О. П. АЛЕКСЕЕВА

О РЕШЕНИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ВИДЕ КОНТУРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

При решении обыкновенных дифференциальных уравнений почти одновременно возникли два метода: метод рядов, в результате которого возникли специальные функции, и метод интегральных преобразований. Было выяснено, что интегральные решения дают возможность получить более тонкие результаты (асимптотические формулы для специальных функций и др.). В связи с этим замкнутые решения обыкновенных дифференциальных уравнений служили, как известно, предметом исследования многих выдающихся математиков. Пользуясь частными методами, различные авторы предложили ряд интегральных преобразований для решения некоторых линейных уравнений.

В начале XX века Батеман в своих работах, опубликованных в журналах "Proceedings of the London Mathematical Society, ser. 2. Vol. IV. Parts 6" и „Transaction of the Cambrige Philosophical Society. Vol XXI № VII, 1900" сформулировал общий принцип построения интегральных решений обыкновенных дифференциальных уравнений, охватывающий с единой точки зрения различные интегральные преобразования. Однако при этом не давалось никаких руководящих идей, которые позволили бы использовать этот общий принцип для решения конкретных задач. По этой причине принцип Батемана до сих пор использовался лишь для того, чтобы показать, что существующие интегральные преобразования ему удовлетворяют. В данной работе впервые классифицируются интегральные преобразования по тем методам, с помощью которых устанавливается соотношение Батемана, что позволяет расширить класс интегральных преобразований и соответствующих дифференциальных уравнений, решаемых с помощью этих преобразований.

п. 1. Общий принцип построения интегральных решений

В основе построения замкнутых решений обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами лежит следующий общий принцип ([1], стр. 146).

Здесь $\overline{M}_\xi(\varphi)$ изначает дифференциальную форму, сопряженную с $M_\xi(\varphi)$, а $M_\xi^*(\varkappa, \varphi)$, соответствующую билинейную дифференциальную форму (см. [1], стр. 130).

Воспользовавшись тождеством Лагранжа (1.8), мы можем вместо (1.6) написать:

$$L_z\{w(z)\} = \Lambda(z)\int\limits_{(c)} \varkappa(z, \xi)\,\overline{M}_\xi(\varphi)\,d\xi + \Lambda(z)\int\limits_{(c)} \frac{d}{d\xi} M_\xi^*(\varkappa, \varphi)\,d\xi. \tag{1.9}$$

Теперь видно, что интеграл (1.3) будет решением уравнения (1.1), если, во-первых, функция $\varphi(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\overline{M}_\xi(\varphi) = 0 \tag{1.10}$$

и, во-вторых, выполняется условие:

$$\Lambda(z) = \int\limits_{(c)} \frac{d}{d\xi} M_\xi^*(\varkappa, \varphi)\,d\xi = f(z). \tag{1.11}$$

В соответствии со сказанным, замкнутые решения обыкновенных дифференциальных уравнений строятся следующим образом:

а) находится тождество вида (1.4);

б) решается преобразованное уравнение (1.10);

в) выбирается путь интегрирования, удовлетворяющий равенству (1.11).

Особенно большое значение имеют замкнутые решения однородных дифференциальных уравнений второго порядка. Относительно построения таких решений могут быть высказаны следующие общие соображения:

п. 2. Дифференциальные уравнения второго порядка

Пусть дано линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами:

$$L_z(w) = 0, \tag{2.1}$$

где

$$L_z(w) = f_0(z)\,w + f_1(z)\frac{dw}{dz} + f_2(z)\frac{d^2w}{dz^2}. \tag{2.2}$$

Для того, чтобы получить эффективное решение уравнения (2.1) в интегральной форме, рассмотрим наряду с заданным уравнением (2.1) линейный дифференциальный оператор первого порядка:

$$M_\xi(u) = Q_0(\xi)\,u(\xi) + Q_1(\xi)\frac{du}{d\xi}. \tag{2.3}$$

и предположим, что существуют две функции $K(z, \xi)$ и $\varkappa(z, \xi)$, удовлетворяющие равенству:

$$L_z\{K(z, \xi)\} = \Lambda(z)\,M_\xi\{\varkappa(z, \xi)\}. \tag{2.4}$$

Если теперь в выражение (2.2) подставить интеграл:

$$w(z) = \int\limits_{(c)} K(z, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{2.5}$$

то мы получим:

$$L_z\{w(z)\} = \Lambda(z)\int\limits_{(c)}\Big[Q_0(\xi)\varkappa(z, \xi) + Q_1(\xi)\frac{d\varkappa}{d\xi}\Big]\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{2.6}$$

Вычисляя далее неопределенный интеграл по частям и дифференцируя полученный результат по ξ

$$\varphi(\xi)\,Q_1(\xi)\frac{d\varkappa}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\,[\,(\varphi(\xi)\,Q_1(\xi)\,\varkappa(z, \xi)] - \varkappa(z, \xi)\frac{d}{d\xi}\,[Q_1(\xi)\,\varphi(\xi)]\,d\xi \tag{2.7}$$

перепишем, используя (2.7), выражение (2.6) в виде:

$$L_z\{w(z)\} = \Lambda(z)\int\limits_{(c)}\varkappa(z, \xi)\Big\{Q_0(\xi)\,\varphi(\xi) - \frac{d}{d\xi}\,[Q_1(\xi)\,\varphi\ \xi)]\Big\}d\xi + \Lambda(z)\times$$
$$\times\int\limits_{(c)}\frac{d}{d\xi}\,[\varphi(\xi)\,Q_1(\xi)\,\varkappa(z, \xi)]\,d\xi. \tag{2.8}$$

Полученное выраженое (2.8) показывает, что интеграл (2.5) будет решением дифференциального уравнения (2.1), если выполняются условия:

$$\text{а)}\ \overline{M}_\xi(\varphi) = Q_0(\xi)\ \varphi(\xi) - \frac{d}{d\xi}[Q_1(\xi)\varphi(\xi)] = 0, \qquad (2.9)$$

$$\text{б)}\ \int\limits_{(c)} \frac{d}{d\xi}[\varphi(\xi) Q_1(\xi) \varkappa(z,\ \xi)]\, d\xi = 0 \qquad (2.10)$$

Производя дифференцирование в уравнении (2.9) и разделяя переменные, получим значение функции $\varphi(\xi)$:

$$\varphi(\xi) = \frac{c}{Q_1(\xi)}\ e^{\int \frac{Q_0(\xi)}{Q_1(\xi)} d\xi}\ ; \quad (c = 1). \qquad (2.11)$$

После этого второе условие (2.10) принимает вид:

$$\int\limits_{(c)} \frac{d}{d\xi}\left[\varkappa(z,\ \xi)\, e^{\int \frac{Q_0(\xi)}{Q_1(\xi)} d\xi}\right] d\xi = 0. \qquad (2.12)$$

Иногда вместо линейного дифференциального оператора первого порядка (2.3) берется дифференциальный оператор второго порядка:

$$M_\xi(u) = Q_0(\xi)\, u(\xi) + Q_1(\xi)\frac{du}{d\xi} + Q_2(\xi)\frac{d^2u}{d\xi^2} \qquad (2.13)$$

и по-прежнему предполагается справедливым равенство (2.4). В этом случае преобразованное уравнение $\overline{M}_\xi(\varphi) = 0$ для функции $\varphi(\xi)$, так же, как и заданное уравнение (2.1), будет уравнением второго порядка. Если уравнение $\overline{M}_\xi(\varphi)$ относится к уже изученному классу уравнений и может быть проинтегрировано с помощью соответствующих специальных функций, то этим путем также можно получить решение заданного уравнения (2.2) в интегральной форме, установив попутно связь между интегралами уравнений (2.1) и $\overline{M}_\xi(\varphi) = 0$. Кроме того, в некоторых случаях за счет подходящего выбора параметров, входящих в функции $K(z, \xi)$, $\varkappa(z, \xi)$ и коэффициентов заданного уравнения (2.1), можно добиться того, чтобы $Q_0(\xi) = 0$. При этом условии мы получаем для φ уравнение первого порядка

$$M_\xi(G) = 0,$$

что позволяет дать эффективное решение уравнения (2.1)

Если $Q_0(\xi) \neq 0$, то, подставив (2.13) в (2.5) и имея в виду (2.4), получим:

$$L_z\{w(z)\} = \Lambda(z) \int_{(c)} \left[Q_0(\xi)\, \varkappa(z, \xi) + Q_1(\xi) \frac{d\varkappa}{d\xi} + \right.$$

$$\left. + Q_2(\xi) \frac{d^2\varkappa}{d\xi^2} \right] \varphi(\xi)\, d\xi \qquad (2.14)$$

