З. Ф. СЛЕЗЕНКО

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ПРОГРЕВА ПЬЕЗОТЕРМОПЛАСТИКОВ

В настоящее время процесс получения пьезотермопластиков без связующих основан на том, что предварительно подготовленные опилки (с заданной влажностью) сначала подпрессовываются в матрице, а затем подвергаются одновременному действию давления и прогрева. Основным условием, определяющим физико-механические свойства пьезотермопластика, является кинетика прогрева. При прогреве под давлением происходят сложные физико-химические превращения, которые и определяют свойства пьезотермопластика.

Не вдаваясь в кинетику физико-химических процессов, составляющих предмет отдельного исследования, рассмотрим процесс теплообмена в находящемся под давлением пьезотермопластике.

Как известно [1], трудность решения подобной задачи обусловлена сложностью характера теплообмена и формой изделия. Однако в целом ряде случаев изделия имеют правильную геометрическую форму (пластины, круги, бруски и т. п.) и столь небольшие перепады температур по толщине нагрева, что ими можно пренебречь при анализе процесса прогрева.

Рассмотрим случай, когда температура нагревателя остается постоянной во все время нагрева. Ради простоты примем бесконечную пластину толщиной l. Процесс теплопередачи от нагревателя к поверхности изделия, имеющего температуру t°C, нами будет рассматриваться как явление суммарной передачи тепла: 1) от излучателя, нагретого до $t_{изл}$°C, по закону Стефана — Больцмана; 2) от нагретого газа, имеющего температуру $t_в$°C, по закону Ньютона и 3) от подставки, на которую опирается изделие, имеющей температуру t_λ°C, по закону Фурье. Соответствующие абсолютные температуры обозначим T, $T_{изл}$, $T_в$ и T_λ. Явлением передачи тепла от изделия к нагревателю пренебрегаем.

Таким образом, количество тепла, получаемое изделием в течение элемента времени $d\tau$, равно

$$dQ = FC\left[\left(\frac{T_{изл}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T}{100}\right)^4\right]d\tau + \alpha F(T_в - T)d\tau + \lambda F(T_\lambda - T)d\tau, \quad (1)$$

где C — коэффициент излучения;

α — коэффициент теплоотдачи;

λ — коэффициент теплопроводности;

τ — продолжительность нагрева;

F — тепловоспринимающая поверхность изделия;

Q — количество тепла, идущее на повышение температуры dT изделия.

$$dQ = Gc_1 dT, \quad (2)$$

где G — вес изделия;

c_1 — средняя теплоемкость изделия в интервале температур от t_1 С до t_2°С.

Приравнивая выражения (1) и (2), получаем дифференциальное уравнение нагрева

$$FC\left[\left(\frac{T_{изл}}{100}\right)^4-\left(\frac{T}{100}\right)^4\right]d\tau+\alpha F(T_в-T)d\tau+\lambda F(T_\lambda-T)d\tau=Gc_1dT. \tag{3}$$

Приведем уравнение (3) к более удобному виду

$$d\tau=-\frac{100^4}{C}\,\frac{Gc_1}{F}\,\frac{dT}{T^4+MT-N}, \tag{4}$$

где $M=(\alpha+\lambda)\,\dfrac{100^4}{C}$;

$$N=\frac{CT_{изл}+\alpha T_в\,100^4+\lambda T_\lambda\,100^4}{C}.$$

Будем считать, что коэффициент излучения С и теплоемкость изделия c_1 в течение нагрева постоянные. Тогда, интегрируя это уравнение в пределах для τ от 0 до τ и для T от 0 до T, получаем

$$\tau=\frac{100^4\,Gc_1}{CF}\int\limits_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T^4+MT-N}. \tag{5}$$

При интегрировании уравнения (5) будем иметь три случая, когда корни знаменателя подынтегрального выражения будут: все действительные, все комплексные и два комплексных и два действительных.

Рассмотрим решение уравнения (5) для каждого отдельного случая.

Все корни знаменателя действительные и простые.

$$\tau=-\frac{Gc_1}{CF}\int\limits_{T_1}^{T_2}\left(\frac{E}{T-\alpha_1}+\frac{R}{T-\alpha_2}+\frac{H}{T-\alpha_3}+\frac{P}{T-\alpha_4}\right)dT,$$

где E, R, H, P находим методом неопределенных коэффициентов.

Произведя интегрирование, получим

$$\tau=-\frac{Gc_1}{CF}\ln\left[\left(\frac{T_2-\alpha_1}{T_1-\alpha_1}\right)^E\left(\frac{T_2-\alpha_2}{T_1-\alpha_2}\right)^R\left(\frac{T_2-\alpha_3}{T_1-\alpha_3}\right)^H\left(\frac{T_2-\alpha_4}{T_1-\alpha_4}\right)^P\right]. \tag{6}$$

Все корни комплексные.

Интегрируя и упрощая полученное выражение, найдем

$$\tau=-\frac{Gc_1}{CF}\left|\frac{A_1}{2}\ln\frac{T_2^2+pT_2+q}{T_1^2+pT_1+q}+\frac{\left(B_1-A_1\dfrac{p_1}{2}\right)}{\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}}\left[\operatorname{arctg}\frac{T_2+\dfrac{p}{2}}{\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}}-\right.\right.$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{T_2+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\Bigg|+\frac{C_1}{2}\ln\frac{T_2^2+p'T_2+q'}{T_1^2+p'T_1+q'}+$$

$$+\frac{\left(D_1-C_1\frac{p'}{2}\right)}{\sqrt{q'-\frac{p'^2}{4}}}\left[\operatorname{arctg}\frac{T_2+\frac{p'}{2}}{\sqrt{q'-\frac{p'^2}{4}}}-\operatorname{arctg}\frac{T_1+\frac{p'}{2}}{\sqrt{q'-\frac{p'^2}{4}}}\right]\Bigg|, \qquad (7)$$

где A_1, B_1, C_1, D_1 находятся тоже методом неопределенных коэффициентов.

