П. Я. АРТЕМОВ

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА НЕЗАВИСИМОСТИ ДЕЙСТВИЯ СИЛ К ОТЫСКАНИЮ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ РАСЧЕТЕ КРУГЛЫХ ПЛИТ НА ОСЕСИММЕТРИЧНУЮ НАГРУЗКУ

Определение начальных параметров при расчете круглых плит на осесимметричную нагрузку представляет довольно трудоемкую задачу, особенно при сложных случаях загружения.

В данной работе предлагается способ вычисления начальных параметров, устраняющий необходимость составления и совместного решения уравнений. Приводятся таблицы начальных параметров для различных схем закрепления плиты и при различных, наиболее характерных нагрузках.

Таблица формул начальных параметров дает возможность определить начальные параметры при любом случае загружения путем суммирования соответствующих табличных данных. Поэтому можно сразу написать уравнение упругой поверхности, уравнение угла наклона касательной к поверхности в радиальном направлении и изгибающих моментов M_r и M_θ.

Дифференциальное уравнение симметрично нагруженной плиты в цилиндрических координатах

$$\frac{d^4w}{d\rho^4}+\frac{2}{\rho}\frac{d^3w}{d\rho^3}-\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2w}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho^3}\frac{dw}{d\rho}=\frac{q(\rho)}{D}, \qquad (1)$$

где w — прогиб плиты, зависящий только от полярной координаты ρ;

$q(\rho)$ — интенсивность нагрузки, перпендикулярной к срединной плоскости плиты;

$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость плиты;

h — толщина плиты;

E и μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала плиты.

Решая однородное дифференциальное уравнение (1) в начальных параметрах, получаем

$$Dw = Dw_0 + D\Theta_0 \frac{\rho^2}{r} \frac{\lambda_1(1-\alpha^2) - 2\lambda_2\alpha^2 \ln\alpha}{4} +$$

$$+ M_{r_0}\rho^2 \frac{2\alpha^2 \ln\alpha + (1-\alpha^2)}{4} + Q_{r_0}\rho^3 \frac{\alpha\left[(1+\alpha^2)\ln\alpha + (1-\alpha^2)\right]}{4} + \phi(\rho), \quad (2)$$

где w_0 — прогиб плиты в начале отсчета;
Θ_0 — угол наклона касательной к поверхности в радиальном направлении в начале отсчета;
M_{r_0} — погонный изгибающий момент в начале отсчета;
Q_{r_0} — погонная поперечная сила в начале отсчета;
$\alpha = \frac{r}{\rho}$;
$\lambda_1 = 1 - \mu$; $\lambda_2 = 1 + \mu$;
r — внутренний радиус контура окружности плиты;
ρ — текущий радиус;
$\phi(\rho)$ — влияние приложенной нагрузки на прогиб плиты.

Введя обозначения

$$\omega_\Theta = \frac{\lambda_1(1-\alpha^2) - 2\lambda_2\alpha^2 \ln\alpha}{4};$$

$$\omega_M = \frac{1}{4}\left[2\alpha^2 \ln\alpha + (1-\alpha^2)\right];$$

$$\omega_Q = \frac{1}{4}\left[(1+\alpha^2)\ln\alpha + (1-\alpha^2)\right],$$

получим

$$Dw = Dw_0 + D\Theta_0 \frac{\rho^2}{r}\omega_{\Theta_0} + M_{r_0}\rho^2\omega_{M_{r_0}} + Q_{r_0}\rho^3\omega_{Q_0} + \phi(\rho); \quad (3)$$

$$Dw' = D\Theta = D\Theta_0 \frac{\rho}{r}\omega'_{\Theta_0} + M_{r_0}\rho\omega'_{M_{r_0}} + Q_{r_0}\rho^2\omega'_{Q_0} + \phi'(\rho). \quad (4)$$

Уравнения изгибающих моментов M_r и M_Θ, выраженные через начальные параметры:

$$M_r = D\Theta_0 \frac{\lambda_1\lambda_2}{r}\Omega_{\Theta_0 M_r} + M_{r_0}\Omega_{M_{r_0} M_r} + Q_{r_0}\rho\Omega_{Q_0 M_r} + \Phi_{M_r}(\rho); \quad (5)$$

$$M_\Theta = D\Theta_0 \frac{\lambda_1\lambda_2}{r}\Omega_{\Theta_0 M_{\Theta_0}} + M_{r_0}\Omega_{M_{r_0} M_\Theta} + Q_{r_0}\rho\Omega_{Q_0 M_\Theta} + \Phi_{M_\Theta}(\rho). \quad (6)$$

Первый индекс показывает, от какого силового и геометрического фактора зависит коэффициент Ω, и второй — в какое уравнение он входит.

