окружности r. Тогда радиус сферы R будет равен r, а центром сферы будет точка O. Построим в ситеме $\frac{V_1}{H}$ фронтальную проекцию сферы, радиус которой равен r, и проведем след R_{V_1} плоскости R параллельно следу Q_{V_1} так, чтобы он касался построенной проекции сферы. Полученная точка d'_1 будет фронтальной проекцией точки касания плоскости R к построенной сфере в системе $\frac{V_1}{H}$. Когда же радиус сферы $R \neq r$, фронтальная проекция центра сферы в системе $\frac{V_1}{H}$ должна быть на прямой $o'_1 - f'_1$, перпендикулярной к следу P_{V_1}, и на равном расстоянии как от точки 3′, так и от соответствующей фронтальной проекции точки касания этой сферы.

Построим фронтальную проекцию сферы, радиус которой равен отрезку $f'_1 - 3'_1$, и проведем след S_{V_1} параллельно следу Q_{V_1} и касательно к проекции сферы. Полученную точку касания e'_1 соединим с точкой d'_1 отрезком прямой. Эта прямая

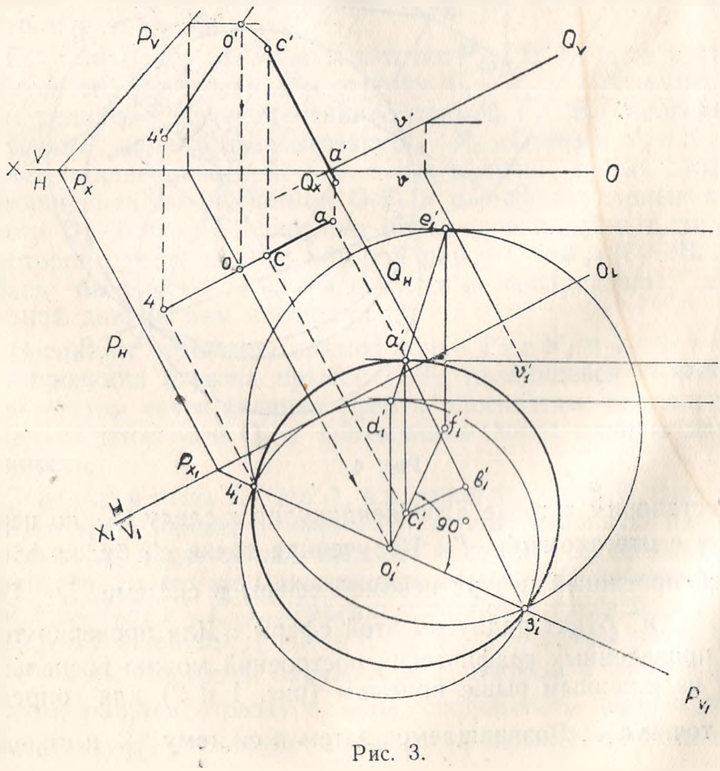

Рис. 3.

является геометрическим местом фронтальных проекций точек касания сфер к плоскостям, расположенным параллельно данной плоскости Q. Следовательно, точка a'_1, находящаяся на пересечении отрезка $d'_1—c'_1$ с Q_{V_1} является фронтальной проекцией точки касания сферы, касательной к плоскости Q_{V_1}.

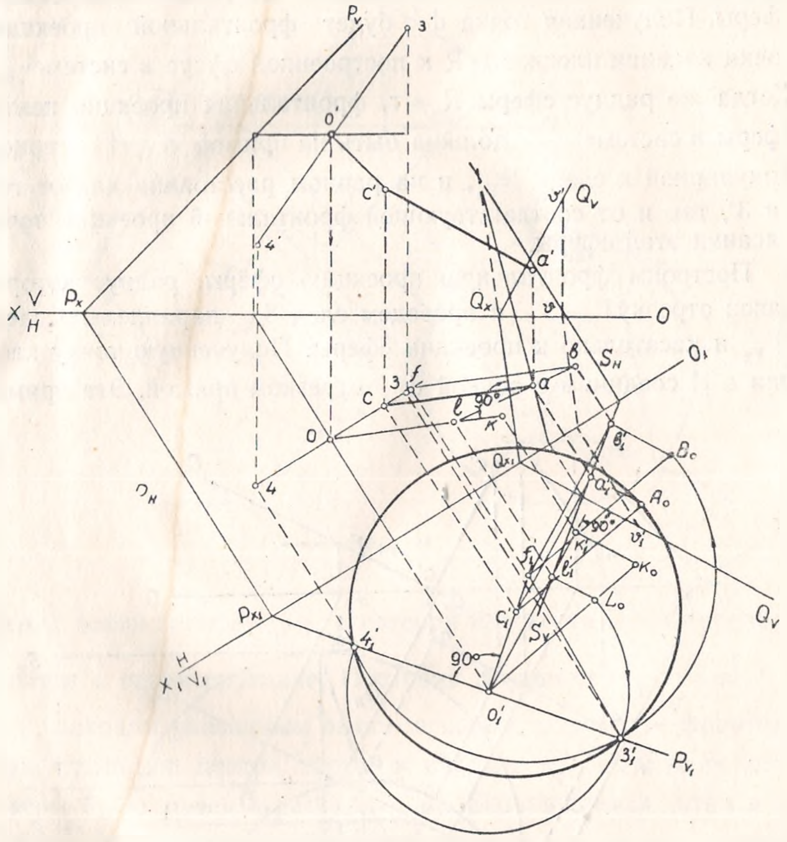

Рис. 4.