Два корня действительных, два — комплексных.

Как и в предыдущих случаях, постоянные A_2, B_2, C_2 и D_2 находятся методом неопределенных коэффициентов. Этот случай — синтез двух предыдущих.

Решение имеет вид

$$\tau=-\frac{Gc_1}{CF}\left[A_2\ln\frac{T_2-\alpha_1}{T_1-\alpha_1}+B_2\ln\frac{T_2-\alpha_2}{T_1-\alpha_2}+\frac{C_2}{2}\ln\frac{T_2^2+pT_2+q}{T_1^2+pT_1+q}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\frac{C_2p}{2}-D_2\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\left(\operatorname{arctg}\frac{T_2+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}-\operatorname{arctg}\frac{T_1+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)\right]. \qquad (8)$$

Экспериментальной проверкой установлено, что использование полученных решений возможно для пьезотермопластиков толщиной не более 3 *мм*.

Литература

1. М. А. Михеев. Основы теплопередачи. М.—Л., Госэнергоиздат, 1956.

В. М. СОБОЛЕВСКИЙ

УПРУГОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ И ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

Постановка задачи и основные уравнения

Упругое напряженное состояние круговой цилиндрической трубы под действием температурного поля $t=t(\rho, z)$ исследовано по методу Б. Г. Галеркина, Г. Н. Маслова [1].

В настоящей работе рассматривается упругое напряженное состояние круговой цилиндрической трубы длиной $2H$. Поперечное сечение ее ограничено двумя концентрическими окружностями радиусов r и R. Труба находится под действием давления p с внутренней стороны и с внешней — давления упругой среды Гука, в которую она помещена (с упругими постоянными E' — модулем Юнга и μ — коэффициентом Пуассона), а также влияния температурного поля $t = t(\rho, z, \tau)$ (рис. 1).

Так как по условию внутреннее и внешнее давления, температура и осевая сила не зависят от Θ, то компоненты касательных напряжений $\tau_{\rho\Theta}$, $\tau_{\Theta z}$ и компонент тангенциального смещения v обращаются в нуль, т. е.

$$\tau_{\rho\Theta} = \tau_{\Theta z} = v = 0.$$

Компоненты радиального σ_ρ, тангенциального σ_Θ, осевого σ_z и и касательного $\tau_{\rho z}$ напряжений, компоненты радиального и осевого смещения u, w и компонент осевой деформации ε_z не зависят от Θ и являются функциями от ρ и z. Следовательно, здесь симметричная относительно оси деформация круговой цилиндрической трубы.

Компоненты деформации, выраженные через компоненты напряжения (обобщенный закон Гука), имеют формы [2]:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_\rho &= \frac{1}{E}\left[(1+\mu)\sigma_\rho - 3\mu\sigma\right] + \alpha t;\\
\varepsilon_\Theta &= \frac{1}{E}\left[(1+\mu)\sigma_\Theta - 3\mu\sigma\right] + \alpha t;\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[(1+\mu)\sigma_z - 3\mu\sigma\right] + \alpha t;\\
\gamma_{\rho z} &= \frac{1+\mu}{E}\tau_{\rho z},
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $\sigma = \dfrac{\sigma_\rho + \sigma_\Theta + \sigma_z}{3}$.

Те же уравнения, разрешенные относительно компонентов напряжений,

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon + \varepsilon_\rho\right) - \frac{E\alpha t}{1-2\mu};\\
\sigma_\Theta &= \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon + \varepsilon_\Theta\right) - \frac{E\alpha t}{1-2\mu};\\
\sigma_z &= \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon + \varepsilon_z\right) - \frac{E\alpha t}{1-2\mu};\\
\tau_{\rho z} &= \frac{E}{1+\mu}\gamma_{\rho z},
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_\rho + \varepsilon_\Theta + \varepsilon_z}{3}$.

Компоненты деформации связаны с компонентами смещения соотношениями Коши:

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho}; \quad \varepsilon_\Theta = \frac{u}{\rho}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad 2\gamma_{\rho z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho}. \tag{3}$$

Компоненты напряжения удовлетворяют известным уравнениям равновесия Коши (объемными силами пренебрегаем):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\Theta}{\rho} = 0; \\ &\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0. \end{aligned}\right| \tag{4}$$

Подставляя компоненты напряжения (2) в уравнения равновесия (4), получаем

$$\left.\begin{aligned} &3(1-\mu)\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + (1-2\mu)\frac{\partial \omega_\Theta}{\partial z} = (1+\mu)\alpha\frac{\partial t}{\partial \rho}; \\ &3(1-\mu)\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - (1-2\mu)\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\omega_\Theta \rho)}{\partial \rho} = (1+\mu)\alpha\frac{\partial t}{\partial z}, \end{aligned}\right| \tag{5}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &3\varepsilon = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(u\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial z}; \\ &2\omega_\Theta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial \rho}. \end{aligned}\right| \tag{6}$$

Решение задачи в общей форме

Следуя методу Г. Н. Маслова [1], найдем решение системы (5) в виде сумм:

$$\left.\begin{aligned} &u = u_1 + u_2; \\ &w = w_1 + w_2, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где u_1, w_1 — решения системы (5) без правой части, а u_2, w_2 — одно из возможных частных решений системы (5) с правой частью.