Уравнение поперечной силы

$$Q_r = Q_{r_0}\frac{r}{\rho} + \Phi_{Q_r}(\rho). \quad (7)$$

Значения функций, входящих в уравнения (4), (5), (6) и (7), приводятся в табл. 1, а кривые на графиках (рис. 1, 2, 3, 4) дают возможность найти величину этих функций для различных значений α. Табл. 1 и данные для построения кривых (рис. 1, 2, 3 и 4) заимствованы из [1].

Положительные направления M_r, M_Θ и Q_r показаны на рис. 5.

Определим начальные параметры для частных случаев закрепления и общего случая симметричного загружения.

1. Кольцеобразная плита жестко заделана по внешнему радиусу. В этом случае при $\rho = r$, $M_r = 0$ и $Q_r = 0$ получим уравнение упругой поверхности плиты

$$Dw = Dw_0 + D\Theta_0 \frac{\rho^2}{r}\,\omega_{\Theta_0} + \phi(\rho) \tag{8}$$

и угол наклона касательной к поверхности в радиальном направлении

$$D\Theta = D\Theta_0 \frac{\rho}{r}\,\omega'_{\Theta_0} + \phi'(\rho). \tag{9}$$

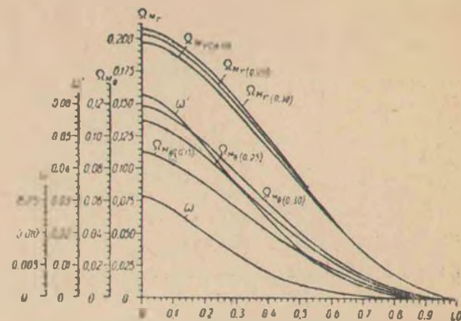


Рис. 1. График функций при нагружении плиты равномерно распределенной нагрузкой $q = 1$ (индексы указывают, в какое уравнение входит функция, а скобки при индексе показывают, какому значению μ соответствует кривая)

Начальные параметры определятся из условия закрепления плиты по внешнему контуру, т. е. при $\rho = R$.

Для выбранного случая закрепления при $\rho = R$ получаем $w = 0$ и $\Theta = 0$. Поэтому, подставив R вместо ρ в уравнения (8) и (9) и приравняв их нулю, получим два уравнения для определения начальных параметров; решая последние относительно $D\Theta_0$ и Dw_0, находим

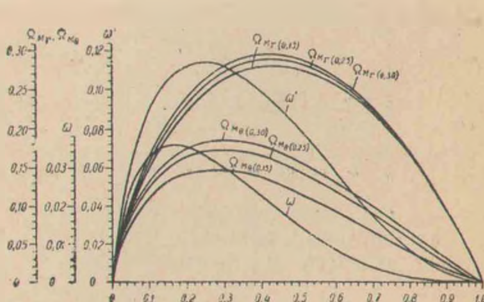


Рис. 2. Графики функций при нагружении плиты силами $P = 1$. Значение индексов то же, что и на рис. 1

$$D\Theta_0 = -\frac{\phi'(R)}{\frac{R}{r}\,\omega'_{\Theta_0}}; \tag{10}$$

$$Dw_0 = \phi'(R)\,\frac{R\omega_{\Theta_0}}{\omega'_{\Theta_0}} - \phi(R). \tag{11}$$

Начальные параметры для частных случаев закрепления и общего случая симметричного загружения, полученные этим методом, сгруппированы в табл. 2.

Так как изгибающий момент M_θ не входит в уравнения для определения начальных параметров, то в табл. 2 и 3 оставлены только индексы, показывающие, от какого фактора зависит коэффициент, т. е. вместо $\Omega_{M_{r_0} M_r}$ принимаем $\Omega_{M_{r_0}}$ и т. д.