или, после интегрирования по частям:

$$L_z\{w(z)\} = \Lambda(z) \int_{(c)} \varkappa(z, \xi) \left\{ Q_0(\xi)\, \varphi(\xi) - \right.$$

$$\left. - \frac{d}{d\xi} [Q_1(\xi)\, \varphi] + \frac{d^2}{d\xi^2} [Q_2(\xi) \varphi] \right\} d\xi + \Lambda(z) \times$$

$$\times \int_{(c)} \frac{d}{d\xi} \left\{ \varkappa(z, \xi) \left[Q_1(\xi)\, \varphi - \frac{d}{d\xi} Q_2(\xi)\, \varphi \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \varkappa}{\partial \xi} Q_2(\xi)\, \varphi \right\} d\xi. \qquad (2.15)$$

Отсюда видно, что если $Q_0(\xi) \neq 0$, интеграл (2.5) будет общим решением уравнения (2.1) при условии, что

$$1)\ \overline{M}_\xi(\varphi) = Q_0(\xi)\, \varphi - \frac{d}{d\xi} [Q_1(\xi)\, \varphi] +$$

$$+ \frac{d^2}{d\xi^2} [Q_2(\xi)\, \varphi] = 0, \qquad (2.16)$$

$$2) \int_{(c)} \frac{d}{d\xi} \left\{ x(z, \xi)\ [Q_1(\xi)\, Q - \frac{d}{d\xi} (Q_2 \varphi)] + \right.$$

$$\left. + \frac{d\varkappa}{d\xi} Q_2 \varphi \right\} d\xi = 0. \qquad (2.17)$$

Если же $Q_0(\xi) = 0$, то подстановка (2.13) в (2.5) дает

$$L_z\{w(z)\} = \Lambda(z) \int_{(c)} M_\xi \{\varkappa(z, \xi)\}\, \varphi(\xi)\, d\xi =$$

$$= \Lambda(z) \int_{(c)} \left[Q_1(\xi) \frac{d\varkappa}{d\xi} + Q_2(\xi) \frac{d^2\varkappa}{d\xi^2} \right] \varphi(\xi)\, d\xi$$

или после интегрирования по частям:

$$L_z\{w(z)\} = \Lambda(z)\int\limits_{(c)}\left\{\frac{d\varkappa}{d\xi}Q_1(\xi)\varphi(\xi) - \frac{d}{d\xi}[Q_2(\xi)\varphi]\right\}d\xi +$$

$$+\Lambda(z)\int \frac{d}{d\xi}\left[Q_2(\xi)\varphi\frac{d\varkappa}{d\xi}\right]d\xi.$$

Следовательно, в случае $Q_0(\xi)=0$, интеграл (2.5) будет решением уравнения (2.1) при условии, что

$$1)\ \overline{M}_\xi(\varphi) = Q_1(\xi)\varphi(\xi) - \frac{d}{d\xi}[Q_2(\xi)G] = 0 \qquad (2.18)$$

$$2)\ \int\limits_{(c)}\frac{d}{d\xi}\left[Q_2(\xi)G\frac{d\varkappa}{d\xi}\right]d\xi = 0, \qquad (2.19)$$

После этих замечаний общего характера переходим к рассмотрению наиболее важных дифференциальных уравнений и соответствующих интегральных преобразований.

п. 3. Преобразование Лапласа. Уравнение Бесселя

Основное затруднение при построении замкнутых решений обыкновенных дифференциальных уравнений возникает при подборе двух функций $K(z, \xi)$ и $\varkappa(z, \xi)$, удовлетворяющих уравнению (2. 4). Изложенная в п. 2 общая схема решения дифференциальных уравнений второго порядка несколько упрощает эту задачу.

Положим для начала:

$$K(z, \xi) = \varkappa(z, \xi) = e^{z\xi};\ \Lambda(z) = 1. \qquad (3.1)$$

Подставив

$$w = K(z, \xi) = e^{z\xi} \text{ и } u = \varkappa(z, \xi) = e^{z\xi} \qquad (3.2)$$

в выражения (2.2) и (2.3), получим

$$L_z\{K(z, \xi)\} = L_z(e^{z\xi}) = e^{z\xi}[f_0(z) + f_1(z)\xi + $$

$$+ f_2(z)\xi^2]\cdot \qquad (3.3)$$

$$M_\xi\{\varkappa(z, \xi)\} = M_\xi(e^{z\xi}) = e^{z\xi}[Q_0(\xi) + Q_1(\xi)z]. \qquad (3.4)$$

Мы добьемся равенства

$$L_z(e^{z\xi}) = M_\xi(e^{z\xi}) \qquad (3.5)$$

и, следовательно, выделим класс уравнений вида (2.1), интегрируемых посредством преобразования

$$w(z) = \int_{(c)} e^{z\xi} \varphi(\xi)\, d\xi \tag{3.6}$$

если получим возможность сравнивать в (3.3) и (3.4) коэффициенты при одинаковых степенях ξ или z. Для того, чтобы использовать первую возможность, допустим, что:

$$Q_0(\xi) = \alpha_1 + \beta_1 \xi + \gamma_1 \xi^2; \quad Q_1(\xi) = \alpha_2 + \beta_2 \xi + \gamma_2 \xi^2. \tag{3.7}$$

Тогда выражение (3.4) принимает вид:

$$M_\xi \{\varkappa(z, \xi)\} = M_\xi (e^{z\xi}) = e^{z\xi} [\alpha_1 + \beta_1\xi + \gamma_1\xi^2 + \\ + (\alpha_2 + \beta_2\xi + \gamma_2\xi^2) z]. \tag{3.8}$$

Сравнивая теперь коэффициенты при одинаковых степенях ξ в выражениях (3.3) и (3.8), сразу находим:

$$f_0(z) = \alpha_1 + \alpha_2 z; \quad f_1(z) = \beta_1 + \beta_2 z; \quad f_2(z) = \gamma_1 + \gamma_2 z. \tag{3.9}$$

К этому же результату (3.9) приводит использование второй возможности. Следовательно, согласно (2.1), (2.5), (2.11) и (2.12), однородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами, представляющими собою линейные функции от z:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 z)\, w + (\beta_1 + \beta_2 z) \frac{dw}{dz} + (\gamma_1 + \gamma_2 z) \frac{d^2 w}{dz^2} = 0 \tag{3.10}$$

имеет решение в интегральной форме:

$$w(z) = \int_{(c)} e^{z\xi} \varphi(\xi)\, d\xi \tag{3.11}$$

где

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\alpha_2 + \beta_2\xi + \gamma_2\xi^2} e^{\int \frac{\alpha_1 + \beta_1\xi + \gamma_1\xi^2}{\alpha_2 + \beta_2\xi + \gamma_2\xi^2} d\xi}, \tag{3.12}$$

а путь интегрирования (c) выбирается таким образом, чтобы выполнялось равенство:

$$\int_{(c)} \frac{d}{d\xi} \left[e^{z\xi} \cdot e^{\int \frac{\alpha_1 + \beta_1\xi + \gamma_1\xi^2}{\alpha_2 + \beta_2\xi + \gamma_2\xi^2} d\xi} \right] d\xi = 0. \tag{3.13}$$

Обобщая указанный ход рассуждения, можно придти к следующему результату: пусть дано дифференциальное уравнение вида:

$$L_z(w) = 0 \;\; L_z(w) = \sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(z)\, w^\nu(z);\; P_\nu(z) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m} d_{\nu,\mu}\, z^\mu. \tag{3.14}$$

Если положить

$$\mu_\xi(u) = \sum_{\mu=0}^{m} Q_\mu(\xi)\, u^{(\mu)}(\xi);\;\; Q_\mu(\xi) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu,\mu}\, \xi^\nu \tag{3.15}$$

то при $K(z, \xi) = \varkappa(z, \xi) = e^{z\xi}$ выполняется равенство:

$$L^z(e^{z\xi}) = M_\xi(e^{z\xi}) = e^{z\xi} \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{m} a_{\nu,\mu}\, \xi^\nu z^\mu. \tag{3.16}$$

Следовательно, принципиально, решение уравнения вида (3.14), может быть получено в интегральной форме посредством **преобразования Лапласа** (3.11). При этом функция φ должна удовлетворять дифференциальному уравнению $\overline{M}_\xi(\varphi) = 0$, порядок которого равен наивысшей степени полиномиальных коэффициентов уравнения (3.14), т. е. m, а контур (c) выбирается таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\int_{(c)} \frac{d}{d\xi} M^*(\varkappa, \varphi)\, d\xi = 0. \tag{3.17}$$