Тогда компоненты напряжений также могут быть представлены в виде сумм:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_\rho = \sigma_{\rho_1} + \sigma_{\rho_2}; \\ &\sigma_\Theta = \sigma_{\Theta_1} + \sigma_{\Theta_2}; \\ &\sigma_z = \sigma_{z_1} + \sigma_{z_2}; \\ &\tau_{\rho z} = \tau_{\rho z_1} + \tau_{\rho z_2}, \end{aligned}\right| \tag{8}$$

где

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_{\rho_1} &= \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon_1 + \frac{\partial u}{\partial \rho}\right);\\
\sigma_{\theta_1} &= \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon_1 + \frac{u_1}{\rho}\right);\\
\sigma_{z_1} &= \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon_1 + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right);\\
\tau_{\rho z_1} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial w_1}{\partial \rho} + \frac{\partial u_2}{\partial z}\right).
\end{aligned}
\right| \tag{9}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_{\rho_2} &= \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon_2 + \frac{\partial u_2}{\partial \rho}\right) - \frac{E\alpha t}{1-2\mu};\\
\sigma_{\theta_2} &= \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon_2 + \frac{u_2}{\rho}\right) - \frac{E\alpha t}{1-2\mu};\\
\sigma_{z_2} &= \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{3\mu}{1-2\mu}\varepsilon_2 + \frac{\partial w_2}{\partial z}\right) - \frac{E\alpha t}{1-2\mu};\\
\tau_{\rho z_2} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial w_2}{\partial \rho} + \frac{\partial u_2}{\partial z}\right).
\end{aligned}
\right| \tag{10}
$$

Для отыскания решений u_1, w_1 воспользуемся методом трех независимых функций Б. Г. Галеркина [3]. Положив в формулах [3] $f = 0$, получим:

для компонентов смещения

$$
\left.
\begin{aligned}
u_1 &= -\frac{1+\mu}{E}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\,\partial z};\\
w_1 &= -\frac{1+\mu}{E}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - 2(1-\mu)\nabla^2\varphi\right];
\end{aligned}
\right| \tag{11}
$$

для компонентов напряжения

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_{\rho_1} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}\right);\\
\sigma_{\theta_1} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2\varphi - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right);\\
\sigma_{z_1} &= \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\mu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right];\\
\tau_{\rho z_1} &= \frac{\partial}{\partial \rho}\left[(1-\mu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right].
\end{aligned}
\right| \tag{12}
$$

где $\varphi = \varphi(\rho, z)$ — бигармоническая функция, удовлетворяющая бигармоническому уравнению $\nabla^2\nabla^2\varphi = 0$, а символ ∇^2 — оператор Лапласа.

Следуя Г. Н. Маслову, допустим, что $\omega_\theta = 0$, тогда система (5)

$$
\left.\begin{aligned}
3(1-\mu)\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \rho} &= (1+\mu)\alpha\frac{\partial t}{\partial \rho};\\
3(1-\mu)\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial z} &= (1+\mu)\alpha\frac{\partial t}{\partial z};
\end{aligned}\right| \qquad (5')
$$

отсюда $3\varepsilon_2 = \frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha t,$ (13)

а система (6)

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho}\frac{\partial (u_2\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha t;\\
&\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial \rho} = 0.
\end{aligned}\right| \qquad (14)
$$

Подставив выражение (13) в формулы (10), получим

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_{\rho_2} &= \frac{E}{1+\mu}\frac{\partial u_2}{\partial \rho} - \frac{E\alpha t}{1-\mu};\\
\sigma_{\Theta_2} &= \frac{E}{1+\mu}\frac{u_2}{\rho} - \frac{E\alpha t}{1-\mu};\\
\sigma_{z_2} &= -\frac{E}{1+\mu}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \rho} + \frac{u_2}{\rho}\right);\\
\tau_{\rho z_2} &= \frac{E}{1+\mu}\frac{\partial u_2}{\partial z} = \frac{E}{1+\mu}\frac{\partial w_2}{\partial \rho}.
\end{aligned}\right| \qquad (15)
$$

Интегрирование системы (14) для общего случая температурной функции $t = t(\rho, z, \tau)$ составляет сложную математическую задачу. Поэтому мы ограничимся интегрированием ее лишь для стационарного теплового потока $t = t(\rho, z)$.

Второе уравнение (14) удовлетворяется, если положить

$$
\begin{aligned}
u_2 &= z(z)\frac{dP(\rho)}{d\rho};\\
w_2 &= P(\rho)\frac{dZ(z)}{dz},
\end{aligned} \qquad (16)
$$

где $P(\rho)$ — функция только одного ρ, а $Z(z)$ — функция только одного z.

Подстановка этих значений в первое уравнение (14) преобразует его к виду

$$
Z(z)\left[\frac{d^2P(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dP(\rho)}{d\rho}\right] + P(\rho)\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha t. \qquad (17)
$$

Решение задачи для стационарного теплового потока

Температурная функция t удовлетворяет в цилиндрических координатах для осесимметричного стационарного теплового потока известному дифференциальному уравнению теплопроводности Фурье [2]

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial t}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \tag{18}$$

Общий интеграл этого уравнения

$$t = c_1 \ln \rho + c_2 + \Sigma \left[A_n I_0(\lambda_n \rho) + B_n K_0(\lambda_n \rho)\right] \cos(\lambda_n z), \tag{19}$$

где c_1, c_2, A_n, B_n и λ_n — произвольные постоянные интеграции, а I_0 и K_0 — функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка от мнимого аргумента.