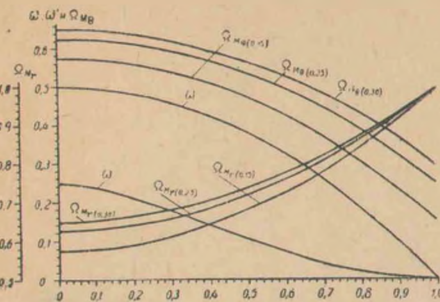


Рис. 3. Графики функций при нагружении плиты моментами $M = 1$. Значение индексов то же, что и на рис. 1

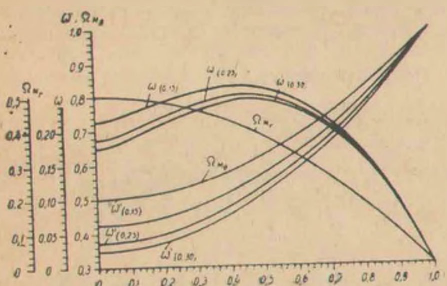


Рис. 4. График функции при угловом перемещении плиты на $\Theta = 1$. Значение индексов то же, что и на рис. 1

2. Сплошная плита. При сплошной плите начальное сечение принято при $\rho = 0$. Отсюда уравнения для w, Θ, M_r и M_θ:

$$Dw = Dw_0 + M_{r_0} \frac{\rho^2}{2(1+\mu)} + \phi(\rho); \tag{12}$$

$$Dw' = D\Theta = M_{r_0} \frac{\rho}{1+\mu} + \phi'(\rho); \tag{13}$$

$$M_r = M_{r_0} + \Phi_{M_r}(\rho); \tag{14}$$

$$M_\theta = M_{r_0} + \Phi_{M_\theta}(\rho). \tag{15}$$

Плита оперта по радиусу $\rho = R_1$. В этом случае необходимо предварительно определить интенсивность опорной реакции по уравнению

$$P_1 = \frac{\Sigma w}{2\pi R_1}, \tag{16}$$

где Σw — сумма проекций всех сил на ось w.

В табл. 3 собраны формулы начальных параметров для частных случаев закрепления и загружения. Формулы табл. 3 получены путем замены $\phi(\rho)$, $\phi'(\rho)$, $\Phi_{M_r}(\rho)$ и $\Phi_{M_\theta}(\rho)$ в табл. 2 на частные случаи загружения по табл. 1.

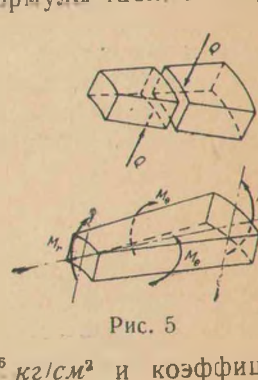


Рис. 5

Применение описанного метода покажем на примерах.

Пример 1. Круглая плита толщиной $h = 3$ *см* и радиусом $R = 90$ *см* оперта по контуру, находится под действием равномерно распределенной нагрузки $q = 0{,}8$ *кг/см²*, расположенной по радиусам $a = 20$ *см* и $b = 70$ *см*. Материал — сталь, $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ *кг/см²* и коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$.

