$$
- \operatorname{arctg} \frac{T_2 + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \Bigg] + \frac{C_1}{2} \ln \frac{T_2^2 + p'T_2 + q'}{T_1^2 + p'T_1 + q'} +
$$

$$
+ \frac{\left(D_1 - C_1 \frac{p'}{2}\right)}{\sqrt{q' - \frac{p'^2}{4}}} \left[\operatorname{arctg} \frac{T_2 + \frac{p'}{2}}{\sqrt{q' - \frac{p'^2}{4}}} - \operatorname{arctg} \frac{T_1 + \frac{p'}{2}}{\sqrt{q' - \frac{p'^2}{4}}} \right] \Bigg\}, \qquad (7)
$$

где A_1, B_1, C_1, D_1 находятся тоже методом неопределенных коэффициентов.

Два корня действительных, два — комплексных.

Как и в предыдущих случаях, постоянные A_2, B_2, C_2 и D_2 находятся методом неопределенных коэффициентов. Этот случай — синтез двух предыдущих.

Решение имеет вид

$$
\tau = - \frac{Gc_1}{CF} \left[A_2 \ln \frac{T_2 - \alpha_1}{T_1 - \alpha_1} + B_2 \ln \frac{T_2 - \alpha_2}{T_1 - \alpha_2} + \frac{C_2}{2} \ln \frac{T_2^2 + pT_2 + q}{T_1^2 + pT_1 + q} - \right.
$$

$$
\left. - \frac{\left(\frac{C_2 p}{2} - D_2\right)}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \left(\operatorname{arctg} \frac{T_2 + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} - \operatorname{arctg} \frac{T_1 + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \right) \right]. \qquad (8)
$$

Экспериментальной проверкой установлено, что использование полученных решений возможно для пьезотермопластиков толщиной не более 3 *мм*.

Литература

1. М. А. Михеев. Основы теплопередачи. М.—Л., Госэнергоиздат, 1956.

В. М. СОБОЛЕВСКИЙ

УПРУГОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ И ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

Постановка задачи и основные уравнения

Упругое напряженное состояние круговой цилиндрической трубы под действием температурного поля $t = t(\rho, z)$ исследовано по методу Б. Г. Галеркина, Г. Н. Маслова [1].

В настоящей работе рассматривается упругое напряженное состояние круговой цилиндрической трубы длиной $2H$. Поперечное сечение ее ограничено двумя концентрическими окружностями радиусов r и R. Труба находится под действием давления p с внутренней стороны и с внешней — давления упругой среды Гука, в которую она помещена (с упругими постоянными E' — модулем Юнга и μ — коэффициентом Пуассона), а также влияния температурного поля $t = t(\rho, z, \tau)$ (рис. 1).

Так как по условию внутреннее и внешнее давления, температура и осевая сила не зависят от θ, то компоненты касательных напряжений $\tau_{\rho\theta}$, $\tau_{\theta z}$ и компонент тангенциального смещения v обращаются в нуль, т. е.

$$\tau_{\rho\theta} = \tau_{\theta z} = v = 0.$$

Компоненты радиального σ_ρ, тангенциального σ_θ, осевого σ_z и и касательного $\tau_{\rho z}$ напряжений, компоненты радиального и осевого смещения u, w и компонент осевой деформации ε_z не зависят от θ и являются функциями от ρ и z. Следовательно, здесь симметричная относительно оси деформация круговой цилиндрической трубы.

Компоненты деформации, выраженные через компоненты напряжения (обобщенный закон Гука), имеют формы [2]:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_\rho &= \frac{1}{E}\left[(1+\mu)\sigma_\rho - 3\mu\sigma\right] + \alpha t;\\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}\left[(1+\mu)\sigma_\theta - 3\mu\sigma\right] + \alpha t;\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[(1+\mu)\sigma_z - 3\mu\sigma\right] + \alpha t;\\
\gamma_{\rho z} &= \frac{1+\mu}{E}\tau_{\rho z},
\end{aligned}\right| \qquad (1)$$

где $\sigma = \dfrac{\sigma_\rho + \sigma_\theta + \sigma_z}{3}$.

Те же уравнения, разрешенные относительно компонентов напряжений,

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon + \varepsilon_\rho\right) - \frac{E\alpha t}{1-2\mu};\\
\sigma_\theta &= \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon + \varepsilon_\theta\right) - \frac{E\alpha t}{1-2\mu};\\
\sigma_z &= \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon + \varepsilon_z\right) - \frac{E\alpha t}{1-2\mu};\\
\tau_{\rho z} &= \frac{E}{1+\mu}\gamma_{\rho z},
\end{aligned}\right| \qquad (2)$$

где $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_\rho + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z}{3}$.