Распределение напряжений и смещений, соответствующее первым двум членам выражения (19), нами исследовано в работе [2], поэтому здесь рассмотрим распределение напряжений и смещений, соответствующее функции

$$t = \Sigma \left[A_n I_0(\lambda_n \rho) + B_n K_0(\lambda_n \rho)\right] \cos(\lambda_n z). \tag{20}$$

Постоянные A_n и B_n определим из граничных условий

$$t\Big|_{\substack{\rho = r\\ z = 0}} = t_1, \quad t\Big|_{\substack{\rho = R\\ z = 0}} = t_2 \text{ и } t\Big|_{\substack{\rho = b\\ z = 0}} = t_3;$$

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma \left[A_n I_0(\lambda_n r) + B_n K_0(\lambda_n r)\right] = t_1;\\ &\Sigma \left[A_n I_0(\lambda_n R) + B_n K_0(\lambda_n R)\right] = t_2; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma \left[A'_n I_0(\lambda_n R) + B'_n K_0(\lambda_n R)\right] = t_2;\\ &\Sigma \left[A'_n I_0(\lambda_n b) + B'_n K_0(\lambda_n b)\right] = t_3. \end{aligned}\right|$$

Решая эти системы, найдем постоянные A_n, B_n и A'_n, B'_n:

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{t_1 K_0(\lambda_n R) - t_2 K_0(\lambda_n r)}{I_0(\lambda_n r) K_0(\lambda_n R) - I_0(\lambda_n R) K_0(\lambda_n r)};\\ B_n &= \frac{t_2 I_0(\lambda_n r) - t_1 I_0(\lambda_n R)}{I_0(\lambda_n r) K_0(\lambda_n R) - I_0(\lambda_n R) K_0(\lambda_n r)};\\ A'_n &= \frac{t_2 K_0(\lambda_n b) - t_2 K_0(\lambda_n R)}{I_0(\lambda_n R) K_0(\lambda_n b) - I_0(\lambda_n b) K_0(\lambda_n R)};\\ B'_n &= \frac{t_3 I_0(\lambda R) - t_2 I_0(\lambda_n b)}{I_0(\lambda_n R) K_0(\lambda_n b) - I_0(\lambda_n b) K_0(\lambda_n R)}, \end{aligned}\right| \tag{21}$$

где

$I_0(\lambda_n r)K_0(\lambda_n R) - I_0(\lambda_n R)K_0(\lambda_n r) \neq 0$ и $I_0(\lambda_n R)K_0(\lambda_n b) - I_0(\lambda_n b)K_0(\lambda_n R) \neq 0$.

Из выражения (20) и первого уравнения (16) находим, что функция $Z(z)$ равна

$$Z(z) = \cos(\lambda_n z). \tag{22}$$

Подстановка равенства (22) в уравнение (17) преобразует его в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\mathrm{P}(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\mathrm{P}(\rho)}{d\rho} - \lambda_n^2\mathrm{P}(\rho) = \frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\left[A_n I_0(\lambda_n\rho) + B_n K_0(\lambda_n\rho)\right].$$

Этому уравнению удовлетворяет функция

$$\mathrm{P}(\rho) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\mu}{1-\mu}\cdot\frac{1}{\lambda_n}\alpha\rho\left[A_n I_1(\lambda_n\rho) - B_n K_1(\lambda_n\rho)\right]. \tag{23}$$

Подставляя равенства (22) и (23) в формулы (16), найдем

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\rho\,\Sigma\left[A_n I_0(\lambda_n\rho) + B_n K_0(\lambda_n\rho)\right]\cos(\lambda_n z);\\ w_2 &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\rho\,\Sigma\left[A_n I_1(\lambda_n\rho) - B_n K_1(\lambda_n\rho)\right]\sin(\lambda_n z).\end{aligned}\right| \tag{24}$$

Подстановка уравнения (24) в выражение (15) дает

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\rho_2} &= -\frac{\alpha E}{2(1-\mu)}\Sigma\{A_n[I_0(\lambda_n\rho) - \lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho)] +\\ &\quad + B_n[K_0(\lambda_n\rho) + \lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho)]\}\cos(\lambda_n z);\\ \sigma_{\theta_2} &= -\frac{\alpha E}{2(1-\mu)}\Sigma\left[A_n I_0(\lambda_n\rho) + B_n K_0(\lambda_n\rho)\right]\cos(\lambda_n z);\\ \sigma_{z_2} &= -\frac{\alpha E}{2(1-\mu)}\Sigma\{A_n[2I_0(\lambda_n\rho) + \lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho)] +\\ &\quad + B_n[2K_0(\lambda_n\rho) - \lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho)]\}\cos(\lambda_n z);\\ \tau_{\rho z_2} &= -\frac{\alpha E}{2(1-\mu)}\rho\Sigma\{\lambda_n[A_n I_0(\lambda_n\rho) + B_n K_0(\lambda_n\rho)]\sin(\lambda_n z)\}.\end{aligned}\right| \tag{25}$$

Для нахождения общих решений системы (5) без правой части возьмем функцию напряжений (бигармоническую финкцию) [1]

$$\varphi = \Sigma\{[C_n I_0(\lambda_n\rho) + D_n K_0(\lambda_n\rho)] + \lambda_n\rho[M_n I_1(\lambda_n\rho) + N_n K_1(\lambda_n\rho)]\}\sin(\lambda_n z). \tag{26}$$

