

2. Увеличение скорости деформации понижает величину коэффициента трения.

3. Коэффициент внешнего трения для исследуемых марок легированной стали с повышением температуры увеличивается, а начиная с температуры 1000°C и выше резко падает. Падение коэффициента трения, по всей вероятности, объясняется состоянием окислов и их толщиной. Весьма возможно, что окалина в первых и промежуточных стадиях своего образования повышает трение.

В дальнейшем она начинает приобретать свойства смазки, что приводит к понижению коэффициента внешнего трения.

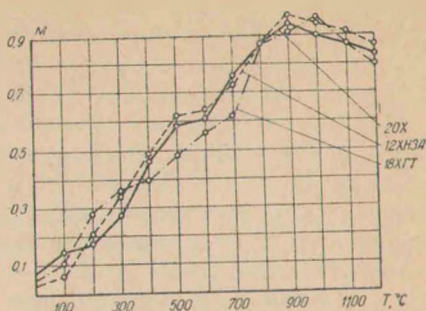


Рис. 4

Л и т е р а т у р а

1. С. И. Губкин. Теория обработки металлов давлением. М., Metallurgizdat, 1947.
2. Н. А. Шапошников. Механические испытания металлов. М., Машгиз, 1954.
3. М. А. Зайков. Влияние скоростей деформации на прочность сталей при высоких температурах. «Журнал технической физики», АН СССР, 1948, № 6.
4. С. И. Губкин. Деформируемость цветных сплавов. М., Metallurgizdat, 1947.
5. П. Д. Мохов. Диссертация. Исследование деформируемости легированной стали, применяемой в автотракторном производстве. Минск, 1954.

Л. А. РОТТ, Н. А. СТОДОЛЬНИК

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Хорошо разработанная теория молекулярной диффузии основывается на известном законе Фика, предполагающем, что при разности концентрации в жидкости возникает движение вещества. Этот процесс описывается линейным уравнением в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами, аналогичным уравнению теплопроводности, детально изученному в математической физике. Уравнение теплопроводности основывается на законе Фурье, считающем движущей силой теплопроводности градиент температуры. Поэтому и утвердилось убеждение в наличии универсальной аналогии между явлениями теплопередачи и диффузии. Действительно, никакие экспериментальные факты не противоречили тому, что распределение температуры в неподвижной среде удовлетворяет такому же дифференциальному уравне-

нию, что и распределение концентрации (коэффициенту температуропроводности среды в уравнении теплопроводности соответствует в уравнении диффузии коэффициент диффузии).

Важным экспериментальным достижением последних лет является установление факта прекращения диффузии в критической области расслаивания. И. Р. Кричевским и его сотрудниками было показано, что скорость диффузии падает практически до нуля даже при значительном градиенте концентрации одного из компонентов [1, 2]. Указанный результат в четкой форме обнаруживает нелинейность уравнения диффузии и приводит к функциональной зависимости коэффициента диффузии, который достигает нуля в критической точке [3, 4].

Изучение процессов переноса вещества в связи с критическими явлениями приобретает большое практическое значение, ибо многие процессы современной промышленности протекают вблизи или в самой критической области.

Вывод правильного уравнения диффузии должен исходить из того, что быстрота изменения концентрации одного из компонентов определяется градиентом его химического потенциала. Последний и является движущей силой диффузии. Это приводит в случае изотермической диффузии к уравнению

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = - \frac{D_0}{RT} \operatorname{div} (c_2 \operatorname{grad} \mu_2), \quad (1)$$

где c_2 и μ_2 — соответственно концентрация и химический потенциал второго компонента; $D_0 = \text{const}$.

В критической точке расслаивания двойной жидкой системы падение скорости диффузии до нуля связано с превращением в нуль производной от химического потенциала по мольной доле. Уравнение (1) удобнее записать для мольной доли N_2 (r, t), используя при этом оправданные для целого ряда систем допущения: независимость парциальных мольных объемов в области критической концентрации от состава и условие

$$\frac{N_2}{V} (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \ll 1 \quad (2)$$

(V — объем раствора, $\bar{v}_2$ и $\bar{v}_1$ — парциальные мольные объемы компонентов).