Компоненты деформации связаны с компонентами смещения соотношениями Коши:

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad 2\gamma_{\rho z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho}. \tag{3}$$

Компоненты напряжения удовлетворяют известным уравнениям равновесия Коши (объемными силами пренебрегаем):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0; \\ &\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0. \end{aligned}\right| \tag{4}$$

Подставляя компоненты напряжения (2) в уравнения равновесия (4), получаем

$$\left.\begin{aligned} &3(1-\mu)\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + (1-2\mu)\frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} = (1+\mu)\alpha\frac{\partial t}{\partial \rho}; \\ &3(1-\mu)\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - (1-2\mu)\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\omega_\theta \rho)}{\partial \rho} = (1+\mu)\alpha\frac{\partial t}{\partial z}, \end{aligned}\right| \tag{5}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &3\varepsilon = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(u\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial z}; \\ &2\omega_\theta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial \rho}. \end{aligned}\right| \tag{6}$$

Решение задачи в общей форме

Следуя методу Г. Н. Маслова [1], найдем решение системы (5) в виде сумм:

$$\left.\begin{aligned} &u = u_1 + u_2; \\ &w = w_1 + w_2, \end{aligned}\right| \tag{7}$$

где u_1, w_1 — решения системы (5) без правой части, а u_2, w_2 — одно из возможных частных решений системы (5) с правой частью.

Тогда компоненты напряжений также могут быть представлены в виде сумм:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_\rho = \sigma_{\rho_1} + \sigma_{\rho_2}; \\ &\sigma_\theta = \sigma_{\theta_1} + \sigma_{\theta_2}; \\ &\sigma_z = \sigma_{z_1} + \sigma_{z_2}; \\ &\tau_{\rho z} = \tau_{\rho z_1} + \tau_{\rho z_2}, \end{aligned}\right| \tag{8}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{\rho_1} &= \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon_1 + \frac{\partial u}{\partial \rho}\right);\\
\sigma_{\theta_1} &= \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon_1 + \frac{u_1}{\rho}\right);\\
\sigma_{z_1} &= \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon_1 + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right);\\
\tau_{\rho z_1} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial w_1}{\partial \rho} + \frac{\partial u_2}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{\rho_2} &= \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon_2 + \frac{\partial u_2}{\partial \rho}\right) - \frac{E\alpha t}{1-2\mu};\\
\sigma_{\theta_2} &= \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon_2 + \frac{u_2}{\rho}\right) - \frac{E\alpha t}{1-2\mu};\\
\sigma_{z_2} &= \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon_2 + \frac{\partial w_2}{\partial z}\right) - \frac{E\alpha t}{1-2\mu};\\
\tau_{\rho z_2} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial w_2}{\partial \rho} + \frac{\partial u_2}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Для отыскания решений u_1, w_1 воспользуемся методом трех независимых функций Б. Г. Галеркина [3]. Положив в формулах [3] $f = 0$, получим:

для компонентов смещения

$$\left.\begin{aligned}
u_1 &= -\frac{1+\mu}{E}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho\,\partial z};\\
w_1 &= -\frac{1+\mu}{E}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 2(1-\mu)\nabla^2\varphi\right];
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

для компонентов напряжения

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{\rho_1} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2}\right);\\
\sigma_{\theta_1} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2\varphi - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right);\\
\sigma_{z_1} &= \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\mu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right];\\
\tau_{\rho z_1} &= \frac{\partial}{\partial \rho}\left[(1-\mu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right],
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

где $\varphi = \varphi(\rho, z)$ — бигармоническая функция, удовлетворяющая бигармоническому уравнению $\nabla^2\nabla^2\varphi = 0$, а символ ∇^2 — оператор Лапласа.

Следуя Г. Н. Маслову, допустим, что $\varphi_\Theta = 0$, тогда система (5)

$$3(1-\mu)\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\rho} = (1+\mu)\alpha\frac{\partial t}{\partial\rho}; \qquad 3(1-\mu)\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial z} = (1+\mu)\alpha\frac{\partial t}{\partial z}; \tag{5'}$$

отсюда $3\varepsilon_2 = \dfrac{1+\mu}{1-\mu}\alpha t,$ (13)

а система (6)

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(u_2\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha t; \qquad \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial\rho} = 0. \tag{14}$$

Подставив выражение (13) в формулы (10), получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho_2} &= \frac{E}{1+\mu}\frac{\partial u_2}{\partial\rho} - \frac{E\alpha t}{1-\mu};\\
\sigma_{\Theta_2} &= \frac{E}{1+\mu}\frac{u_2}{\rho} - \frac{E\alpha t}{1-\mu};\\
\sigma_{z_2} &= -\frac{E}{1+\mu}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\rho} + \frac{u_2}{\rho}\right);\\
\tau_{\rho z_2} &= \frac{E}{1+\mu}\frac{\partial u_2}{\partial z} = \frac{E}{1+\mu}\frac{\partial w_2}{\partial\rho}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Интегрирование системы (14) для общего случая температурной функции $t = t(\rho, z, \tau)$ составляет сложную математическую задачу. Поэтому мы ограничимся интегрированием ее лишь для стационарного теплового потока $t = t(\rho, z)$.