Подставляя функцию напряжений (26) в формулы Б. Г. Галеркина (11) и (12), найдем

$$
\left.
\begin{aligned}
u_1 &= -\frac{1+\mu}{E}\Sigma\{[C_n I_1(\lambda_n\rho) - D_n K_1(\lambda_n\rho)] + \\
&\quad + \lambda_n\rho[M_n I_0(\lambda_n\rho) - N_n K_0(\lambda_n\rho)]\}\lambda_n^2\cos(\lambda_n z);\\
w_1 &= \frac{1+\mu}{E}\Sigma\{[C_n I_0(\lambda_n\rho) + D_n K_0(\lambda_n\rho)] + \\
&\quad + M_n[\lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho) + 4(1-\mu)I_0(\lambda_n\rho)] + \\
&\quad + N_n[\lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho) - 4(1-\mu)(K_0(\lambda_n\rho)]\}\lambda_n^2\sin(\lambda_n z);
\end{aligned}
\right| \quad (27)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_{\rho_1} &= -\Sigma\left\{C_n\left[I_n(\lambda_n\rho) - \frac{1}{\lambda_n\rho}I_1(\lambda_n\rho)\right] + D_n\left[K_0(\lambda_n\rho) + \frac{1}{\lambda_n\rho}K_1(\lambda_n\rho)\right] + \right.\\
&\quad + M_n[(1-2\mu)I_0(\lambda_n\rho) + \lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho)] + N_n[-(1-2\mu)K_0(\lambda_n\rho) + \\
&\quad \left. + \lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho)]\right\}\lambda_n^3\cos(\lambda_n z);\\
\sigma_{\theta_1} &= -\Sigma\left\{\frac{1}{\lambda_n\rho}[C_n I_1(\lambda_n\rho) - D_n K_1(\lambda_n\rho)] + (1-2\mu)[M_n I_0(\lambda_n\rho) - \right.\\
&\quad \left. - N_n K_0(\lambda_n\rho)]\right\}\lambda_n^3\cos(\lambda_n z);\\
\sigma_{z_1} &= \Sigma\{[C_n I_0(\lambda_n\rho) + D_n K_0(\lambda_n\rho)] + M_n[2(2-\mu)I_0(\lambda_n\rho) + \\
&\quad + \lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho)] - N_n[2(2-\mu)K_0(\lambda_n\rho) - \lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho)]\}\lambda_n^3\cos(\lambda_n z);\\
\tau_{\rho z_1} &= \Sigma\{[C_n I_1(\lambda_n\rho) - D_n K_1(\lambda_n\rho)] + M_n[2(1-\mu)I_1(\lambda_n\rho) + \\
&\quad + \lambda_n\rho I_0(\lambda_n\rho)] + N_n[2(1-\mu)K_1(\lambda_n\rho) - \lambda_n\rho K_0(\lambda_n\rho)]\}\lambda_n^3\sin(\lambda_n z).
\end{aligned}
\right| \quad (28)
$$

Подставляя выражения (27), (24) и (28), (25) в формулы (7) и (8), определим распределение смещений и напряжений в точках $r \leqslant \rho \leqslant R, -H \leqslant z \leqslant H$ трубы:

$$
\left.
\begin{aligned}
u &= \Sigma\left\{-\frac{1+\mu}{E}[C_n I_1(\lambda_n\rho) - D_n K_1(\lambda_n\rho) + \lambda_n\rho(M_n I_0(\lambda_n\rho) - \right.\\
&\quad \left. - N_n K_0(\lambda_n\rho))]\lambda_n^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\rho(A_n I_0(\lambda_n\rho) + B_n K_0(\lambda_n\rho))\right\}\cos(\lambda_n z);\\
w &= \Sigma\left\{\frac{1+\mu}{E}[C_n I_0(\lambda_n\rho) + D_n K_0(\lambda_n\rho) + M_n(\lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho) + \right.\\
&\quad + 4(1-\mu)I_0(\lambda_n\rho)) + N_n(\lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho) - 4(1-\mu)K_0(\lambda_n\rho))]\lambda_n^2 - \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\rho(A_n I_1(\lambda_n\rho) - B_n K_1(\lambda_n\rho))\right\}\sin(\lambda_n z);
\end{aligned}
\right| \quad (29)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_\rho &= -\Sigma\Big\{\Big[C_n\Big(I_0(\lambda_n\rho)-\frac{1}{\lambda_n\rho}I_1(\lambda_n\rho)\Big)+D_n\Big(K_0(\lambda_n\rho)+\frac{1}{\lambda_n\rho}K_1(\lambda_n\rho)\Big)+\\
&+M_n((1-2\mu)I_0(\lambda_n\rho)+\lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho))+N_n(-(1-2\mu)K_0(\lambda_n\rho)+\\
&+\lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho))\Big]\lambda_n^3+\frac{\alpha E}{2(1-\mu)}[A_n(I_0(\lambda_n\rho)-\lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho))+\\
&+B_n(K_0(\lambda_n\rho)+\lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho))]\Big\}\cos(\lambda_n z);\\
\sigma_\theta &= -\Sigma\Big\{\Big[\frac{1}{\lambda_n\rho}\Big(C_nI_1(\lambda_n\rho)-D_nK_1(\lambda_n\rho)\Big)+(1-2\mu)(M_nI_0(\lambda_n\rho)-\\
&-N_nK_0(\lambda_n\rho))\Big]\lambda_n^3+\frac{\alpha E}{2(1-\mu)}(A_nI_0(\lambda_n\rho)+B_nK_0(\lambda_n\rho))\Big\}\cos(\lambda_n z);\\
\sigma_z &= -\Sigma\Big\{-[C_nI_0(\lambda_n\rho)+D_nK_0(\lambda_n\rho)+M_n(2(2-\mu)I_0(\lambda_n\rho)+\\
&+\lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho))-N_n(2(2-\mu)K_0(\lambda_n\rho)-\lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho))]\lambda_n^3+\\
&+\frac{\alpha E}{2(1-\mu)}\Big[A_n(2I_0(\lambda_n\rho)+\lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho))+\\
&+B_n\Big(2K_0(\lambda_n\rho)-\lambda_n\rho K_2(\lambda_n\rho)\Big)\Big]\Big\}\cos(\lambda_n z);\\
\tau_{\rho z} &= \Sigma\Big\{\Big[C_nI_1(\lambda_n\rho)-D_nK_1(\lambda_n\rho)+M_n(2(1-\mu)I_1(\lambda_n\rho)+\\
&\lambda_n\rho I_0(\lambda_n\rho))+N_n\Big(2(1-\mu)K_1(\lambda_n\rho)-\lambda_n\rho K_0(\lambda_n\rho)\Big)\Big]\lambda_n^3-\\
&-\frac{\alpha E}{2(1-\mu)}\rho\lambda_n\Big(A_nI_0(\lambda_n\rho)+B_nK_0(\lambda_n\rho)\Big)\Big\}\sin(\lambda_n z).
\end{aligned}
\right\}\tag{30}
$$