Разлагая химический потенциал в ряд по N_2 — $N_{2,k}$ ($N_{2,k}$ — мольная доля в критической точке) и учитывая критерий критической точки

$$\left(\frac{\partial \mu_2}{\partial N_2} \right)_{P,T} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \mu_2}{\partial N_2^2} \right)_{P,T} = 0, \quad (3)$$

получим нелинейное уравнение изотермической диффузии в критической области расслаивания

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = a(N_2 - N_{2,к}) [(3N_2 - N_{2,к}) (\text{grad } N_2)^2 + (N_2 - N_{2,к}) N_2 \Delta N_2] \quad (4)$$

(Δ — оператор Лапласа, $a = a(T)$).

В работах [3—5] уравнение (4) было использовано для исследования релаксационных процессов.

Интегрирование уравнения (4) связано с большими математическими трудностями. Отыскание возможностей их преодоления и составляет содержание настоящей работы.

Однако предварительно заметим, что значительно более сложным представляется изучение диффузии, сопровождаемое конвективным движением всей смеси. Последнее, несомненно, появится, когда изменение состава системы вызывает сильное изменение мольного объема. Ожидать это следует в газовых смесях. Действительно, в работе [6] на примере газовой системы двуокись углерода — азот в критической области жидкость — пар было показано, к каким парадоксальным следствиям приводит применение к данному случаю уравнения Фика.

Уравнение изотермической конвективной молекулярной диффузии в критической области с учетом сжимаемости смеси запишем в виде

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} + \text{div}(c_2 \bar{u}) = -\frac{D_0}{RT} \text{div}(c_2 \text{grad } p_2). \quad (5')$$

Здесь $\bar{u}$ — скорость движения смеси.

Далее будем исходить из того, что давление по всей системе постоянно, т. е. $\frac{dP}{dt} = 0$. Учитывая, что $P = p(N, v)$, можно записать

$$\left(\frac{\partial p}{\partial N}\right) dN + \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_N dv = 0, \quad (5'')$$

что дает возможность найти выражение для скорости смеси $u = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_N$ (рассматриваем одномерное движение).

Такой подход соответствует разбиению процесса конвективной диффузии на два этапа: сначала в элементарном объеме, полагаем, изменяется мольный состав, а затем при постоянном составе изменяется объем до установления равновесного давления.

Окончательно находим

$$u = \frac{\text{const}}{N_2} \left(\frac{\partial N_2}{\partial x}\right)^2 \ln \frac{N_2}{N_{2,к}}. \quad (5''')$$

Используя выражение (5''') в уравнении (5'), получим уравнение с одной неизвестной функцией. Вопросы интегрирования этого

уравнения здесь опускаем. Заметим лишь, что при указанном выше подходе принципиально необходимо знать решение уравнения (4).

Многие практические задачи приводят к случаю одномерной диффузии, когда все характеристики последней зависят только от одной геометрической величины r и времени t . Для одномерного случая уравнение параболического типа (4) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au \left[(3u + 2b) \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + u(u + b) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\nu - 1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]. \quad (5)$$

Здесь $u = N_2 - N_{2, \kappa}$; $b = N_{2, \kappa}$, параметр ν принимает значения 1, 2, 3 соответственно для плоских, цилиндрических и сферических решений.

Одна из возможностей интегрирования уравнения (5) связана с отысканием решения в автомодельном виде. Как известно (см., например, [7]), когда среди определяющих параметров задачи, кроме r и t , имеются всего две константы с независимыми размерностями, то уравнение в частных производных может быть заменено обыкновенным дифференциальным уравнением. Такого вида движения называются автомодельными. Ниже будет показано, что в рассматриваемой задаче исходное уравнение (5) сводится к обыкновенному уравнению первого порядка. Решение последнего можно получить, если не в замкнутом виде точно, то приближенно методами численного интегрирования.