Пример 1. Дифференциальное уравнение

$$z\frac{d^2w}{dz^2} + 2p\frac{dw}{dz} + zw = 0 \tag{3.18}$$

относится к уравнению типа (3.10),

В данном случае

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_1 = 2p, \; \beta_2 = 0, \quad \gamma_1 = 0, \; \gamma_2 = 1. \tag{3.19}$$

Поэтому, согласно (3.10—3.13), оно имеет решение в интегральной форме:

$$w(z) = \int_A^B e^{z\xi}\, \varphi(\xi) d\xi, \tag{3.20}$$

где

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}\, e^{\int \frac{2p\xi}{1+\xi^2} d\xi} = \frac{1}{1+\xi^2}\, e^{p \ln (1+\xi^2)} =$$

$$= (1+\xi^2)^{p-1} \tag{3.21}$$

Пределы интегрирования A и B выбираются таким образом, чтобы выполнялось равенство:

$$\int_A^B \frac{d}{d\xi}\left[e^{z\xi}(1+\xi^2)^p\right] d\xi = e^{z\xi}(1+\xi^2)^p \Bigg|_A^B = 0 \tag{3.22}$$

Последнее условие (3.22) выполняется при $\mathrm{Re}\, p > 0$ числами $A = -i$; $B = i$. Это дает первый частный интеграл уравнения (3.18):

$$w_1(z) = i \int_{-1}^{+1} \cos tz\, (1-t^2)^{p-1} dt \tag{3.23}$$

Второй частный интеграл получается для $\mathrm{Re}\, z > 0$, если положить $A = -\infty$ и $B = +i$ или $-i$. Тогда получим

$$w_2(z) = \int_{-\infty}^{0} e^{zt}(1+t^2)^{p-1} dt - \int_0^1 \sin tz\, (1-t^2)^{p-1} dt. \tag{3.24}$$

Таким образом, общий интеграл уравнения (3.18) имеет вид:

$$w(z) = c_1 \int_{-1}^{+1} \cos tz\, (1-t^2)^{p-1} dt + c_2 \times$$

$$\left[\int_{-\infty}^{0} e^{zt}(1+t^2)^{p-1} dt - \int_0^1 \sin tz\, (1-t^2)^{p-1} dt\right],$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Если $(p-1)$ целое, положительное число, то решение уравнения (3.27) может быть выражено в явной форме.

Пример 2. Дифференциальное уравнение Бесселя

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2) w = 0 \tag{3.25}$$

не относится к уравнению типа (3.10). Однако, если ввести новую неизвестную функцию, положив

$$w = z^\nu v, \tag{3.26}$$

то для v мы получим уравнение типа (3.10):

$$z \frac{d^2 v}{dz^2} + (2\nu + 1) \frac{dv}{dz} + zv = 0. \tag{3.27}$$

Уравнение (3.27) совпадает с уравнением (3.18) если в последнем положить $2p = 2\nu + 1$. Следовательно, согласно (3.23), при $Re\left(\nu + \frac{1}{2}\right) > 0$, оно имеет решение:

$$v(z) = i \int_{-1}^{+1} \cos tz (1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} dt$$

и, согласно (3.26), уравнение Бесселя (3.25) имеет решение вида:

$$w(z) = z^\nu \int_{-1}^{+1} \cos tz (1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} dt. \tag{3.28}$$

Полученный интеграл (3 28) только постоянным множителем отличается от интеграла Пуассона ([10], стр. 65)

$$I_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} \cos tz dt, \tag{3.29}$$

с помощью которого получаются асимптотические разложения функций Бесселя.

В общем случае, когда не выполняется условие $Re\left(\nu + \frac{1}{2}\right) > 0$, согласно (3.20— 3.21) и (3.26), уравнение Бесселя имеет решение:

$$w(z) = z^\nu \int\limits_{(c)} e^{z\xi} (1+\xi^2)^{\nu-\frac{1}{2}} d\xi.$$

где на основании (3.22)

$$\int\limits_{(c)} \frac{d}{dz} [e^{z\xi} (1+\xi^2)^{\nu+\frac{1}{2}}] d\xi$$

или же, при замене ξ на $i\xi$

$$w(z) = z^\nu \int\limits_{(c)} [e^{iz\xi} (\xi^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}} d\xi. \tag{3.30}$$

где

$$\int\limits_{(c)} \frac{d}{d\xi} [e^{iz\xi} (\xi^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}] d\xi = 0. \tag{3.31}$$

Последнему условию (3.31) можно удовлетворить, если специальным образом выбирать путь интегрирования (c), который может быть как замкнутым, так и разомкнутым. В первом случае, согласно (3.31), необходимо требовать, чтобы функция $e^{iz\xi}(\xi^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}$ возвращалась к своему первоначальному значению, когда точка ξ опишет весь контур. Во втором случае необходимо требовать, чтобы эта функция на концах пути интегрирования принимала одно и то же значение (например, нулевое).

В рассматриваемом примере, в качестве контура первого типа целесообразно взять восьмерку, описанную около точек $\xi = +1$ и $\xi = -1$. В качестве контура второго типа — петлю, выходящую из точки $+\infty i$ и охватывающую точки $\xi = -1$ и $\xi = +1$. Оба контура дают решение уравнения Бесселя, отличное от ранее рассматриваемого (3.29). Получаемые при этом интегралы

$$w_1(z) = z^\nu \int\limits_{(c_1)} e^{iz\xi} (\xi^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}} d\xi = z^\nu \int\limits_{+A}^{(1+,-1-)} e^{iz\xi} (\xi^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}} d\xi, \tag{3.39}$$

$$w_2(z) = z^\nu \int\limits_{(c_2)} e^{iz\xi} (\xi^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}} d\xi = z^\nu \int\limits_{+\infty i}^{(-1+,1+)} e^{iz\xi} (\xi^2-1)^{\nu-1} d\xi \tag{3.40}$$

весьма подробно исследованы ([8,] стр. 177). С их помощью получаются различные интегральные представления функций Бесселя, годные как для вещественных, так и для комплексных значений ν. Заметим, что решения уравнений в интегральной форме представляют большой интерес, так как они позволяют исследовать нерегулярные в бесконечности решения дифференциальных уравнений, разложения которых в виде рядов расходятся ([3], стр. 591), ([4], стр. 397).

Решение примера 2 можно было получить иначе, а именно, вместо того, чтобы сначала выполнять подстановку (3.26) и затем применить преобразование Лапласа, можно сразу обобщить преобразование Лапласа так, чтобы соответствующее уравнение, допускающее решение в интегральной форме включало в себя, как частный случай, уравнение Бесселя. Чтобы пояснить эту мысль, положим

$$k(z,\xi)=\psi(z)\,e^{\lambda z\xi};\ \chi(z,\xi)=e^{\lambda z\xi}. \tag{3.32}$$

Тогда, подставив

$$w=k(z,\xi)=\psi(z)\,e^{\lambda z\xi}:\ u=\varkappa(z,\xi)=e^{\lambda z\xi} \tag{3.33}$$

в выражение (2.3) и (2.2), получим:

$$M_\xi\{x(z,\xi)\}=M_\xi(e^{\lambda z\xi})=e^{\lambda z\xi}[Q_0(\xi)+Q_1(\xi)\lambda z]; \tag{3.34}$$

$$L_z\{k(z_1\xi)\}=L_z\{\lambda(z)\,e^{\lambda z\xi}=\{e^{\lambda z\xi}\{f_0(z)\psi(z)+f_1(z)\psi^1(z)+$$
$$+f_2(z)\psi''(z)+[f_1(z)\psi(z)\cdot\lambda+2f_2(y)\psi'(z)\lambda]\xi+$$
$$+[f_2(z)\psi(z)\lambda^2]\xi^2\}. \tag{3.35}$$

Мы добьемся равенства

$$L_z\{k(z,\xi)\}=\Lambda(z)M_\xi\{\varkappa(z,\xi)\} \tag{3.36}$$

и, следовательно, выделим класс уравнений, интегрируемых посредством преобразования

$$w(z)=\psi(z)\int\limits_{(c)}e^{\lambda z\xi}\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{3.37}$$

если получим возможность сравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ξ или z в выражениях (3.35) и (3.34). Для того, чтобы использовать первую возможность, допустим, как и раньше, что

$$Q_0(\xi)=\alpha_1+\beta_1\xi+\gamma_1\xi^2;\ Q_1(\xi)=\alpha_2+\beta_2\xi+\gamma_2\xi^2.$$