Второе уравнение (14) удовлетворяется, если положить

$$u_2 = Z(z)\frac{dP(\rho)}{d\rho}; \qquad w_2 = P(\rho)\frac{dZ(z)}{dz}, \tag{16}$$

где $P(\rho)$ — функция только одного ρ, а $Z(z)$ — функция только одного z.

Подстановка этих значений в первое уравнение (14) преобразует его к виду

$$Z(z)\left[\frac{d^2P(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dP(\rho)}{d\rho}\right] + P(\rho)\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha t. \tag{17}$$

Решение задачи для стационарного теплового потока

Температурная функция t удовлетворяет в цилиндрических координатах для осесимметричного стационарного теплового потока известному дифференциальному уравнению теплопроводности Фурье [2]

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial t}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \tag{18}$$

Общий интеграл этого уравнения

$$t = c_1 \ln \rho + c_2 + \Sigma \left[A_n I_0(\lambda_n \rho) + B_n K_0(\lambda_n \rho)\right] \cos(\lambda_n z), \tag{19}$$

где c_1, c_2, A_n, B_n и λ_n — произвольные постоянные интеграции, а I_0 и K_0 — функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка от мнимого аргумента.

Распределение напряжений и смещений, соответствующее первым двум членам выражения (19), нами исследовано в работе [2], поэтому здесь рассмотрим распределение напряжений и смещений, соответствующее функции

$$t = \Sigma \left[A_n I_0(\lambda_n \rho) + B_n K_0(\lambda_n \rho)\right] \cos(\lambda_n z). \tag{20}$$

Постоянные A_n и B_n определим из граничных условий

$$t\Big|_{\substack{\rho = r\\ z=0}} = t_1, \quad t\Big|_{\substack{\rho = R\\ z=0}} = t_2 \text{ и } t\Big|_{\substack{\rho = b\\ z=0}} = t_3;$$

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\left[A_n I_0(\lambda_n r) + B_n K_0(\lambda_n r)\right] &= t_1;\\ \Sigma\left[A_n I_0(\lambda_n R) + B_n K_0(\lambda_n R)\right] &= t_2;\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\left[A'_n I_0(\lambda_n R) + B'_n K_0(\lambda_n R)\right] &= t_2;\\ \Sigma\left[A'_n I_0(\lambda_n b) + B'_n K_0(\lambda_n b)\right] &= t_3.\end{aligned}\right|$$

Решая эти системы, найдем постоянные A_n, B_n и A'_n, B'_n:

$$\left.\begin{aligned}A_n &= \frac{t_1 K_0(\lambda_n R) - t_2 K_0(\lambda_n r)}{I_0(\lambda_n r) K_0(\lambda_n R) - I_0(\lambda_n R) K_0(\lambda_n r)};\\ B_n &= \frac{t_2 I_0(\lambda_n r) - t_1 I_0(\lambda_n R)}{I_0(\lambda_n r) K_0(\lambda_n R) - I_0(\lambda_n R) K_0(\lambda_n r)};\\ A'_n &= \frac{t_2 K_0(\lambda_n b) - t_3 K_0(\lambda_n R)}{I_0(\lambda_n R) K_0(\lambda_n b) - I_0(\lambda_n b) K_0(\lambda_n R)};\\ B'_n &= \frac{t_3 I_0(\lambda R) - t_2 I_0(\lambda_n b)}{I_0(\lambda_n R) K_0(\lambda_n b) - I_0(\lambda_n b) K_0(\lambda_n R)},\end{aligned}\right| \tag{21}$$

где

$I_0(\lambda_n r)K_0(\lambda_n R) - I_0(\lambda_n R)K_0(\lambda_n r) \neq 0$ и $I_0(\lambda_n R)K_0(\lambda_n b) - I_0(\lambda_n b)K_0(\lambda_n R) \neq 0$.

Из выражения (20) и первого уравнения (16) находим, что функция $Z(z)$ равна

$$Z(z) = \cos(\lambda_n z). \tag{22}$$

Подстановка равенства (22) в уравнение (17) преобразует его в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 P(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dP(\rho)}{d\rho} - \lambda_n^2 P(\rho) = \frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\left[A_n I_0(\lambda_n\rho) + B_n K_0(\lambda_n\rho)\right].$$

Этому уравнению удовлетворяет функция

$$P(\rho) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\mu}{1-\mu}\cdot\frac{1}{\lambda_n}\alpha\rho\left[A_n I_1(\lambda_n\rho) - B_n K_1(\lambda_n\rho)\right]. \tag{23}$$