Искомая функция u зависит от r , t и двух параметров a и b с независимыми размерностями. Можно тогда представить u как функцию двух независимых безразмерных комбинаций. Так как a имеет размерность $L^2 T^{-1}$, то безразмерной переменной будет комбинация

$$\frac{r^2}{ta},$$

а второй независимой безразмерной переменной —

$$\frac{r^{1/3}}{At^a},$$

где A — неопределенная постоянная.

Тогда искомое решение

$$u = f \left(\frac{r^2}{ta}, \frac{r^{1/3}}{At^a} \right) = \frac{r^{2/3}}{t^{1/3} a} \varphi \left(\frac{r^{1/3}}{At^a} \right). \quad (6)$$

Для функции $\varphi(\xi)$ $\left(\xi = \frac{r^{1/3}}{At^a} \right)$ согласно (5) получаем уравнение

в полных производных

$$\varphi \{ (3\varphi + 2\varphi_{\kappa}) (2\varphi + \xi \varphi')^2 + \varphi (\varphi + \varphi_{\kappa}) [\xi^2 \varphi'' + (3\nu - 1) \xi \varphi' + (6\nu - 8) \varphi] \} + 3\varphi + 9a \xi \varphi' = 0. \quad (7)$$

Полученное уравнение подстановкой

$$p = \xi \frac{d\varphi}{d\xi} \quad (8)$$

приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{dp}{d\varphi} = - \frac{1}{p\varphi^2(\varphi + \varphi_k)} \{ (4+6\nu)\varphi^4 + [6\nu\varphi_k + (3\nu + 10)p]\varphi^3 + \\ + 3p[p + (2 + \nu)\varphi_k]\varphi^2 + (2p^2\varphi_k + 3)\varphi + 9ap \}. \quad (9)$$

Независимая переменная восстанавливается квадратурой

$$\ln \xi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{p(\varphi)}, \quad (10)$$

где φ_0 — фиксированное значение, соответствующее $\xi = 1$.

Для дальнейшего изучения характера интегральных кривых понадобится исследование особых точек уравнения (9). При некоторых значениях p и φ правая часть (9) принимает неопределенную форму $\frac{0}{0}$. Оказывается, уравнение имеет четыре действительные особые точки:

$$K(\varphi = 0, p = 0), L(\varphi = -\varphi_k, p = p_1), M(\varphi = -\varphi_k, p = p_2), \\ N(\varphi = \varphi_1, p = 0),$$

p_1 и p_2 являются корнями квадратного уравнения

$$\varphi_k^2 p^2 + (9a - 4\varphi_k^3)p + 4\varphi_k^4 - 3\varphi_k = 0,$$

где

$$\varphi_k = b \frac{t^{1/3} a^{1/3}}{r^{1/3}} > 0.$$

Тогда

$$p_{1,2} = \frac{4\varphi_k^3 - 9a \pm \sqrt{\delta}}{2\varphi_k^2}; \quad \delta = \sqrt{12\varphi_k^3(1 - 6a) + 81a^2}. \quad (11)$$

Произведенные оценки показывают, что $a \ll 1$, и тогда можно положить

$$\delta = \sqrt{12\varphi_k^3 + 81a^2};$$

φ_1 является корнем кубического уравнения

$$\varphi^3 + \frac{3\nu\varphi_k}{2+3\nu}\varphi^2 + \frac{3}{2(2+3\nu)} = 0. \quad (12)$$

Из трех корней уравнения один φ_1 является действительным и равен

$$\varphi_1 = \phi_1 + \phi_2 - \frac{\nu\varphi_k}{2+3\nu};$$

где

$$\varphi_{1,2} = \sqrt[3]{B \pm \sqrt{D}};$$

$$B = -\left(\frac{\nu\varphi_k}{2+3\nu}\right)^3 - \frac{3}{4(2+3\nu)}; \quad D = \frac{3(\nu\varphi_k)^3}{2(2+3\nu)^4} + \frac{9}{16(2+3\nu)^2} > 0. \quad (13)$$