Тогда

$$M_\xi\{\varkappa(z,\xi)\}=e^{\lambda z\xi}[\alpha_1+\beta_1\xi+\gamma_1\xi^2+(\alpha_2+\beta_2\xi+\gamma_2\xi^2)\lambda z]. \tag{3.38}$$

После этого, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ в (3.35) и (3.38), с учетом (3.36), получим

$$f_0(z) = \Lambda(z) \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 \lambda z)\psi^2(z)\lambda^2 - \lambda(\beta_1 + \beta_2 \lambda z)\psi(z)\psi'(z) +}{\psi^3(z)\lambda^2}$$

$$\frac{(\gamma_1 + \gamma_2 \lambda z)[2\psi'^2(z) - \psi(z)\psi''(z)]}{\psi^3(z)\gamma^2},$$

$$f_1(z) = \Lambda(z) \frac{\lambda(\beta_1 + \beta_2 \lambda z)\psi(z) - 2(\gamma_1 + \gamma_2 \lambda z)\psi'(z)}{\psi^2(z)\lambda^2};$$

$$f_2(z) = \Lambda(z) \frac{\gamma_1 + \gamma_2 \lambda z}{\psi(z)\lambda^2} \tag{3.39}$$

или, положив
$$\Lambda(z) = \psi^3(z)^2, \tag{3.40}$$
получим:

$$\left.\begin{aligned} f_0(z) &= (\alpha_1 + \alpha_2 \lambda z)\psi^2(z)\lambda^2 - \lambda(\beta_1 + \beta_2 \lambda z)\psi(z)\psi'(z) + \\ &\quad + (\gamma_1 + \gamma_2 \lambda z)[2\psi'^2(z) - \psi(z)\psi''(z)] \\ f_1(z) &= \lambda(\beta_1 + \beta_2 \lambda z \psi^2(z) - 2(\gamma_1 + \gamma_2 \lambda z)\psi(z)\psi'(z), \\ f_2(z) &= (\gamma_1 + \gamma_2 \lambda z)\psi^2(z). \end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

Таким образом, если уравнение

$$f_0(z) w + f_1(z) \frac{dw}{dz} + f_2(z) \frac{d^2 w}{dz^2} = 0 \tag{3.42}$$

имеет коэффициентх вида (3.41), то оно может быть проинтегрировано в замкнутой форме, посредством преобразования (3.37). При этом справедливо равенство

$$L_z\{\psi(z) e^{\lambda z \xi}\} = \psi^3(z)\lambda^2 M_\xi\{e^{\lambda z \xi}\}. \tag{3.43}$$

В частности, при $\psi(x) = x^\nu$, мы получаем равенство

$$L_z\{x^\nu e^{\nu z \xi}\} = x^{3\nu}\lambda^2 M_\xi\{e^{\lambda z \xi}\} \tag{3.44}$$

и уравнение (3.42) с коэффициентами:

$$\left.\begin{aligned} f_0(z) &= z^{2\nu-2}[(\alpha_1 + \alpha_2 \lambda z) z^2 \lambda^2 - (\beta_1 + \beta_2 \lambda z)\lambda \nu z + \\ &\quad + (\gamma_1 + \gamma_2 \lambda z)\nu(\nu + 1)] \\ f_1(z) &= z^{2\nu-2}[(\beta_1 + \beta_2 \lambda z) z^2 \lambda - 2(\gamma_1 + \gamma_2 \lambda) z \nu] \\ f_2(z) &= z^{2\nu-2}[(\gamma_1 + \gamma_2 \lambda z) z^2]. \end{aligned}\right| \tag{3.45}$$

которое на основании (3.37) может быть проинтегрировано в замкнутой форме посредством преобразования

$$w(z) = z^{\nu} \int\limits_{(c)} e^{\lambda z \xi} \varphi(\xi)\, d\xi. \qquad (3.46)$$

Полагая в (3,45): $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 2\nu + 1$; $\gamma_1 = 0$; $\alpha_2 = -1$, $\beta_2 = 0$, $\gamma_2 = 1$, $\lambda = i$,
мы получим:

$$f_0(z) = z^{2\nu-2}\, iz\,(z^2 - v^2),\ f_1(z) = z^{2\nu-2}\, iz \cdot z;\ f_2(z) = z^{2\nu-2}\, iz, z^2.$$

Соответствующее уравнение (3.42), после сокращения на $iz.z^{2\nu-2}$ принимает вид обычного уравнения Бесселя:

$$L_z(w) = z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z\frac{pw}{dz} + (z^2 - \nu^2)\, w = 0. \qquad (3.47)$$

Уравнение (3.47), на основании (3.46), может быть проинтегрировано с помощью преобразования

$$w(z) = z^{\nu} \int\limits_{(c)} e^{iz\xi} \varphi(\xi)\, d\xi \qquad (3.48)$$

При этом справедливо равенство:

$$L_z\{z^{\nu} e^{iz\xi}\} = \frac{z^{3\nu} \cdot i^2}{z^{2\nu-2} \cdot iz} M_\xi\{e^{iz\xi} z\} = z^{\nu+1} i M_\xi\{e^{iz\xi}\}$$

где

$$M_\xi(u) = (\alpha_1 + \beta_1 \xi + \gamma_1 \xi^2)\, u + (\alpha_2 + \beta_2 \xi + \gamma_2 \xi^2) \frac{du}{d\xi} =$$

$$= (2\nu + 1\, w\, (\xi^2 - 1) \frac{du}{d\xi}. \qquad (3.49)$$

Согласно (2.11) и (2.12), уравнение (3.47) имеет решение вида (3.46), где:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{Q_1(\xi)} e^{\int \frac{Q_0(\xi)}{Q_1(\xi)} d\xi} = \frac{1}{\xi^2 - 1} e^{\int \frac{(2\nu+1)\xi}{\xi^2 - 1} d\xi} =$$

$$\frac{1}{\xi^2 - 1} (\xi^2 - 1)^{\nu + \frac{1}{2}} = (\xi - 1)^{\nu - \frac{1}{2}}$$

$$\int\limits_{(c)} \frac{d}{d\xi} \left[\varkappa(z, \xi)\, e^{\int \frac{Q_0(\xi)}{Q_1(\xi)} d\xi} \right] d\xi =$$

$$= \int\limits_{(c)} \frac{d}{d\xi}\left[e^{iz\xi}(\xi^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}\right] d\xi.$$

Этот результат совпадает с ранее полученным результатом. Тоже самое дает реализация второй возможности—сравнение коэффициентов в (3.34) и (3.35) при одинаковых степенях z.

Только что рассмотренный метод неопределенных коэффициентов, в применении к построению тождеств вида (1.4) и выделению, в связи с этим, классов дифференциальных уравнений, допускающих решение в интегральной форме, может дать значительно более общие результаты.

Пусть, как и раньше

$$L_z(w) = f_0(z)\,w + f_1(z)\frac{dw}{dz} + f_2(z)\frac{p^2 w}{dz^2}$$

$$M_z(u) = (\alpha_1 + \beta_1\xi + \gamma_1\xi^2)\,u + (\alpha_2 + \beta_2\xi + \gamma_2\xi^2)\frac{du}{d\xi}$$

положим

$$k(z,\xi) = \psi(z)\,e^{H(z\xi)};\quad x(z,\xi) = e^{H(z)\xi}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ в выражении

$$L_z\{K(z,\xi)\} = \Lambda(z)\,M_z\{x(z,\xi)\}$$

приходим к системе трех уравнений относительно трех неизвестных функций $f_0(z)$, $f_1(z)$, $f_2(z)$:

$$f_0(z)\,\psi(z) + f_1(z)\,\psi'(z) + f_2(z)\,\psi''(z) = \Lambda(z)\,[\alpha_1 + \alpha_2 H(z)]$$

$$\begin{gathered} f_1(z)\,H'(z)\,\psi(z) + 2f_2(z)\,H'(z)\,\psi'(z) + \\ + f_2(z)\,H''(z)\,\psi(z) = \lambda(z)\,[\beta_1 + \beta_1 + \beta_2 H(z)] \end{gathered} \qquad (3.50)$$

$$f_2(z)\,H'^2(z)\,\psi = \Lambda(z)\,[\gamma_1 + \gamma_2 H(z).$$

Решая эту систему, найдем уравнение:

$$f_0(z)\,w + f_1(z)\frac{dw}{dz} + f_2(z)\frac{d^2w}{dz^2} = 0, \qquad (3.51)$$

допускающее решение в интегральной форме посредством преобразования:

$$w(z) = \psi(z)\int\limits_{(c)} e^{H(z)\xi}\,\varphi(\xi)\,d\xi. \qquad (3.52)$$

В частности, при $\psi(z)=1$; $H(z)=z$; $\Lambda(z)=1$ мы получим уравнение Лапласа (3.10), а при $\psi(z)=z^{\nu}$; $H(z)=\lambda z$ только что рассмотренное уравнение (3.51) с коэффициентами (3.45).