Таблица 1

Формулы функций, входящих в расчетные уравнения для частных случаев нагружения*

	Влияние сосредоточенных моментов, равномерно распределенных по окружности $\rho = a$, концентричной с контуром плиты $\rho = R$	Влияние сосредоточенных сил, равномерно распределенных по окружности $\rho = a$, концентричной с контуром плиты $\rho = R$	Влияние равномерно распределенной нагрузки, расположенной на площади, заключенной между двумя окружностями радиусами $\rho = a$ и $\rho = b$, концентричными с контуром плиты $\rho = R$	Влияние геометрического фактора, изменение угла поворота на окружности $\rho = a$, концентричной с контуром плиты
1	2	3	4	5
$\phi(\rho)$	$\frac{\rho^2}{4}[2\alpha^2 \ln\alpha + (1-\alpha^2)] = \rho^2\omega_M$	$\frac{a\rho^2}{4}[1-\alpha^2 + (1+\alpha^2)\ln\alpha] = \rho^3\omega_P$	$\rho < b$: $\frac{\rho^4}{64}[1-5\alpha^4+4\alpha^2+4(\alpha^4+2\alpha^2)\ln\alpha] = \rho^4\omega_q$; $\rho > b$: $\rho^4(\omega_{aq}-\omega_{bq})$	$\frac{\rho^3}{4a}[\lambda_1(1-\alpha^2) - 2\alpha^2\lambda_2\ln\alpha] = \frac{\rho^2}{a}\omega_\theta$
$\phi'(\rho)$	$\frac{\rho}{2}(1-\alpha^2) = \rho\omega'_M$	$\frac{\rho^2}{4}\alpha(1-\alpha^2+2\ln\alpha) = \rho^2\omega'_P$	$\rho < b$: $\frac{\rho^3}{16}(1-\alpha^4+4\alpha^2\ln\alpha) = \rho^3\omega'_q$; $\rho > b$: $\rho^3(\omega'_{aq}-\omega'_{bq})$	$\frac{1}{2\alpha}(\lambda_1+\lambda_2\alpha^2) = \frac{\rho}{a}\omega'_\theta$
$\Phi_{M_r}(\rho)$	$\frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_1\alpha^2) = \Omega_{MM_r}$	$\frac{a}{4}[\lambda_1(1-\alpha^2) - 2\lambda_2\ln\alpha] = \rho\Omega_{PM_r}$	$\rho < b$: $\frac{\rho^2}{16}(4\alpha^2-\lambda_1\alpha^4-\lambda_3-4\lambda_2\alpha^2\ln\alpha) = \rho^2\Omega_{qM_r}$; $\rho > b$: $\rho^2(\Omega_{aq}-\Omega_{bq})_{M_r}$	$\frac{\lambda_1\lambda_2}{2a}(1-\alpha^2) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{a}\Omega_{\theta M_r}$

* Знаки функций, входящих в таблицу, зависят от знаков силовых и деформационных факторов.

Продолжение табл. 1

1	2	3	4	5
$\Phi_{M_\Theta}(\rho)$	$\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1\alpha^2) = \Omega_{MM_\Theta}$	$\frac{a}{4}[\lambda_1(\alpha^2 - 1) - 2\lambda_2 \ln \alpha] = \rho\Omega_{PM}$	$\rho < b$ $\frac{\rho^2}{16}(4\mu\alpha^2 + \lambda_1\alpha^4 - \lambda_4 - 4\lambda_2\alpha^2 \ln \alpha) = \rho\Omega_{qM_\Theta}$ $\rho > b$ $\rho^2 \left(\Omega_{aq} = \Omega_{bq}\right)_{M_\Theta}$	$\frac{\lambda_1\lambda_2}{2a}(1 + \alpha^2) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{a}\Omega_{\Theta M_\Theta}$
$\Phi_{Q_r}(\rho)$	0	$\frac{a}{\rho}$	$\frac{\rho}{2}(\alpha^2 - 1)$	0

Таблица 2

Формулы начальных параметров для частных случаев закрепления и общего случая симметричного загружения

Схема закрепления плиты	Начальные параметры
1	2
А. Круглая сплошная плита Свободно опертая по контуру $\rho = R$	$Dw_0 = \frac{R^2}{2\lambda_2}\Phi_{M_r}(R) - \phi(R);\quad M_{r_0} = -\Phi_{M_r}(R);\quad D\Theta_0 = 0;\quad Q_{r_0} = 0$
Свободно опертая по окружности, концентричной к ее контуру $\rho = R_1$	$Dw_0 = \frac{R_1^2}{2\lambda_2} M_{r_0} - \phi(R_1);\quad M_{r_0} = \Phi_{M_r}(R) - \Phi_{P_1 M_r}(R);\quad D\Theta_0 = 0;\quad Q_{r_0} = 0$
Защемленная по контуру с $\rho = R$	$Dw_0 = \frac{1}{2} R\phi'(R) - \phi(R);\quad M_{r_0} = -\frac{\lambda_2}{R}\phi'(R);\quad D\Theta_0 = 0;\quad Q_{r_0} = 0$
Свободно опертая по окружности, концентричной с контуром $\rho = R_1$, и защемленная по контуру	$P_1 = -\frac{\left(1 - \frac{R_1^2}{R^2}\right) R\phi'(R) + 2\phi(R_1) - 2\phi(R)}{R^3\left[\left(1 - \frac{R_1^2}{R^2}\right)\omega'_{P_1} - 2\omega_{P_1}\right]}$ $M_{r_0} = \frac{\lambda_2}{R}\left[\phi'_{P_1}(R) - \phi'(R)\right];\quad Dw_0 = -\frac{R_1^2}{2R}\left[\phi'_{P_1}(R) - \phi'(R)\right] - \phi(R)$