Распределение смещений и напряжений в точках $R\leqslant\rho<\infty$, $-H\leqslant z\leqslant H$ упругой среды Гука определяется по формулам:

$$
\left.
\begin{aligned}
u' &= \Sigma\Big\{-\frac{1+\mu'}{E'}\Big[C'_nI_1(\lambda_n\rho)-D'_nK_1(\lambda_n\rho)+\lambda_n\rho(M'_nI_0(\lambda_n\rho)-\\
&-N'_nK_0(\lambda_n\rho))\Big]\lambda_n^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\mu'}{1-\mu'}\alpha'\rho\,(A'_nI_0(\lambda_n\rho)+\\
&+B'_nK_0(\lambda_n\rho))\Big\}\cos(\lambda_n z);\\
w' &= \Sigma\Big\{\frac{1+\mu'}{E'}\Big[C'_nI_0(\lambda_n\rho)+D'_nK_0(\lambda_n\rho)+M'_n(\lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho)+\\
&+4(1-\mu')I_0(\lambda_n\rho))+N'_n(\lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho)-4(1-\mu')K_0(\lambda_n\rho))\Big]\lambda_n^2-\\
&-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\mu'}{1-\mu'}\alpha'\rho(A'_nI_1(\lambda_n\rho)-B'_nK_1(\lambda_n\rho))\Big\}\sin(\lambda_n z);
\end{aligned}
\right\}\tag{31}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma'_\rho = &-\Sigma\Big\{\Big[C'_n\Big(I_0(\lambda_n\rho)-\frac{1}{\lambda_n\rho}I_1(\lambda_n\rho)\Big)+D'_n\Big(K_0(\lambda_n\rho)+\\
&+\frac{1}{\lambda_n\rho}K_1(\lambda_n\rho)\Big)+M'_n\Big((1-2\mu')I_0(\lambda_n\rho)+\lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho)\Big)+\\
&+N'_n\Big(-(1-2\mu')K_0(\lambda_n\rho)+\lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho)\Big)\Big]\lambda_n^3+\\
&+\frac{\alpha'E'}{2(1-\mu')}\Big[A'_n\Big(I_0(\lambda_n\rho)-\lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho)\Big)+\\
&+B'_n\Big(K_0(\lambda_n\rho)+\lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho)\Big)\Big]\Big\}\cos(\lambda_n z);\\
\sigma'_\Theta = &-\Sigma\Big\{\Big[\frac{1}{\lambda_n\rho}\Big(C'_nI_1(\lambda_n\rho)-D'_nK_1(\lambda_n\rho)\Big)+(1-2\mu')\Big(M'_nI_0(\lambda_n\rho)-\\
&-N'_nK_0(\lambda_n\rho)\Big)\Big]\lambda_n^3+\frac{\alpha'E'}{2(1-\mu')}\Big(A'_nI_0(\lambda_n\rho)+B'_nK_0(\lambda_n\rho)\Big)\Big\}\cos(\lambda_n z);\\
\sigma'_z = &-\Sigma\Big\{-\Big[C'_nI_0(\lambda_n\rho)+D'_nK_0(\lambda_n\rho)+M'_n\Big(2(2-\mu')I_0(\lambda_n\rho)+\\
&+\lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho)\Big)-N'_n\Big(2(2-\mu')K_0(\lambda_n\rho)-\lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho)\Big)\Big]\lambda_n^3+\\
&+\frac{\alpha'E'}{2(1-\mu')}\Big[A'_n\Big(2I_0(\lambda_n\rho)+\lambda_n\rho I_1(\lambda_n\rho)\Big)+B'_n\Big(2K_0(\lambda_n\rho)-\\
&-\lambda_n\rho K_1(\lambda_n\rho)\Big)\Big]\Big\}\cos(\lambda_n z);\\
\tau'_{\rho z} = &\,\Sigma\Big\{\Big[C'_nI_1(\lambda_n\rho)-D'_nK_1(\lambda_n\rho)+M'_n\Big(2(1-\mu')I_1(\lambda_n\rho)+\\
&+\lambda_n\rho I_0(\lambda_n\rho)\Big)+N'_n\Big(2(1-\mu')K_1(\lambda_n\rho)-\lambda_n\rho K_0(\lambda_n\rho)\Big)\Big]\lambda_n^3-\\
&-\frac{\alpha'E'}{2(1-\mu')}\rho\lambda_n\Big(A'_nI_0(\lambda_n\rho)+B'_nK_0(\lambda_n\rho)\Big)\Big\}\sin(\lambda_n z),
\end{aligned}
\right\}
\quad (32)
$$

где индекс $'$ стоит при обозначении величин, относящихся к упругой среде Гука.