Будем теперь, вместо оператора первого порядка $M_\xi(u)$ рассматривать оператор второго порядка:

$$M_\xi(u)=(\alpha_1+\beta_1\xi+\gamma_1\xi^2)\,u+(\alpha_2+\beta_2\xi+\gamma_2\xi^2)\,\frac{du}{d\xi}+$$
$$+(\alpha_3+\beta_3\xi+\gamma_3\xi^2)\frac{d^2u}{d\xi^2}, \tag{3.53}$$

тогда система уравнений (3.50) заменится следующей новой системой:

$$\begin{gathered} f_0(z)\psi(z)+f_1(z)\psi'(z)+f_2(z)\psi''(z)= \\ =\Lambda(z)\left[\alpha_1+\alpha_2H(z)+\alpha_3H^2(z)\right], \\ f_1(z)H'(z)\psi(z)+2f_2(z)H'(z)\psi'(z)+f_2(z)H''(z)\psi(z)= \\ =\Lambda(z)\left[\beta_1+\beta_2H(z)+\beta_3H^2(z)\right] \\ f_2(z)H'^2(z)\psi(z)=\Lambda(z)\left[\gamma_1+\gamma_2H(z)+\gamma_3H^2(z)\right]. \end{gathered} \tag{3.54}$$

Отсюда находим, принимая $\Lambda(z)=H'^3(z)\psi^3(z)$:

$$\begin{gathered} f_2(z)=\left[\gamma_1+\gamma_2H(z)+\gamma_3H^2(z)\right]\cdot H'(z)\psi^2(z)=A(z)H'(z)\psi^2(z) \\ f_1(z)=\left[\beta_1+\beta_2H(z)+\beta_3H^2(z)\right]H'^2(z)\psi^2(z)-\left[\gamma_1+\gamma_2H(z)+\right. \\ \left.+\gamma_3H^2(z)\right]\cdot\left[2H'(z)\psi'(z)+H''(z)\psi(z)\right]\psi(z)=B(z)\psi(z) \\ f_0(z)=\left[\alpha_1+\alpha_2H(z)+\alpha_3H^2(z)\right]H'^3(z)\psi^2(z)- \\ -A(z)\psi''(z)H'(z)\psi(z)-B(z)\psi'(z) \end{gathered} \tag{3.55}$$

Причем

$$L_z\{\psi(z)e^{H(z)\xi}\}=H'^3(z)\psi^3(z)M_\xi\{e^{H(z)\xi}\}. \tag{3.56}$$

Следовательно, дифференциальное уравнение (3.51) с коэффициентами (3.55) так же, как и раньше, интегрируется в замкнутом виде (3.52). Отличие от предыдущего случая заключается в том, что теперь, согласно (2.16), мы имеем φ дифференциальное уравнение не первого, а второго порядка:

$$\overline{M_\xi}(\varphi)=Q_0(\xi)\varphi-\frac{d}{d\xi}\left[Q_1(\xi)\varphi\right]+\frac{d^2}{d\xi^2}\left[Q_2(\xi)\right]\varphi=0. \tag{3.57}$$

Подставив сюда

$$Q_0(\xi)=\alpha_1+\beta_1\xi+\gamma_1\xi^2;\; Q_1(\xi)=\alpha_2+\beta_2\xi+\gamma_2\xi^2;\; Q_2(\xi)=\alpha_3+ \\ +\beta_3\xi+\gamma_3\xi^2,$$

получим

$$M_\xi(\varphi)=[(\alpha_1-\beta_2+2\gamma_3)+(\beta_1-2\gamma_2)\xi+\gamma_1\xi^2]\varphi+[(2\beta_3-\alpha_2)+ \\ +(4\gamma_3-\beta_2)\xi+\gamma_2\xi^2]\varphi'+[\alpha_3+\beta_3\xi+\gamma_3\xi^2]\varphi''=0. \qquad (3.58)$$

Подбирая здесь подходящим образом постоянные, мы можем определять классы дифференциальных уравнений, которые имеют решение в интегральной форме (3.52) с заданной специальной функцией $\varphi(\xi)$.

Например, если положить

$$[(\alpha_1-\beta_2+2\gamma_3)+(\beta_1-2\gamma_2)\xi+\gamma_1\xi^2]=\nu^2-\frac{1}{4};$$

$$(2\beta_3-\alpha_2)+(4\gamma_3-\beta_2)\xi+\gamma_2\xi^2=-2\xi$$

$$\alpha_3+\beta_3\xi+\gamma_3\xi^2=1-\xi^2$$

или, что одно и то же

$$\alpha_1=\nu^2-\frac{1}{4} \qquad \beta_1=0 \qquad \gamma_1=0$$

$$\alpha_2=0 \qquad \beta_2=-2 \qquad \gamma_2=0$$

$$\alpha_3=1 \qquad \beta_3=0 \qquad \gamma_3=-1,$$

то уравнение (3.58) перейдет в уравнение Лежандра:

$$(1-\xi^2)\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}-2\xi\frac{d\varphi}{d\xi}+\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)\varphi=0. \qquad (3.59)$$

Выбрав в качестве $\varphi(\xi)$ функцию Лежандра $Q_{\nu-\frac{1}{2}}(\xi)$ и подставив (3.58) в (3.55), мы найдем класс дифференциальных уравнений, решение которых может быть получено в интегральной форме:

$$w(z)=\psi(z)\int\limits_{(c)} e^{H(\xi)\xi}\; Q_{\nu-\frac{1}{2}}(\xi)\,d\xi. \qquad (3.60)$$

В частности, при $\psi(z)=z^{\frac{1}{2}}$; $H(z)=iz$ и указанных значениях постоянных, формулы (3.55) дают:

$$f_2(z)=iz\cdot z^2;\; f_1(z)=iz\cdot z;\; f_0(z)=iz(z^2-\nu^2).$$

Значит, уравнение Бесселя

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}+(z^2-\nu^2)w=0.$$

согласно (3.60) имеет решение вида

$$w(z) = z^{1/2} \int\limits_{(c)} e^{iz\xi} Q_{\nu-\frac{1}{2}}(\xi)\, d\xi, \tag{3.61}$$

где путь интегрирования (c) выбирается таким образом, чтобы соблюдалось равенство (2.17), которое в данном случае имеет вид:

$$\int\limits_{(c)} \frac{d}{d\xi}\left\{ e^{iz\xi}(1-\xi^2)\left[\frac{dQ_{\nu-\frac{1}{2}}(\xi)}{d\xi} - izQ_{\nu-\frac{1}{2}}\right]\right\} d\xi = 0. \tag{3.62}$$

Подробное исследование интеграла (3.61) вдоль пути, удовлетворяющего условию (3.62) было произведено Уиттекером ([8], стр. 192).

Далее, если положить

$$(\alpha_1 - \beta_2 + 2\gamma_3) + (\beta_1 - 2\gamma_2]\, \xi + \gamma_1 \xi^2 = \xi^2 - \nu^2$$

$$(2\beta_3 - \alpha_2) + (4\gamma_3 - \beta_2)\, \xi + \gamma_2 \xi^2 = \xi;\quad \alpha_3 + \beta_3 \xi + \gamma_3 \xi^2 = \xi^2$$

или, что одно и то же

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 1 - \nu^2 & \beta_1 = 0 & \gamma_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 & \beta_2 = 3 & \gamma_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 & \beta_3 = 0 & \gamma_3 = 1, \end{array} \tag{3.63}$$

то уравнение (3.58) перейдет в уравнение Бесселя

$$\xi^2 \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + \xi \frac{d\varphi}{d\xi} + (\xi^2 - \nu^2)\,\varphi = 0. \tag{3.64}$$