Продолжение табл. 2

1	2
Б. Плита в виде кругового кольца Свободно опертая по контуру $\rho = R$	$Dw_0 = \frac{R^2\omega_{\Theta_0}}{\lambda_1\lambda_2\Omega_{\Theta_0}}\,\Phi_{M_r}(R) - \phi(R);\quad D\Theta_0 = -\frac{r}{\lambda_1\lambda_2\Omega_{\Theta_0}}\,\Phi_{M_r}(R);\quad M_{r_0} = 0;\quad Q_{r_0} = 0$
Свободно опертая по окружности, концентричной к ее контурам $\rho = R_1$	$Dw_0 = \frac{R_1^2\omega_{\Theta_0}}{\lambda_1\lambda_2\Omega_{\Theta_0}}\left[\Phi_{M_r}(R) - \Phi_{P_1M_r}(R)\right];$ $D\Theta_0 = \frac{r}{\lambda_1\lambda_2\Omega_{\Theta_0}}\left[\Phi_{M_r}(R) - \Phi_{P_1M_r}(R)\right];\quad M_{r_0} = 0;\quad Q_{r_0} = 0$
Защемленная по внешнему контуру $\rho = R$	$Dw_0 = R\,\frac{\omega_{\Theta_0}}{r\,\omega_{\Theta_0}}\,\phi'(R) - \phi(R);\quad D\Theta_0 = \frac{r\phi'(R)}{R\,\omega_{\Theta_0}};\quad M_{r_0} = 0;\quad Q_{r_0} = 0$
Свободно опертая по внешнему контуру $\rho = R$ и защемленная по внутреннему контуру $\rho = r$	$Q_{r_0} = \frac{R^2\omega_{M_{r_0}}\Phi_{M_{r_0}}(R) - \Omega_{M_{r_0}}\phi(R)}{R^3\left(\omega_{Q_0}\Omega_{M_{r_0}} - \Omega_{Q_0}\omega_{M_{r_0}}\right)};\quad M_{r_0} = \frac{\Omega_{M_{r_0}}\phi(R) - R^2\omega_{Q_0}\Phi_{M_r}(R)}{R^2\left(\omega_{Q_0}\Omega_{M_{r_0}} - \Omega_{Q_0}\omega_{M_{r_0}}\right)};$ $Dw_0 = 0;\quad D\Theta_0 = 0$
Защемленная по внутреннему контуру $\rho = r$ и свободная от закрепления по внешнему $\rho = R$	$M_{r_0} = -\frac{1}{\Omega_{M_{r_0}}}\left[Q_{r_0}R\Omega_{Q_0} + \Phi_{M_r}(R)\right];\quad Dw_0 = 0;\quad D\Theta_0 = 0$