Подставляя равенства (22) и (23) в формулы (16), найдем

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\rho\,\Sigma\left[A_n I_0(\lambda_n\rho) + B_n K_0(\lambda_n\rho)\right]\cos(\lambda_n z);\\ w_2 &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\rho\,\Sigma\left[A_n I_1(\lambda_n\rho) - B_n K_1(\lambda_n\rho)\right]\sin(\lambda_n z). \end{aligned}\right| \tag{24}$$

Подстановка уравнения (24) в выражение (15) дает

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\rho_2} &= -\frac{\alpha E}{2(1-\mu)}\Sigma\{A_n[I_0(\lambda_n\rho) - \lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho)] +\\ &\quad + B_n[K_0(\lambda_n\rho) + \lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho)]\}\cos(\lambda_n z);\\ \sigma_{\theta_2} &= -\frac{\alpha E}{2(1-\mu)}\Sigma\left[A_n I_0(\lambda_n\rho) + B_n K_0(\lambda_n\rho)\right]\cos(\lambda_n z);\\ \sigma_{z_2} &= -\frac{\alpha E}{2(1-\mu)}\Sigma\{A_n[2I_0(\lambda_n\rho) + \lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho)] +\\ &\quad + B_n[2K_0(\lambda_n\rho) - \lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho)]\}\cos(\lambda_n z);\\ \tau_{\rho z_2} &= -\frac{\alpha E}{2(1-\mu)}\rho\Sigma\{\lambda_n[A_n I_0(\lambda_n\rho) + B_n K_0(\lambda_n\rho)]\sin(\lambda_n z)\}. \end{aligned}\right| \tag{25}$$

Для нахождения общих решений системы (5) без правой части возьмем функцию напряжений (бигармоническую финкцию) [1]

$$\varphi = \Sigma\{[C_n I_0(\lambda_n\rho) + D_n K_0(\lambda_n\rho)] + \lambda_n\rho[M_n I_1(\lambda_n\rho) + N_n K_1(\lambda_n\rho)]\}\sin(\lambda_n z). \tag{26}$$

Подставляя функцию напряжений (26) в формулы Б. Г. Галеркина (11) и (12), найдем

$$
\begin{aligned}
u_1 = &-\frac{1+\mu}{E}\Sigma\{[C_n I_1(\lambda_n\rho) - D_n K_1(\lambda_n\rho)] + \\
&+ \lambda_n\rho[M_n I_0(\lambda_n\rho) - N_n K_0(\lambda_n\rho)]\}\lambda_n^2 \cos(\lambda_n z); \\
w_1 = &\frac{1+\mu}{E}\Sigma\{[C_n I_0(\lambda_n\rho) + D_n K_0(\lambda_n\rho)] + \\
&+ M_n[\lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho) + 4(1-\mu)I_0(\lambda_n\rho)] + \\
&+ N_n[\lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho) - 4(1-\mu)(K_0(\lambda_n\rho)]\}\lambda_n^2 \sin(\lambda_n z);
\end{aligned}
\tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\rho_1} = &-\Sigma\left\{C_n\left[I_n(\lambda_n\rho) - \frac{1}{\lambda_n\rho} I_1(\lambda_n\rho)\right] + D_n\left[K_0(\lambda_n\rho) + \frac{1}{\lambda_n\rho}K_1(\lambda_n\rho)\right] + \right.\\
&+ M_n[(1-2\mu)I_0(\lambda_n\rho) + \lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho)] + N_n[-(1-2\mu)K_0(\lambda_n\rho) + \\
&\left. + \lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho)]\right\}\lambda_n^3 \cos(\lambda_n z); \\
\sigma_{\theta_1} = &-\Sigma\left\{\frac{1}{\lambda_n\rho}[C_n I_1(\lambda_n\rho) - D_n K_1(\lambda_n\rho)] + (1-2\mu)[M_n I_0(\lambda_n\rho) - \right.\\
&\left. - N_n K_0(\lambda_n\rho)]\right\}\lambda_n^3 \cos(\lambda_n z); \\
\sigma_{z_1} = &\Sigma\{[C_n I_0(\lambda_n\rho) + D_n K_0(\lambda_n\rho)] + M_n[2(2-\mu)I_0(\lambda_n\rho) + \\
&+ \lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho)] - N_n[2(2-\mu)K_0(\lambda_n\rho) - \lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho)]\}\lambda_n^3 \cos(\lambda_n z); \\
\tau_{\rho z_1} = &\Sigma\{[C_n I_1(\lambda_n\rho) - D_n K_1(\lambda_n\rho)] + M_n[2(1-\mu)I_1(\lambda_n\rho) + \\
&+ \lambda_n\rho I_0(\lambda_n\rho)] + N_n[2(1-\mu)K_1(\lambda_n\rho) - \lambda_n\rho K_0(\lambda_n\rho)]\}\lambda_n^3 \sin(\lambda_n z).
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Подставляя выражения (27), (24) и (28), (25) в формулы (7) и (8), определим распределение смещений и напряжений в точках $r \leqslant \rho \leqslant R, -H \leqslant z \leqslant H$ трубы:

$$
\begin{aligned}
u = &\Sigma\left\{-\frac{1+\mu}{E}[C_n I_1(\lambda_n\rho) - D_n K_1(\lambda_n\rho) + \lambda_n\rho(M_n I_0(\lambda_n\rho) - \right.\\
&\left. - N_n K_0(\lambda_n\rho))]\lambda_n^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\rho(A_n I_0(\lambda_n\rho) + B_n K_0(\lambda_n\rho))\right\}\cos(\lambda_n z); \\
w = &\Sigma\left\{\frac{1+\mu}{E}[C_n I_0(\lambda_n\rho) + D_n K_0(\lambda_n\rho) + M_n(\lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho) + \right.\\
&+ 4(1-\mu)I_0(\lambda_n\rho)) + N_n(\lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho) - 4(1-\mu)K_0(\lambda_n\rho))]\lambda_n^2 - \\
&\left. - \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\rho(A_n I_1(\lambda_n\rho) - B_n K_1(\lambda_n\rho))\right\}\sin(\lambda_n z);
\end{aligned}
\tag{29}
$$

$$\sigma_\rho = -\Sigma\Big\{\Big[C_n\Big(I_0(\lambda_n\rho) - \frac{1}{\lambda_n\rho}I_1(\lambda_n\rho)\Big) + D_n\Big(K_0(\lambda_n\rho) + \frac{1}{\lambda_n\rho}K_1(\lambda_n\rho)\Big) + M_n((1-2\mu)I_0(\lambda_n\rho) + \lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho)) + N_n(-(1-2\mu)K_0(\lambda_n\rho) + \lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho))\Big]\lambda_n^2 + \frac{\alpha E}{2(1-\mu)}[A_n(I_0(\lambda_n\rho) - \lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho)) + B_n(K_0(\lambda_n\rho) + \lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho))]\Big\}\cos(\lambda_n z);$$

$$\sigma_\theta = -\Sigma\Big\{\Big[\frac{1}{\lambda_n\rho}\Big(C_nI_1(\lambda_n\rho) - D_nK_1(\lambda_n\rho)\Big) + (1-2\mu)(M_nI_0(\lambda_n\rho) - N_nK_0(\lambda_n\rho))\Big]\lambda_n^2 + \frac{\alpha E}{2(1-\mu)}(A_nI_0(\lambda_n\rho) + B_nK_0(\lambda_n\rho))\Big\}\cos(\lambda_n z);$$

$$\sigma_z = -\Sigma\Big\{-[C_nI_0(\lambda_n\rho) + D_nK_0(\lambda_n\rho) + M_n(2(2-\mu)I_0(\lambda_n\rho) + \lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho)) - N_n(2(2-\mu)K_0(\lambda_n\rho) - \lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho))]\lambda_n^2 + \frac{\alpha E}{2(1-\mu)}\Big[A_n(2I_0(\lambda_n\rho) + \lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho)) + B_n\Big(2K_0(\lambda_n\rho) - \lambda_n\rho K_2(\lambda_n\rho)\Big)\Big]\Big\}\cos(\lambda_n z); \qquad (30)$$

$$\tau_{\rho z} = \Sigma\Big\{\Big[C_nI_1(\lambda_n\rho) - D_nK_1(\lambda_n\rho) + M_n(2(1-\mu)I_1(\lambda_n\rho) + \lambda_n\rho I_0(\lambda_n\rho)\Big) + N_n\Big(2(1-\mu)K_1(\lambda_n\rho) - \lambda_n\rho K_0(\lambda_n\rho)\Big)\Big]\lambda_n^2 - \frac{\alpha E}{2(1-\mu)}\rho\lambda_n\Big(A_nI_0(\lambda_n\rho) + B_nK_0(\lambda_n\rho)\Big)\Big\}\sin(\lambda_n z).$$

Распределение смещений и напряжений в точках $R \leqslant \rho < \infty$, $-H \leqslant z \leqslant H$ упругой среды Гука определяется по формулам:

$$u' = \Sigma\Big\{-\frac{1+\mu'}{E'}\Big[C'_nI_1(\lambda_n\rho) - D'_nK_1(\lambda_n\rho) + \lambda_n\rho(M'_nI_0(\lambda_n\rho) - N'_nK_0(\lambda_n\rho))\Big]\lambda_n^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\mu'}{1-\mu'}\alpha'\rho\,(A'_nI_0(\lambda_n\rho) + B'_nK_0(\lambda_n\rho))\Big\}\cos(\lambda_n z);$$