Выбрав в качестве $\varphi(\xi)$ функцию Бесселя $J_p(\xi)$ и подставив (3.63) в (3.55), мы получим класс дифференциальных уравнений, решение которых может быть получено в интегральной форме:

$$w(z) = \psi(z) \int\limits_{(c)} e^{H(z)\xi} J_p(\xi)\, d\xi \tag{3.65}$$

Например, при $\psi(z) = 1$; $H(z) = iz$ и указанных значениях постоянных (3.63), формулы (3.55) дают

$$f_2(z) = (1 - z^2)\, i;\ f_1(z) = -3iz,\ f_0(z) = -i(1 - \nu^2).$$

Значит уравнение

$$(z^2-1)\frac{d^2w}{dz^2}+3z\frac{dw}{dz}+(1-\nu^2)w=0$$

имеет решение вида:

$$w(z)=\int\limits_{(c)} e^{iz\xi} J_\nu(\xi)\,d\xi$$

В тех случаях, когда заданное уравнение $L_z(w)$ может быть непосредственно проинтегрировано, а преобразованное уравнение $\overline{M}_\xi$ (φ) приводит к специальным функциям, соотношение между w и φ может быть использовано для вычисления интегралов от специальных функций. Пусть, например,

$$L_z(w)=f_0(z)\,w+f_1(z)\frac{dw}{dz}. \qquad (3.66)$$

$$M_\xi(u)=(\alpha_1+\beta_1\xi)u+(\alpha_2+\beta_2\xi)\frac{du}{d\xi}+(\alpha_3+\beta_3\xi)\frac{d^2u}{d\xi^2}. \qquad (3.67)$$

Тогда

$$L_z(e^{\lambda z\xi})=e^{\lambda z\xi}[f_0(z)+\xi\lambda f_1(z)], \qquad (3.68)$$

$$M_\xi(e^{\lambda z\xi})=e^{\lambda z\xi}[\alpha+\lambda\alpha_2 z+\lambda^2\alpha_3 z^2+(\beta_1+\beta_2\lambda z+\beta_3\lambda^2 z^2)\xi]. \qquad (3.69)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ в (3.68) и (3.69), получим:

$$f_0(z)=\alpha_1+\alpha_2\lambda z+\alpha_3\lambda^2 z^2;\quad f_1(z)=[\beta_1+\beta_2\lambda z+\beta_3\lambda^2 z^2]\,\frac{1}{\lambda}.$$

Следовательно, уравнение

$$\lambda(\alpha_1+\lambda\alpha_2 z+\lambda^2\alpha_3 z^2)w+(\beta_1+\beta_2\lambda z+\beta_3\lambda^2 z^2)\frac{dw}{dz}=0 \qquad (3.70)$$

может быть проинтегрировано в виде:

$$w(z)=\int\limits_{(c)} e^{\lambda z\xi}\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Поскольку, согласно (3.67):

$$Q_0(\xi)=(\alpha_1+\beta_1\xi);\quad Q_1(\xi)=(\alpha_2+\beta_2\xi);\quad Q_2(\xi)=(\alpha_3+\beta_3\xi) \qquad (3.71)$$

то, на основании (2.16) мы имеем для φ уравнение

$$Q_0(\xi)\,\varphi-\frac{d}{d\xi}[Q_1(\xi)\,\varphi]+\frac{d^2}{d\xi^2}[Q_2(\xi)\,\varphi]=$$

$$= (\alpha_3 + \beta_3 \xi) \frac{d^2 \varphi}{d \xi^2} + (2\beta_3 - \alpha_2 - \beta_2 \xi) \frac{d \varphi}{d \xi} + (\alpha_1 - \beta_1 + \beta_1 \xi) \varphi = 0 \quad (3.72)$$

и, на основании (2.17), для определения контура (c) уравнение:

$$\int\limits_{(c)} \frac{d}{d\xi} \left\{ e^{\lambda z \xi} \left[(\alpha_3 + \beta_3 \xi) \frac{d\varphi}{d\xi} - [\lambda z(\alpha_3 + \beta_3 \xi) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (\alpha_2 - \beta_3 + \beta_2 \xi)] \varphi \right] \right\} d\xi = 0. \quad (3.73)$$

Положим для определенности:

$$\alpha_3 = 0; \quad \beta_3 = 1; \quad \alpha_2 = 1; \quad \beta_2 = 0; \quad \alpha_1 = 0; \quad \beta_1 = 1. \quad (3.74)$$

Тогда вместо (3.86) мы получим уравнение Бесселя

$$\xi \frac{d^2 \varphi}{d \xi^2} + \frac{d \varphi}{d\xi} + \xi \varphi = 0$$

решением которого служит функция $\varphi = J_0(\xi)$ и вместо (3.73) при $\lambda = -1$, условие

$$\xi e^{-z\xi} \left[\frac{dJ_0}{d\xi} + z J_0' \right] \Big|_A^B = 0,$$

которое удовлетворяется при $Rez > 0$ числами 0 и $+\infty$.

Из сказанного следует, что уравнение (3.70) при значениях постоянных (3.74)

$$(1 + z^2) \frac{dw}{dz} + zw = 0 \quad (3.75)$$

имеет решение

$$w(z) = \int\limits_0^\infty e^{-z\xi} J_0(\xi) \, d\xi. \quad (3.76)$$

С другой стороны, непосредственно интегрируя (3.75), получим

$$w = \frac{c}{\sqrt{1 + z^2}}.$$

Значит

$$\int\limits_0^\infty e^{-z\xi} J_0(\xi) \, d\xi = \frac{c}{\sqrt{1 + z^2}}.$$

где

$$c = \int_0^{\infty} J_0(\xi)\, d\xi = 1.$$

После этих общих замечаний перейдем к другим дифференциальным уравнениям, для которых равенство (1.4) осуществляется с помощью разложения коэффициентов уравнения (1.5) по степеням $(z-\xi)^{\alpha}$ и последующего сравнения коэффициентов при $(z-\xi)\alpha^2$ в (1.2) и (1.5).

п. 4. Преобразования Эйлера. Уравнение Лежандра

Как и раньше, рассматриваем операторы:

$$L_z(w) = f_0(z)\, w + f_1(z)\, \frac{dw}{dz} + f_2(z)\, \frac{d^2w}{dz^2}, \tag{4.1}$$

$$M_{\xi}(u) = Q_0(\xi)\, u + Q_1(\xi)\, \frac{du}{d\xi} + Q_2(\xi)\, \frac{d^2u}{d\xi^2}. \tag{4.2}$$

Положим теперь:

$$w = K(z, \xi) = (z-\xi)^{\alpha};\quad u = \varkappa(z, \xi) = (z-\xi)^k. \tag{4.3}$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_z\{K(z, \xi)\} &= f_0(z)\,(z-\xi)^{\alpha} + \\ &+ f_1(z)\,\alpha\,(z-\xi)^{\alpha-1} + f_2(z)\,\alpha\,(\alpha-1)\,(z-\xi)^{\alpha-2}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} M_{\xi}\{\varkappa(z, \xi)\} &= Q_0(\xi)\,(z-\xi)^k - \\ &- Q_1(\xi)\,k\,(z-\xi)^{k-1} + Q_2(\xi)\,k\,(k-1)\,(z-\xi)^{k-2}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Для того, чтобы получить возможность сравнивать коэффициенты при одинаковых степенях $(z-\xi)$ в выражениях (4.4) и (4.5) разложим функции $Q_0(\xi)$, $Q_1(\xi)$ и $Q_2(\xi)$ по степеням $(z-\xi)$

$$\begin{aligned} Q_2(\xi) &= Q_2(z) + Q_2'(z)\,(z-\xi) + \frac{Q_2''(z)}{2!}\,(z-\xi)^2 \\ Q_1(\xi) &= Q_1(z) - Q_1'(z)\,(z-\xi);\quad Q_0(\xi) = Q_0(z) = \mathrm{const} \end{aligned} \tag{4.6}$$

и подставим (4.6) в (4.5). Выражение (4.5) примет вид:

$$\begin{aligned} M_{\xi}\{\varkappa(z, \xi)\} &= Q_2(z)\,k\,(k-1)\,(z-\xi)^{k-2} - \\ &- [Q_1(z)\,k + Q_2'(z)\,k\,(k-1)]\,(z-\xi)^{k-1} + \\ &+ \left[Q_0(z) + Q_1'(z)\,k + Q_2''(z)\,\frac{k\,(k-1)}{2!}\right](z-\xi)^k. \end{aligned} \tag{4.7}$$

После этого, считая $\alpha = k$ в (4.4) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(z-\xi)$ в (4.4) и (4.7), находим:

$$
\begin{gathered}
f_0(z) = Q_0(z) + kQ_1'(z) + \frac{k(k-1)}{2\,!}\, Q_2''(z), \\
f_1(z) = -\left[Q_1(z) + (k-1)\, Q_2'(z)\right], \\
f_2(z) = Q_2(z).
\end{gathered}
\tag{4.8}
$$