Для нахождения постоянных C_n, D_n, M_n, N_n, C'_n, D'_n, M'_n, N'_n введем выражения (30), (29), (31) в граничные условия

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sigma_\rho\Big|_{\rho=r}=-p(z),\quad \sigma_\rho\Big|_{\rho=R}=\sigma'_\rho\Big|_{\rho=R},\quad \sigma_\Theta\Big|_{\rho=R}=\sigma'_\Theta\Big|_{\rho=R},\quad \tau_{\rho z}\Big|_{\rho=R}=\tau'_{\rho z}\Big|_{\rho=R},\\
&u\Big|_{\rho=R}=u'\Big|_{\rho=R},\quad \sigma'_\rho\Big|_{\rho=\infty}=0,\quad \sigma'_\Theta\Big|_{\rho=\infty}=0,\quad \tau'_{\rho z}\Big|_{\rho=\infty}=0,
\end{aligned}
\right\}
\quad (33)
$$

и, принимая во внимание асимптотические представления функций Бесселя [4]

$$I_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right) + 0\left(x^{-1}\right)\right],$$

$$K_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + 0(x^{-1})\right],$$

получим систему

$$\left[I_0(\lambda_n r) - \frac{1}{\lambda_n r} I_1(\lambda_n r)\right] C_n + \left[K_0(\lambda_n r) + \frac{1}{\lambda_n r} K_1(\lambda_n r)\right] D_n +$$

$$+ [(1-2\mu')I_0(\lambda_n r) + \lambda_n r I_1(\lambda_n r)]\, M_n + [-(1-2\mu)K_0(\lambda_n r) + \lambda_n r K_1(\lambda_n r)]\, N_n =$$

$$= \frac{a_n}{\lambda_n^3} - \frac{\alpha E}{2(1-\mu)} \cdot \frac{1}{\lambda_n^3} \{A_n[I_0(\lambda_n r) - \lambda_n r I_1(\lambda_n r)] +$$

$$+ B_n[K_0(\lambda_n r) + \lambda_n r K_1(\lambda_n r)]\};$$

$$\left[I_0(\lambda_n R) - \frac{1}{\lambda_n R} I_1(\lambda_n R)\right] C_n + \left[K_0(\lambda_n R) + \frac{1}{\lambda_n R} K_1(\lambda_n R)\right] D_n +$$

$$+ [(1-2\mu)I_0(\lambda_n R) + \lambda_n R I_1(\lambda_n R)]\, M_n + [-(1-2\mu)K_0(\lambda_n R) +$$

$$+ \lambda_n R K_1(\lambda_n R)]\, N_n - \left[I_0(\lambda_n R) - \frac{1}{\lambda_n R} I_1(\lambda_n R)\right] C'_n -$$

$$- \left[K_0(\lambda_n R) + \frac{1}{\lambda_n R} K_1(\lambda_n R)\right] D'_n - [(1-2\mu)I_0(\lambda_n R) + \lambda_n R I_1(\lambda_n R)]\, M'_n -$$

$$- [-(1-2\mu)\, K_0(\lambda_n R) + \lambda_n R K_1(\lambda_n R)]\, N'_n =$$

$$= -\frac{\alpha E}{2(1-\mu)} \cdot \frac{1}{\lambda_n^3} \{A_n[I_0(\lambda_n R) - \lambda_n R I_1(\lambda_n R)] + B_n[K_0(\lambda_n R) + \lambda_n R K_1(\lambda_n R)]\} +$$

$$+ \frac{\alpha' E'}{2(1-\mu')} \cdot \frac{1}{\lambda_n^3} \{A'_n[I_0(\lambda_n R) - \lambda_n R I_1(\lambda_n R)] + B'_n[K_0(\lambda_n R) + \lambda_n R K_1(\lambda_n R)]\};$$

$$\frac{I_1(\lambda_n R)}{\lambda_n R} C_n - \frac{K_1(\lambda_n R)}{\lambda_n R} D_n + (1-2\mu)I_0(\lambda_n R) M_n - (1-2\mu)K_0(\lambda_n R) N_n -$$

$$- \frac{I_1(\lambda_n R)}{\lambda_n R} C'_n + \frac{K_1(\lambda_n R)}{\lambda_n R} D'_n - (1-2\mu')I_0(\lambda_n R) M'_n + (1-2\mu')K_0(\lambda_n R) N_n =$$

$$= -\frac{\alpha E}{2(1-\mu)} \cdot \frac{1}{\lambda_n^3} \left[A_n I_0(\lambda_n R) + B_n K_0(\lambda_n R)\right] +$$

$$+ \frac{\alpha' E'}{2(1-\mu')} \cdot \frac{1}{\lambda_n^3} [A'_n I_0(\lambda_n R) + B'_n K_0(\lambda_n R)];$$

$$I_0(\lambda_n R)C_n - K_1(\lambda_n R)D_n + [2(1-\mu)I_1(\lambda_n R) + \lambda_n R I_0(\lambda_n R)]M_n +$$
$$+ [2(1-\mu)K_1(\lambda_n R) - \lambda_n R K_0(\lambda_n R)]N_n - I_0(\lambda_n R)C'_n - K_1(\lambda_n R)D'_n -$$
$$- [2(1-\mu')I_1(\lambda_n R) + \lambda_n R I_0(\lambda_n R)]M'_n - [2(1-\mu')K_1(\lambda_n R) -$$
$$- \lambda_n R K_0(\lambda_n R)]N'_n = \frac{\alpha E}{2(1-\mu)} \cdot \frac{1}{\lambda_n^2} R[A_n I_0(\lambda_n R) + B_n K_0(\lambda_n R) -$$
$$- \frac{\alpha' E'}{2(1-\mu')} \cdot \frac{1}{\lambda_n^2} \cdot R\,[A'_n I_0(\lambda_n R) + B'_n K_0(\lambda_n R)];$$