$$w' = \Sigma\Big\{\frac{1+\mu'}{E'}\Big[C'_nI_0(\lambda_n\rho) + D'_nK_0(\lambda_n\rho) + M'_n(\lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho) + 4(1-\mu')I_0(\lambda_n\rho)) + N'_n(\lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho) - 4(1-\mu')K_0(\lambda_n\rho))\Big]\lambda_n^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\mu'}{1-\mu'}\alpha'\rho(A'_nI_1(\lambda_n\rho) - B'_nK_1(\lambda_n\rho))\Big\}\sin(\lambda_n z); \qquad (31)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma'_\rho = &-\Sigma\Big\{\Big[C'_n\Big(I_0(\lambda_n\rho)-\frac{1}{\lambda_n\rho}I_1(\lambda_n\rho)\Big)+D'_n\Big(K_0(\lambda_n\rho)+\\
&+\frac{1}{\lambda_n\rho}K_1(\lambda_n\rho)\Big)+M'_n\Big((1-2\mu')I_0(\lambda_n\rho)+\lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho)\Big)+\\
&+N'_n\Big(-(1-2\mu')K_0(\lambda_n\rho)+\lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho)\Big)\Big]\lambda_n^3+\\
&+\frac{\alpha'E'}{2(1-\mu')}\Big[A'_n\Big(I_0(\lambda_n\rho)-\lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho)\Big)+\\
&+B'_n\Big(K_0(\lambda_n\rho)+\lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho)\Big)\Big]\Big\}\cos(\lambda_n z);\\
\sigma'_\theta = &-\Sigma\Big\{\Big[\frac{1}{\lambda_n\rho}\Big(C'_nI_1(\lambda_n\rho)-D'_nK_1(\lambda_n\rho)\Big)+(1-2\mu')\Big(M'_nI_0(\lambda_n\rho)-\\
&-N'_nK_0(\lambda_n\rho)\Big)\Big]\lambda_n^3+\frac{\alpha'E'}{2(1-\mu')}\Big(A'_nI_0(\lambda_n\rho)+B'_nK_0(\lambda_n\rho)\Big)\Big\}\cos(\lambda_n z);\\
\sigma'_z = &-\Sigma\Big\{-\Big[C'_nI_0(\lambda_n\rho)+D'_nK_0(\lambda_n\rho)+M'_n\Big(2(2-\mu')I_0(\lambda_n\rho)+\\
&+\lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho)\Big)-N'_n\Big(2(2-\mu')K_0(\lambda_n\rho)-\lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho)\Big)\Big]\lambda_n^3+\\
&+\frac{\alpha'E'}{2(1-\mu')}\Big[A'_n\Big(2I_0(\lambda_n\rho)+\lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho)\Big)+B'_n\Big(2K_0(\lambda_n\rho)-\\
&-\lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho)\Big)\Big]\Big\}\cos(\lambda_n z);\\
\tau'_{\rho z} = &\ \Sigma\Big\{\Big[C'_nI_1(\lambda_n\rho)-D'_nK_1(\lambda_n\rho)+M'_n\Big(2(1-\mu')I_1(\lambda_n\rho)+\\
&+\lambda_n\rho I_0(\lambda_n\rho)\Big)+N'_n\Big(2(1-\mu')K_1(\lambda_n\rho)-\lambda_n\rho K_0(\lambda_n\rho)\Big)\Big]\lambda_n^3-\\
&-\frac{\alpha'E'}{2(1-\mu')}\rho\lambda_n\Big(A'_nI_0(\lambda_n\rho)+B'_nK_0(\lambda_n\rho)\Big)\Big\}\sin(\lambda_n z),
\end{aligned}
\right| \qquad (32)
$$

где индекс $'$ стоит при обозначении величин, относящихся к упругой среде Гука.

Для нахождения постоянных C_n, D_n, M_n, N_n, C'_n, D'_n, M'_n, N'_n введем выражения (30), (29), (31) в граничные условия

$$
\begin{gathered}
\sigma_\rho\Big|_{\rho=r}=-p(z),\quad \sigma_\rho\Big|_{\rho=R}=\sigma'_\rho\Big|_{\rho=R},\quad \sigma_\theta\Big|_{\rho=R}=\sigma'_\theta\Big|_{\rho=R},\quad \tau_{\rho z}\Big|_{\rho=R}=\tau'_{\rho z}\Big|_{\rho=R},\\
u\Big|_{\rho=R}=u'\Big|_{\rho=R},\quad \sigma'_\rho\Big|_{\rho=\infty}=0,\quad \sigma'_\theta\Big|_{\rho=\infty}=0,\quad \tau'_{\rho z}\Big|_{\rho=\infty}=0.
\end{gathered}
\qquad (33)
$$

и, принимая во внимание асимптотические представления функций Бесселя [4]

$$I_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right) + 0\left(x^{-1}\right)\right],$$

$$K_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}\left[1 + 0(x^{-1})\right],$$