Таким образом, при условии (4.8), соблюдается равенство

$$
L_z\left\{(z-\xi)^k\right\} = M_\xi\left\{(z-\xi)^k\right\}, \tag{4.9}
$$

следовательно, уравнение

$$
\begin{gathered}
Q_2(z)\,\frac{d^2w}{dz^2} - \left[(k-1)\, Q_2'(z) + Q_1(z)\right]\frac{dw}{dz} + \\
+ \left[\frac{k(k-1)}{2\,!}\, Q_2''(z) + kQ_1'(z) + Q_0(z)\right] w = 0,
\end{gathered}
\tag{4.10}
$$

где $Q_2(z)$, $Q_1(z)$ и $Q_0(z)$ многочлены, соответственно второй, первой и нулевой степени, имеет решение в интегральной форме:

$$
w(z) = \int\limits_{(c)} (z-\xi)^k\, \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{4.11}
$$

В качестве примера рассмотрим уравнение Лежандра ([1]), стр. 157).

$$
(1-z^2)\,\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\,\frac{dw}{dz} + n(n+1)\, w = 0. \tag{4.12}
$$

В данном случае:

$$
\begin{gathered}
Q_z(z) = 1 - z^2;\ (k-1)\, Q_2'(z) + Q_1(z) = \\
= 2z;\ \frac{k(k-1)}{2\,!}\, Q_2''(z) + kQ_1'(z) + Q_0(z) = n(n+1).
\end{gathered}
$$

Отсюда находим:

$$
\begin{gathered}
Q_2(z) = 1 - z^2;\ Q_1(z) = 2kz;\ Q_0(z) = \\
= n(n+1) - k(k+1).
\end{gathered}
\tag{4.13}
$$

При $k = n$, или $k = -n-1$ первое слагаемое правой части

(4.2) обращается в нуль $Q_0(z) = 0$. Имея в виду это обстоятельство, по формуле (4.11) при $k = -n-1$, получаем решение уравнения (4.12) в интегральной форме:

$$w(z) = \int_{(c)} (z-\xi)^{-n-1} \varphi(\xi)\, d\xi, \tag{4.14}$$

где, согласно (2.18), функция $\varphi(\xi)$ должна удовлетворять уравнению:

$$\overline{M_\xi}(\varphi) = Q_1(\xi)\varphi(\xi) - \frac{d}{d\xi}[Q_2(\xi)\varphi] =$$

$$= 2k\xi\varphi(\xi) - \frac{d}{d\xi}[(1-\xi^2)\varphi] = 0.$$

Откуда

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{Q_2(\xi)} e^{\int \frac{Q_1(\xi)}{Q_2(\xi)} d\xi} = \frac{1}{1-\xi^2} e^{\int \frac{2k\xi}{1-\xi^2} d\xi} =$$

$$= \frac{1}{1-\xi^2} e^{-k\ln(1-\xi^2)} = \frac{1}{(1-\xi^2)^{k+1}} = \tag{4.15}$$

$$= \frac{1}{(1-\xi^2)^{-n}} = (1-\xi^2)^n,$$

а контур (c), согласно (2.19) и (4.15) должен удовлетворять условию:

$$\int_{(c)} \frac{d}{d\xi}\left[Q_2(\xi)\varphi \frac{dx}{d\xi}\right| d\xi =$$

$$= (n+1)\int_{(c)} \frac{d}{d\xi}[(1-\xi^2)^{n+1}(z-\xi)^{-n-2}]\, d\xi = 0. \tag{4.16}$$

Таким образом, на основании (4.14—4.15), контурный интеграл

$$w(z) = \int_{(c)} \frac{(1-\xi^2)^n}{(z-\xi)^{n+1}} d\xi, \tag{4.17}$$

дает решение уравнения Лежандра (4.12), если соблюдается равенство (4.16). В частности, решением уравнения Лежандра является контурный интеграл Шлефли

$$p_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{(\xi^2-1)^n}{2^n(\xi-z)^{n+1}} d\xi, \tag{4.17}$$

где (c) — путь интегрирования, окружающий точку z один раз против часовой стрелки, в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Подставляя (4.17) в (4.12), получим:

$$(1-z^2)\frac{d^2p_n(z)}{dz^2} - 2z\frac{dp_n(z)}{dz} + n(n+1)p_n(z) =$$

$$= \frac{n+1}{2\pi i}\int\limits_{(c)}\frac{(\xi^2-1)^n d\xi}{2^n(\xi-z)^{n+3}}\left\{-(n+2)(\xi^2-1)+\right. \tag{4.18}$$

$$\left.+2(n+1)\xi(\xi-z)\right\} =$$

$$= \frac{n+1}{2\pi i .\, 2^n}\int\limits_{(c)}\frac{d}{d\xi}\left\{\frac{(\xi^2-1)^{n+1}}{(\xi^2-z)^{n+2}}\right\} d\frac{d}{d\xi}.$$

Последний интеграл равен нулю, так как когда n — целое, функция $(\xi^2-1)^{n+1}(\xi^2-z)^{-n-2}$ принимает свое начальное значение после обхода контура (c). Следовательно, можно написать:

$$\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{dp_n(z)}{dz}\right\} + n(n+1)p_n(z) = 0. \tag{4.19}$$

Условие $(1-\xi^2)^{n+1}(z-\xi)^{-n-2}\Big|_A^B = 0$ удовлетворяется при $n+$ $+1>0$ и $|z|>1$ числами $A=-1$ и $B=+1$. Значит определенный интеграл

$$w(z) = \int\limits_{-1}^{+1}(z-\xi)^{-n-1}(1-\xi^2)^n\, d\,\xi$$

также является решением уравнения Лежандра (ср. [3], стр. 625). Подробное исследование интеграла (4.17) приводит к различным интегральным представлениям функций Лежандра 1-го и 2-го рода ([3], стр. 622). Как и в предыдущем п. 3 преобразование с ядром (4.3) может быть обобщено в различных направлениях. Прежде всего, получается следующий результат. Преобразование с ядром $(x-t)^\alpha$ применимо к любому линейному дифференциональному уравнению

$$\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(z)\, w^{(\nu)}(z) = 0,$$

у которого каждый из коэффициентов $p_\nu(x)$ есть многочлен степени $\leqslant \nu$, а $p_n(z)$ имеет точно степень n. Такие уравнения всегда можно представить в форме:

$$L_z(w) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu w^{(\nu)} \sum_{\mu=0}^{n-\nu} \binom{k+n-\nu-1}{n-\nu-\mu} Q_\mu^{(n-\nu-\mu)}(z)=0, \quad (4.20)$$

где $Q_\mu(z)$ — многочлен степени $\leqslant n-\mu$, а k — некоторая постоянная. Если в (4.20) фактически входят только многочлены $Q_0(z)$, $Q_1(z)$... $Q_p(z)$, то положив

$$M_\xi(u) = \sum_{q=0}^{p} Q_{p-q}(\xi)\, u^{(q)}(\xi) \quad (4.21)$$

мы получим:

$$L_z\{k(z,\xi)\} = CM_\xi\{\varkappa(z, \xi)\}, \quad (4.22)$$

где

$$K(z,\xi) = (z-\xi)^{k+n-1}; \quad \varkappa = (z-\xi)^{k+p-1};$$
$$c = (-1)^n \binom{k+n-1}{n-p} (n-p)! \quad (4.23)$$

Следовательно, решение уравнения вида (4.20) может быть получено в интегральной форме посредством **преобразования Эйлера:**

$$w(z) = \int_{(c)} (z-\xi)^{k+n-1} \varphi(\xi)\, d\xi. \quad (4.23)$$

Указанный результат можно сформулировать в более удобной для приложений форме, если за основу брать не функцию $Q(\xi)$, а коэффициенты уравнения $f(z)$. С этой целью при установлении равенства (4.9) или, в общем случае (4.22), нужно разлагать по степеням $(z-\xi)$ коэффициенты уравнения $f(z)$, а не функции $Q(\xi)$. Эту мысль поясним на примере уравнения второго порядка $L_z\{w\} = 0$, где $L_z(w)$ определяется выражением (4.1). Разлагая по степеням $(z-\xi)$ коэффициенты выражения (4.1)

$$f_2(z) = f_2(\xi) + f_2'(\xi)(z-)\xi + \frac{f_2''(\xi)}{2!}(z-\xi)^2,$$
$$f_1(z) = f_1(\xi) + f_1'(\xi)(z-\xi), \quad (4.24)$$
$$f_0(z) = f_0(\xi) = \mathrm{const}$$