Другая возможность интегрирования уравнения диффузии (в общем трехмерном случае) связана с наличием в уравнении малого параметра a . Так, например, для ряда жидкостей и комнатных температур

$$a \sim 10^{-5} - 10^{-7} \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Решение уравнения (5) будем искать в виде ряда

$$u = u_0 + au_1 + a^2u_2 + \dots \quad (14)$$

Подставив разложение (14) в уравнение (5) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях a , получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} &= u_0 [(3u_0 + 2b)(\nabla u_0)^2 + u_0(u_0 + b)\Delta u_0]; \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= 2u_1(3u_0 + b)(\nabla u_0)^2 + 2(3u_0 + 2b)u_0\nabla u_0\nabla u_1 + \\ &\quad + u_0u_1(3u_0 + 2b)\Delta u_0 + u_0^2(u_0 + b)\Delta u_0. \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (15)$$

В общем виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial t} &= A(u_0)u_{k-1} + B(u_0, u_1)u_{k-2} + \dots + D(u_0, \dots, u_{k-q-1})u_q + \\ &\quad + \dots + F(u_0, \dots, u_{k-1})u_0; \end{aligned} \quad (16)$$

$$D(u_0, \dots, u_{k-q-1}) = \sum_{i,j=0}^{k-q-1} d_{ij}\nabla u_i\nabla u_j + \sum_{i=0}^{k-q-1} g_i\Delta u_i, \quad (17)$$

где

$$d_{ij} = d_{ji} = \begin{cases} 3u_{k-q-(i+j)-1} & 0 \leq i+j < k-q-1; \\ 3u_0 + 2b & i+j = k-q-1; \end{cases}$$

$$g_i = \begin{cases} u_{k-q-i-1}(2u_0 + b) + \sum_{\substack{e, e > 0 \\ e \leq i; e+i=k-q-i-1}} u_e u_e & i \neq k-q-1; \\ u_0(u_0 + b) & i = k-q-1; \end{cases}$$

Пользуясь выражением (17), выпишем первые два коэффициента A и B .

Для коэффициента $A(u_0)$ $q = k - 1$;

$$A(u_0) = d_{00}(\nabla u_0)^2 + g_0 \Delta u_0 = (3u_0 + 2b)(\nabla u_0)^2 + u_0(u_0 + b)\Delta u_0. \quad (18)$$

Для коэффициента $B(u_0, u_1)$ $q = k - 2$;

$$\begin{aligned} B(u_0, u_1) &= d_{00}(\nabla u_0)^2 + 2d_{01}\nabla u_0\nabla u_1 + g_0\Delta u_0 + g_1\Delta u_1 = \\ &= 3u_1(\nabla u_0)^2 + 2(3u_0 + 2b)\nabla u_0\nabla u_1 + u_1(2u_0 + b)\Delta u_0 + u_0(u_1 + b)\Delta u_1. \end{aligned} \quad (19)$$

Интегрируя уравнение (16), получим

$$u_k = \psi_k(\bar{r}, t) + \bar{u}_k(\bar{r}). \quad (20)$$

Например,

$$u_0 = \bar{u}_0(\bar{r});$$

$$u_1 = A(u_0)u_0t + \bar{u}_1;$$

$$u_2 = A(u_0) \left[\frac{1}{2} A(u_0)u_0t^2 + \bar{u}_1t \right] + B(u_0, \frac{1}{2} A(u_0)u_0t^2 + \bar{u}_1t) u_0 + \bar{u}_2.$$

.....