получим систему

$$\left[I_0(\lambda_n r) - \frac{1}{\lambda_n r} I_1(\lambda_n r)\right]C_n + \left[K_0(\lambda_n r) + \frac{1}{\lambda_n r} K_1(\lambda_n r)\right]D_n +$$

$$+ [(1-2\mu')I_0(\lambda_n r) + \lambda_n r I_1(\lambda_n r)]\, M_n + [-(1-2\mu)K_0(\lambda_n r) + \lambda_n r K_1(\lambda_n r)]\, N_n =$$

$$= \frac{a_n}{\lambda_n^2} - \frac{\alpha E}{2(1-\mu)} \cdot \frac{1}{\lambda_n^2}\{A_n[I_0(\lambda_n r) - \lambda_n r I_1(\lambda_n r)] +$$

$$+ B_n[K_0(\lambda_n r) + \lambda_n r K_1(\lambda_n r)]\};$$

$$\left[I_0(\lambda_n R) - \frac{1}{\lambda_n R} I_1(\lambda_n R)\right]C_n + \left[K_0(\lambda_n R) + \frac{1}{\lambda_n R} K_1(\lambda_n R)\right]D_n +$$

$$+ [(1-2\mu)I_0(\lambda_n R) + \lambda_n R I_1(\lambda_n R)]\, M_n + [-(1-2\mu)K_0(\lambda_n R) +$$

$$+ \lambda_n R K_1(\lambda_n R)]\, N_n - \left[I_0(\lambda_n R) - \frac{1}{\lambda_n R} I_1(\lambda_n R)\right]C_n' -$$

$$- \left[K_0(\lambda_n R) + \frac{1}{\lambda_n R} K_1(\lambda_n R)\right]D_n' - [(1-2\mu)I_0(\lambda_n R) + \lambda_n R I_1(\lambda_n R)]\, M_n' -$$

$$- [-(1-2\mu)\, K_0(\lambda_n R) + \lambda_n R K_1(\lambda_n R)]\, N_n' =$$

$$= -\frac{\alpha E}{2(1-\mu)} \cdot \frac{1}{\lambda_n^2}\{A_n[I_0(\lambda_n R) - \lambda_n R I_1(\lambda_n R)] + B_n[K_0(\lambda_n R) + \lambda_n R K_1(\lambda_n R)]\} +$$

$$+ \frac{\alpha' E'}{2(1-\mu')} \cdot \frac{1}{\lambda_n^2}\{A_n'[I_0(\lambda_n R) - \lambda_n R I_1(\lambda_n R)] + B_n'[K_0(\lambda_n R) + \lambda_n R K_1(\lambda_n R)]\};$$

$$\frac{I_1(\lambda_n R)}{\lambda_n R} C_n - \frac{K_1(\lambda_n R)}{\lambda_n R} D_n + (1-2\mu)I_0(\lambda_n R)M_n - (1-2\mu)K_0(\lambda_n R)N_n -$$

$$- \frac{I_1(\lambda_n R)}{\lambda_n R} C_n' + \frac{K_1(\lambda_n R)}{\lambda_n R} D_n' - (1-2\mu')I_0(\lambda_n R)M_n' + (1-2\mu')K_0(\lambda_n R)N_n =$$

$$= -\frac{\alpha E}{2(1-\mu)} \cdot \frac{1}{\lambda_n^2}\left[A_n I_0(\lambda_n R) + B_n K_0(\lambda_n R)\right] +$$

$$+ \frac{\alpha' E'}{2(1-\mu')} \cdot \frac{1}{\lambda_n^2}[A_n' I_0(\lambda_n R) + B_n' K_0(\lambda_n R)];$$

$$I_0(\lambda_n R)C_n - K_1(\lambda_n R)D_n + [2(1-\mu)I_1(\lambda_n R) + \lambda_n R I_0(\lambda_n R)]M_n +$$
$$+ [2(1-\mu)K_1(\lambda_n R) - \lambda_n R K_0(\lambda_n R)]N_n - I_0(\lambda_n R)C'_n - K_1(\lambda_n R)D'_n -$$
$$- [2(1-\mu')I_1(\lambda_n R) + \lambda_n R I_0(\lambda_n R)]M'_n - [2(1-\mu')K_1(\lambda_n R) -$$
$$- \lambda_n R K_0(\lambda_n R)]N'_n = \frac{\alpha E}{2(1-\mu)} \cdot \frac{1}{\lambda_n^2} R[A_n I_0(\lambda_n R) + B_n K_0(\lambda_n R) -$$
$$- \frac{\alpha' E'}{2(1-\mu')} \cdot \frac{1}{\lambda_n^2} \cdot R\,[A'_n I_0(\lambda_n R) + B'_n K_0(\lambda_n R)];$$