Восстановим в точке a′ перпендикуляр к следу Q_{V_1} до пересечения с отрезком $o'_1—f'_1$. Полученная точка c'_1 будет фронтальной проекцией центра искомой сферы в системе $\frac{V_1}{H}$. Отрезок $c'_1—a'_1$ будет радиусом этой сферы. Для проверки точности проведенных графических построений можно воспользоваться изложенным выше приемом (рис. 1 и 2) для определения точки c'_1. Возвращаемся затем в систему $\frac{V}{H}$ и определяем проекции центра сферы $C(c; c')$ и точки касания её к плоскости Q—точку $A(a; a')$.

б) Второй вариант. Плоскости P и Q не имеют параллельных одноименных следов (рис. 4). Перейдем от заданной системы $\frac{V}{H}$ к новой системе $\frac{V_1}{H}$, в которой плоскость P станет фронтально-проектирующей, и найдем положение следов P_{V_1} и Q_{V_1}, проекции точек o'_1, $3'_1$ и $4'_1$. Центр искомой сферы должен быть на прямой $O_1F_1(of; o'_1f_1)$, перпендикулярной к плоскости P. Точка же касания сферы к плоскости R_1 (на рисунке не изображена), параллельной заданной плоскости Q, будет находиться на перпендикуляре, проведенном из центра сферы к плоскости Q_{V_1}.

Опустим из точки $O_1(o; o'_1)$ перпендикуляр на плоскость Q_1. Возьмем на нем случайную точку $K_1(k; k'_1)$ и определим длину отрезка $O_1—K_1$ способом прямоугольного треугольника. Она равна $o'_1—K_0$. Предположим теперь, что центр сферы находится в точке $Q_1(o; o'_1)$. Тогда радиус сферы должен быть равен отрезку $o'_1—3'_1$. Отложим этот отрезок вдоль прямой $o'_1—K_0$, получим точку L_0 и найдем проекции l'_1 и l точки касания L_1, а тем самым и длину проекций радиуса сферы с центром в точке O_1.

Если бы центр сферы был в точке $F_1(f; f'_1)$, то величина радиуса его равнялась бы отрезку $f'_1—3'_1$. Проведем дугу этим радиусом до пересечения с прямой $f'_1—B_0$, проведенной из точки f'_1 параллельно отрезку $o'_1—K_0$. Отрезок $o'_1—K_0$ определяет направление действительных величин любых отрезков, имеющих начало на прямой O_1F_1 и перпендикулярных к плоскости Q_1. Точка B_0 позволяет найти проекции b и b^1 точки B, в которой сфера, радиус которой равен $f'_1—3'_1=f'_1—B_0$, коснулась бы плоскости T (на рисунке не изображено), параллельной данной нам плоскости Q_1.

Соединим отрезками прямой точки l'_1 с b'_1 и l с b и получим проекции отрезка прямой L_1B_1, являющейся **геометрическим местом точек касания** сфер к плоскостям, параллельным заданной плоскости Q_1 и проходящим через данную нам окружность.

Определим точку $A_1(a; a'_1)$, в которой прямая L_1B_1 пересекает плоскость Q_1, проведя через L_1B_1 вспомогательную плоскость S. Точка A_1 будет точкой касания искомой сферической поверхности. Центр этой поверхности лежит на пересечении прямой A_1C_1 (ac; $a'_1c'_1$), перпендикулярной в точке A_1 к плоскости Q_1 с линией $O_1F_1(of; o'_1f'_1)$. Радиус сферы равен отрезку $c'_1—A_0$. Построим окружность с центром в точке c'_1 и радиусом, равным отрезку $c_1—A_0$. Окружность должна пройти через точку $3'_1$, что будет являться проверкой точности произведенных графических построений. Возвратимся теперь в систему $\frac{V}{H}$ и найдем точки c' и a'.

Рассмотренные нами способы построения касательных плоскостей могут быть применены при решении практических задач, выдвигаемых в теории пространственных механизмов и, в частности, при определении положений звеньев сферических механизмов в общем случае пространственного движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаспар Монж, Начертательная геометрия. Перевод с французского, под ред. проф. Д. И. Каргина, АН СССР, 1947.

2. Курдюмов В. И., Курс начертательной геометрии, ч. II, 1897.

3. Пальшау А. Н., Начертательная геометрия, изд. 15, под ред. и с дополнениями проф. Н. Ф. Четверухина, ОНТИ, 1938.

4. Рынин А. Н., Начертательная геометрия, изд. 4, Госстройиздат, 1939.

5. Попов Н. А., Курс начертательной геометрии, Гостехиздат, 1947.

6. Добряков А. И., Курс начертательной геометрии, изд. 3., Стройиздат, 1952.

7. Гордон В. и Семенцов-Огиевский М., Курс начертательной геометрии, изд. 8, Гостехиздат, 1953.