Здесь остаются неопределенными функции $u_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots$

В частности, решение получим, если положить

$$\bar{u}_k = \begin{cases} u_0 & k = 0; \\ 0 & k \neq 0. \end{cases}$$

Из начального условия $u(\bar{r}, 0) = f(\bar{r})$ следует, что $u_0 = f(\bar{r})$, которым и определяется значение искомой функции u в произвольный момент времени.

Если ограничиться первыми тремя членами разложения, а именно

$$u = u_0 + au_1 + a^2u_2, \quad (21)$$

и положить $\bar{u}_2 = 0$, то $\bar{u}_1$ будет решением линейного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} u_0^2(u_0 + b)\Delta \bar{u}_1 + u_0(3u_0 + 2b)\nabla u_0\nabla \bar{u}_1 + \left[\frac{1}{a} + A(u_0) + 3u_0(\nabla u_0)^2 + \right. \\ \left. + u_0(2u_0 + b)\Delta u_0 \right] \bar{u}_1 + \phi(u_0) = \frac{1}{a^2} f_1(\bar{r}), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$f_1(\bar{r}) = u(\bar{r}, t_1).$$

Чтобы проинтегрировать это уравнение, требуется установить граничное условие для $\bar{u}_1$. Отыскание последнего связано с возможностью непосредственного нахождения асимптотического решения уравнения диффузии [3, 4].

Уравнение (4) можно переписать в виде

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = 2aN_2(N_2 - N_{2,\kappa})(\nabla N_2)^2 + a(N_2 - N_{2,\kappa})^2 [(\nabla N_2)^2 + N_2\Delta N_2]. \quad (23)$$

Отсюда видно, что в окрестности критической точки ($N_2 \rightarrow N_{2,к}$) путем преобразования

$$N_2 = N_{2,к} e^{\varphi} \quad (24)$$

с учетом $|\varphi| \ll 1$ получим предельное уравнение изотермической диффузии

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = A \varphi (\nabla \varphi)^2, \quad (25)$$

где

$$A = 2a N_{2,к}^3.$$

Уравнение (25) допускает разделение переменных

$$\varphi(\bar{r}, t) = \Theta(t) [\vartheta(x) + \omega(y) + \psi(z)]. \quad (26)$$

Общее решение

$$N_2 = N_{2,к} \exp \left\{ \frac{kx + ly + nz + m}{\sqrt{2(pt+1)}} \right\}; \quad (27)$$

$$k^2 + l^2 + n^2 = -\frac{\rho}{A},$$

где k, l, n, m — постоянные, определяемые из начальных и граничных условий.

Граничное условие для $\bar{u}_1$ определяется коэффициентом при первой степени параметра a в разложении преобразованного к u решения (27). Неопределенной функцией пока остается u_0 . Для нее удобно взять решение уравнения

$$(\nabla u_0)^2 = C. \quad (28)$$

Граничное условие для (28) находится так же, как и для $\bar{u}_1$.

Комбинированное использование метода разложения по малому параметру и асимптотического решения позволит найти первые приближения мольной доли диффундирующего вещества.

Практическая оценка предложенных методов интегрирования уравнения диффузии составит содержание дальнейшей работы.

Л и т е р а т у р а

1. И. Р. Кричевский, Н. Е. Хазанова, Л. Р. Линшиц. ДАН СССР, **99**, 113, 1954.
2. И. Р. Кричевский, Ю. В. Цеханская. ЖФХ, **30**, 2315, 1956.
3. Л. А. Ротт. ДАН СССР, **121**, 678, 1958.
4. Л. А. Ротт. Доклад на совещании по критическим явлениям и флуктуациям в растворах. М., январь 1960.
5. Л. А. Ротт. ДАН СССР, **134**, 394, 1960.
6. И. Р. Кричевский, Н. Е. Хазанова, Л. С. Лесневская. «Инженерно-физический журнал», **5**, № 2, 101, 1962.
7. Л. И. Седов. Методы подобия и размерности в механике. М., ГИТТЛ, 1957.