$$\frac{1+\mu}{E}[I_1(\lambda_n R)C_n - K_1(\lambda_n R)D_n + \lambda_n R I_0(\lambda_n R)M_n - \lambda_n R K_0(\lambda_n R)N'_n] -$$
$$- \frac{1+\mu'}{E'}[I_1(\lambda_n R)C'_n - K_1(\lambda_n R)D'_n + \lambda_n R I_0(\lambda_n R)M'_n - \lambda_n R K_0(\lambda_n R)N'_n] =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \frac{1}{\lambda^2_n} \alpha R[A_n I_0(\lambda_n R) + B_n K_0(\lambda_n R)] -$$
$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\mu'}{1-\mu'} \cdot \frac{1}{\lambda_n^2} \alpha' R[A'_n I_0(\lambda_n R) + B'_n K_0(\lambda_n R)];$$

$$C'_n + (1-2\mu')M'_n = -\frac{\alpha' E'}{2(1-\mu')} \cdot \frac{A'_n}{\lambda_n^2}; \quad M'_n = -\frac{\alpha' E'}{2(1-\mu')(1-2\mu')} \cdot \frac{A'_n}{\lambda_n^2};$$

$$I_1(\lambda_n r)C_n - K_1(\lambda_n r)D_n + [2(1-\mu)I_1(\lambda_n r) + \lambda_n r I_0(\lambda_n r)]M_n +$$
$$+ [2(1-\mu)K_1(\lambda_n r) - \lambda_n r K_0(\lambda_n r)]N_n =$$
$$= -\frac{b_n}{\lambda_n^2} + \frac{\alpha E}{2(1-\mu)} \cdot \frac{1}{\lambda^2} r[A_n I_0(\lambda_n r) + B_n K_0(\lambda_n r)], \qquad (34)$$

где постоянное a_n определяется по формуле Фурье [4]

$$a_n = \frac{2}{H}\int_0^H p(z)\cos(\lambda_n z)dz.$$

Решая систему (34), найдем постоянные C_n, D_n, M_n, N_n, C'_n, D'_n, M'_n, N'_n.

Что касается постоянной λ_n, то для ее нахождения рассмотрим два случая.

Пусть на торцах трубы осевое напряжения σ_z отлично от нуля, а осевое перемещение w обращается в нуль, т. е.

$$\sigma_z\Big|_{z=H} \neq 0, \quad w\Big|_{z=H} = 0.$$

Тогда, внося сюда значения σ_z по второй формуле (30), найдем

$$\Sigma \left\{ \frac{1+\mu}{E} [C_n I_0(\lambda_n \rho) + D_n K_0(\lambda_n \rho) + M_n(\lambda_n \rho I_1(\lambda_n \rho) + 4(1-\mu) I_0(\lambda_n \rho)) + \right.$$

$$+ N_n(\lambda_n \rho K_1(\lambda_n \rho) - 4(1-\mu) K_0(\lambda_n \rho))] \lambda_n^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha \rho (A_n I_1(\lambda_n \rho) -$$

$$\left. - B_n K_1(\lambda_n \rho)) \right\} \sin(\lambda_n H) = 0.$$

Откуда

$$\sin(\lambda_n H) = 0,$$

что дает

$$\lambda_n = \frac{m\pi}{H}. \tag{35}$$

Пусть теперь на торцах трубы осевое напряжение σ_z обращается в нуль, а осевое перемещение w отлично от нуля, т. е.

$$\sigma_z \Big|_{z=H} = 0, \quad w \Big|_{z=H} \neq 0.$$

Тогда, внося сюда значение σ_z по третьей формуле (30), найдем

$$-\Sigma \{ -[C_n I_0(\lambda_n \rho) + D_n K_0(\lambda_n \rho) + M_n(2(2-\mu) I_0(\lambda_n \rho) + \lambda_n \rho I_1(\lambda_n \rho)) -$$

$$- N_n(2(2-\mu) K_0(\lambda_n \rho) - \lambda_n \rho K_1(\lambda_n \rho))] \lambda_n + \frac{\alpha E}{2(1-\mu)} [A_n(2 I_0(\lambda_n \rho) +$$

$$+ \lambda_n \rho I_1(\lambda_n \rho)) + B_n(2 K_0(\lambda_n \rho) - \lambda_n \rho K_1(\lambda_n \rho))] \} \cos(\lambda_n H) = 0.$$

Откуда

$$\cos(\lambda_n H) = 0,$$

что дает

$$\lambda_n = \frac{(2m-1)\pi}{2H}. \tag{36}$$

Литература

1. Г. Н. Маслов. Задачи теории упругости о термоупругом равновесии. Известия Научно-исследовательского института гидротехники, т. 23, 1938.
2. В. М. Соболевский. Упругое и упруго-пластическое напряженное состояние круговой цилиндрической трубы в упругой среде под действием внутреннего давления, осевой силы и радиального теплового потока. В кн.: «Уч. зап. БГИНХ им. В. В. Куйбышева», вып. 3. Минск, 1957.
3. Б. Г. Галеркин. Определение напряжений и перемещений в упругом изотропном теле при помощи трех функций. Собр. соч., т. 1, 1952.
4. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 3, ч. 2. М.—Л., 1949.