и подставляя эти значения (4.24) в (4.4), получим, если принять $\alpha = k$:

$$L_z\{k(z,\xi)\} = [f_0(\xi) + kf_1'(\xi) +$$

то (4.36) можно переписать так:

$$L_z\{K(z, \xi)\} = a_0 [\psi(z) - \xi]^k +$$

$$+ Ak(k-1) [\psi(z) - \xi]^{k-2} + Bk(k-1) [\psi(z) - \xi]^{k-1} + \qquad (4.38)$$

$$+ Ck(k-1) [\psi(z) - \xi]^k.$$

Сравнивая теперь коэффициенты при одинаковых степенях $[\psi(z) - \xi]$ в (4.34) и (4.38), получим

$$Q_0(\xi) = a_0 + Ck(k-1); \; Q_1(\xi) =$$

$$= -B(k-1); \; Q_2(\xi) = A$$

или согласно (4.37) и (4.35):

$$Q_0(\xi) = a_0 + ck(k-1); \; Q_1(\xi) =$$

$$= -(b + 2c\xi)(k-1); \; Q_2(\xi) = a + b\xi + c\xi^2$$

$$f_0(z) = a_0; \; f_1(z) = -\frac{a + b\psi(z) + c\psi^2(z)}{\psi'^3(z)} \psi''(z);$$

$$f_2(z) = \frac{a + b\psi(z) + c\psi^2(z)}{\psi'^2(z)}.$$

Следовательно, если „k“ определено так, что:

$$a_0 + ck(k-1) = 0, \qquad (4.39)$$

то тогда уравнение

$$[a + b\psi(z) + c\psi^2(z)] \psi'(z) \frac{d^2w}{dz^2} - [a_0 + b\psi(z) +$$

$$(4.40)$$

$$+ c\psi^2(z)] \psi''(z) \frac{dw}{dz} + a\psi'^3(z) w = 0$$

имеет решение вида:

$$w(z) = \int\limits_{(c)} [\psi(z) - \xi]^k \varphi(\xi) d\xi, \qquad (4.41)$$

где, согласно (2.18), (2.19) и (2.11) функция $\varphi(\xi)$ равна:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{a + b\xi + c\xi^2} e^{-\int \frac{(b + 2c\xi)(k-1)}{a + b\xi + c\xi^2} d\xi}, \qquad (4.42)$$

а контур (c) определяется из условия:

$$\int\limits_{(c)} \frac{d}{d\xi}\left\{ e^{-\int \frac{(b+2c\xi)(k-1)}{a+b\xi+c\xi^2}\, d\xi} [\psi(z)-\xi]^{k-1} \right\} d\xi = 0. \qquad (4.43)$$

Например, при $\psi(z) = \frac{1}{z}$ мы получаем уравнение

$$(az^4+bz^3+cz^2)\frac{d^2w}{dz^2} + 2(az^3+bz^2+ + cz)\frac{dw}{dz} + a_0 w = 0, \qquad (4.44)$$

которое имеет решение вида:

$$w(z) = \int\limits_{(c)} \frac{1}{z^k}(1-z\xi)^k \varphi(\xi)\, d\xi. \qquad (4.45)$$

Таким же образом можно выделить класс дифференциальных уравнений, допускающих решение в интегральной форме:

$$w(z) = \int\limits_{(c)} [z-\psi()\xi]^k \varphi(\xi)\, d\xi.$$

В этом случае мы получим:

$$f_0(z) = a_0 + ck(k-1);\ f_1(z) = = -(b+2cz)(k-1);\ f_2(z) = a+bz+cz^2$$

$$Q_0(\xi) = a_0;\ Q_2(\xi) = \frac{a+b\psi(\xi)+c\psi^2(\xi)}{\psi'^2(\xi)};$$

$$Q_1(\xi) = -\frac{a+b\psi(\xi)+c\psi^2(\xi)}{\psi'^3(\xi)}\psi''(\xi).$$

Остановимся теперь на одном важном частном случае применения преобразования Эйлера. Рассмотрим операторы

$$L_z(w) = f_0(z)w + f_1(z)\frac{dw}{dz} + f_2(z)\frac{d^2w}{dz^2}, \qquad (4.46)$$

$$M_\xi(u) = Q_0(\xi)u + Q_1(\xi)\frac{du}{d\xi}. \qquad (4.47)$$

Положим, как и раньше

$$w = K(z,\xi) = (z-\xi)^2;\ u = \varkappa(z,\xi) = (z-\xi)^k. \qquad (4.48)$$

Тогда

$$L_z\{K(z,\xi)\} = f_0(z)(z-\xi)^{\alpha} +$$
$$+ f_1(z)\,\alpha(z-\xi)^{\alpha-1} + f_2(z)\,\alpha(\alpha-1)(z-\xi)^{\alpha-2}, \qquad (4.49)$$

$$M_{\xi}\{\varkappa(z,\xi)\} = Q_0(\xi)(z-\xi)^k - Q_1(\xi)\,k(z-\xi)^{k-1}. \qquad (4.50)$$

Пусть:

$$Q_0(\xi) = Q_0(z) - Q_0'(z)(z-\xi)$$
$$(4.51)$$
$$Q_1(\xi) = Q_1(z) - Q_1'(z)(z-\xi) + \frac{Q_1''(z)}{2!}(z-\xi)^2.$$

Подставив (4.51) в (4.50), получим:

$$M_{\xi}\{\varkappa(z,\xi)\} = -kQ_1(z)(z-\xi)^{k-1} +$$
$$+ [kQ_1'(z) + Q_0(z)](z-\xi)^k - \qquad (4.52)$$
$$-\left[k\,\frac{Q_1''(z)}{2!} + Q_0'(z)\right](z-\xi)^{k+1}.$$

Чтобы иметь возможность сравнивать коэффициенты при одинаковых степенях $(z-\xi)$ в (4.49) и (4.52), необходимо в (4.49) положить $\alpha = k+1$. Тогда

$$L_z\{K(z,\xi)\} = f_0(z)(z-\xi)^{k+1} +$$
$$(4.53)$$
$$+ f_1(z)(k+1)(z-\xi)^k + f_2(z)(k+1)\,k\,(z-\xi)^{k-1}.$$

Сравнивая теперь коэффициенты при одинаковых степенях $(z-\xi)$ в (4.50) и (4.53), находим:

$$f_0(z) = -\left|k\,\frac{Q_1''(z)}{2!} + Q_0'(z)\right|$$

$$f_1(z) = \frac{1}{k+1}\,[kQ_1'(z) + Q_0(z)];\ f_2(z) = -\frac{1}{k+1}\,Q_1(z).$$

Следовательно, уравнение:

$$Q_1(z)\,\frac{d^2w}{dz^2} - [kQ_1'(z) + Q_0(z)]\,\frac{dw}{dz} +$$
$$(4.51)$$
$$+\left|k(k+1)\,\frac{Q_1''(z)}{2!} + (k+1)\,Q_1'(z)\right|w = 0$$

имеет решение в интегральной форме:

$$w(z) = \int\limits_{(c)} (z-\xi)^{\kappa+1} \varphi(\xi)\, d\xi, \qquad (4.52)$$

где

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{Q_1(\xi)}\, e^{-\int \frac{Q_0(\xi)}{Q_1(\xi)} d\xi} \qquad (4.53)$$

и (c) определяется из условия:

$$\int\limits_{(c)} \frac{d}{d\xi} \left| (z-\xi)^k \varepsilon \exp \int \frac{Q_0(\xi)}{Q_1(\xi)}\, d\xi \right] d\xi = 0. \qquad (4.54)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Камке. „Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям". И. Л., 1950.
2. Г. Гогейзель. „Обыкновенные дифференциальные уравнения" ОНТИ, 1937.
3. Э. Л. Айнс. „Обыкновенные дифференциальные уравнения". Харьков, 1939.
4. В. И. Смирнов. „Курс высшей математики", т. III, ч. II, 1949.
5. Mellin. „Acta Sos. Sc. Tenn." 21(1896), 6, 39.
6. Iordan. „Caurs, d'analyse de l'ecole politechnique" t. III., 1887. Paris.
7. Poch hammer „Math Annalen" 35 (1890) и 37 (1890).
8. Ватсон. „Теория Бесселевых функций", т. 1, 1949.
9. Уиттекер и Ватсон. „Курс современного анализа", т. II, 1934.
10. Р. О. Кузьмин „Бесселевы функции", 1935.
11. E. Goursat. „Sur une classe des fonction representées par des integrals definies" Acta Mathematica 2:1 p. 1—70, 1883.
12. П. А. Некрасов. „Линейные дифференциальные уравнения, интегрируемые посредством определенных интегралов", Москва, 1890.
13. В. В. Голубев. „Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений", ГТТИ. Москва, 1950, изд. 2.