$$\frac{1+\mu}{E}[I_1(\lambda_n R)C_n - K_1(\lambda_n R)D_n + \lambda_n R I_0(\lambda_n R)M_n - \lambda_n R K_0(\lambda_n R)N'_n] -$$
$$- \frac{1+\mu'}{E'}[I_1(\lambda_n R)C'_n - K_1(\lambda_n R)D'_n + \lambda_n R I_0(\lambda_n R)M'_n - \lambda_n R K_0(\lambda_n R)N'_n] =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \frac{1}{\lambda^2_n} \alpha R[A_n I_0(\lambda_n R) + B_n K_0(\lambda_n R)] -$$
$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\mu'}{1-\mu'} \cdot \frac{1}{\lambda_n^2} \alpha' R[A'_n I_0(\lambda_n R) + B'_n K_0(\lambda_n R)];$$

$$C'_n + (1-2\mu')M'_n = -\frac{\alpha' E'}{2(1-\mu')} \cdot \frac{A'_n}{\lambda_n^2}; \quad M'_n = -\frac{\alpha' E'}{2(1-\mu')(1-2\mu')} \cdot \frac{A'_n}{\lambda_n^2};$$

$$I_1(\lambda_n r)C_n - K_1(\lambda_n r)D_n + [2(1-\mu)I_1(\lambda_n r) + \lambda_n r I_0(\lambda_n r)]M_n +$$
$$+ [2(1-\mu)K_1(\lambda_n r) - \lambda_n r K_0(\lambda_n r)]N_n =$$
$$= -\frac{b_n}{\lambda_n^3} + \frac{\alpha E}{2(1-\mu)} \cdot \frac{1}{\lambda^2} r[A_n I_0(\lambda_n r) + B_n K_0(\lambda_n r)], \qquad (34)$$

где постоянное a_n определяется по формуле Фурье [4]

$$a_n = \frac{2}{H} \int_0^H p(z) \cos(\lambda_n z) dz.$$

Решая систему (34), найдем постоянные C_n, D_n, M_n, N_n, C'_n, D'_n, M'_n, N'_n.

Что касается постоянной λ_n, то для ее нахождения рассмотрим два случая.

Пусть на торцах трубы осевое напряжения σ_z отлично от нуля, а осевое перемещение w обращается в нуль, т. е.

$$\sigma_z\Big|_{z=H} \neq 0, \quad w\Big|_{z=H} = 0.$$

Тогда, внося сюда значения σ_z по второй формуле (30), найдем

$$\Sigma \Big\{ \frac{1+\mu}{E} [C_n I_0(\lambda_n \rho) + D_n K_0(\lambda_n \rho) + M_n(\lambda_n \rho I_1(\lambda_n \rho) + 4(1-\mu) I_0(\lambda_n \rho)) +$$

$$+ N_n(\lambda_n \rho K_1(\lambda_n \rho) - 4(1-\mu) K_0(\lambda_n \rho))]\lambda_n^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha \rho (A_n I_1(\lambda_n \rho) -$$

$$- B_n K_1(\lambda_n \rho)) \Big\} \sin(\lambda_n H) = 0.$$

Откуда

$$\sin(\lambda_n H) = 0,$$

что дает

$$\lambda_n = \frac{m\pi}{H}. \qquad (35)$$

Пусть теперь на торцах трубы осевое напряжение σ_z обращается в нуль, а осевое перемещение w отлично от нуля, т. е.

$$\sigma_z \Big|_{z=H} = 0, \quad w \Big|_{z=H} \neq 0.$$

Тогда, внося сюда значение σ_z по третьей формуле (30), найдем

$$- \Sigma \{ - [C_n I_0(\lambda_n \rho) + D_n K_0(\lambda_n \rho) + M_n(2(2-\mu) I_0(\lambda_n \rho) + \lambda_n \rho I_1(\lambda_n \rho)) -$$

$$- N_n(2(2-\mu) K_0(\lambda_n \rho) - \lambda_n \rho K_1(\lambda_n \rho))]\lambda_n^2 + \frac{\alpha E}{2(1-\mu)} [A_n(2 I_0(\lambda_n \rho) +$$

$$+ \lambda_n \rho I_1(\lambda_n \rho)) + B_n(2 K_0(\lambda_n \rho) - \lambda_n \rho K_1(\lambda_n \rho))]\} \cos(\lambda_n H) = 0.$$

Откуда

$$\cos(\lambda_n H) = 0,$$

что дает

$$\lambda_n = \frac{(2m-1)\pi}{2H}. \qquad (36)$$

Литература

1. Г. Н. Маслов. Задачи теории упругости о термоупругом равновесии. Известия Научно-исследовательского института гидротехники, т. 23, 1938.
2. В. М. Соболевский. Упругое и упруго-пластическое напряженное состояние круговой цилиндрической трубы в упругой среде под действием внутреннего давления, осевой силы и радиального теплового потока. В кн.: «Уч. зап. БГИНХ им. В. В. Куйбышева», вып. 3. Минск, 1957.
3. Б. Г. Галеркин. Определение напряжений и перемещений в упругом изотропном теле при помощи трех функций. Собр. соч., т. 1, 1952.
4. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 3, ч. 2. М.—Л., 1949.