1	2
Защемленная по внутреннему и наружному контурам	$Q_{r_0} = \dfrac{R\omega_{M_{r_0}}\phi'(R) - \omega'_{M_{r_0}}\phi(R)}{R^3\left(\omega_{Q_0}\omega'_{M_{r_0}} - \omega'_{Q_0}\omega_{M_{r_0}}\right)}$; $M_{r_0} = \dfrac{\omega'_{Q_0}\phi(R) - R\omega_{Q_0}\phi'(R)}{R\left(\omega_{Q_0}\omega'_{M_{r_0}} - \omega'_{Q_0}\omega_{M_{r_0}}\right)}$; $Dw_0 = 0$; $D\Theta_0 = 0$
Свободно опертая по внутреннему и наружному контурам	$Q_{r_0} = \dfrac{R^2\omega_{\Theta_0}\Phi_{M_r}(R) - \lambda_1\lambda_2\Omega_{\Theta_0}\phi(R)}{R^3\left(\lambda_1\lambda_2\omega_{Q_0}\Omega_{\Theta_0} - \omega_{\Theta_0}\Omega_{Q_0}\right)}$; $D\Theta_0 = \dfrac{r\left[\Omega_{Q_0}\phi(R) - R^2\omega_{Q_0}\Phi_{M_r}(R)\right]}{R^2\left(\lambda_1\lambda_2\omega_{Q_0}\Omega_{\Theta_0} - \omega_{\Theta}\Omega_{Q_0}\right)}$; $Dw_0 = 0$; $M_{r_0} = 0$
Свободно опертая по внутреннему контуру и защемленная по внешнему контуру	$Q_{r_0} = \dfrac{R\omega_{\Theta_0}\phi'(R) - \omega'_{\Theta_0}\phi(R)}{R^3\left(\omega'_{\Theta_0}\omega_{Q_0} - \omega_{\Theta_0}\omega'_{Q_0}\right)}$; $D\Theta_0 = \dfrac{r\left[\omega'_{Q_0}\phi(R) - R\omega_{Q_0}\phi'(R)\right]}{R^2\left(\omega'_{\Theta_0}\omega_{Q_0} - \omega_{\Theta_0}\omega'_{Q_0}\right)}$; $Dw_0 = 0$; $M_r = 0$

Требуется написать уравнение срединной поверхности плиты, изгибающих моментов M_r и M_θ. Для случая сплошного загружения плиты найти w_{max} и $(M_r)_{max}$.

Решение. Для решения задачи воспользуемся формулами (12), (14) и (15).

Начальные параметры, входящие в эти уравнения, определим по табл. 3 (первая строка)

$$Dw_0 = qR^4\left[\left(\omega_{aq} - \omega_{bq}\right) - \frac{1}{2k_2}\left(\Omega_{aq} - \Omega_{bq}\right)\right]; \tag{I}$$

$$M_{r_0} = qR^2\left(\Omega_{aq} - \Omega_{bq}\right). \tag{II}$$

По графикам (рис. 2) для $\alpha_1 = \frac{20}{90} = 0{,}222$, $\alpha_2 = \frac{70}{90} = 0{,}778$ и $\mu = 0{,}3$ находим

$\omega_{aq} = 0{,}00909$; $\omega_{bq} = 0{,}00009$; $\Omega_{aq} = 0{,}17044$; $\Omega_{bq} = 0{,}02122$.

Подставив найденные значения в (I) и (II), получаем

$$Dw_0 = -0{,}04839\ qR^4;$$

$$M_{r_0} = 0{,}14922\ qR^2\ кг\cdot см/см.$$

Подставив в уравнения (12), (14) и (15) найденные значения Dw_0 и M_{r_0} и заменив $\phi(\rho)$, $\Phi_{M_r}(\rho)$ и $\Phi_{M_\theta}(\rho)$ по табл. 1, получим уравнения срединной поверхности и изгибающих моментов M_r и M_θ:

$$Dw = -0{,}04839\ qR^4 + \frac{0{,}14285}{2{,}6}\ qR^2\rho^2 - q\rho^4\left(\omega_{aq} - \omega_{bq}\right); \tag{III}$$

$$M_r = 0{,}14922\ qR^2 - q\rho^2\left(\Omega_{aqr} - \Omega_{bqr}\right); \tag{IV}$$

$$M_\theta = 0{,}14922\ qR^2 - q\rho^2\left(\Omega_{aq\theta} - \Omega_{bq\theta}\right). \tag{V}$$

Для частного случая, когда $a = 0$ и $b = R$, получим

$$M_{r_0} = 0{,}20625\ qR^2;$$

$$Dw_0 = 0{,}06370\ qR^4.$$

Подставив эти значения в уравнения (12) и (14), найдем

$$Dw = -0{.}06370\ qR^4 + 0{,}07932\ qR^2\rho^2 - 0{,}015625\ q\rho^4; \tag{VI}$$

$$M_r = 0{,}20625\ qR^2 - 0{,}20625\ q\rho^2 = 0{,}20625\ qR^2\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right). \tag{VII}$$

Из уравнений (VI) и (VII) видно, что наибольшие значения и w_{max} и $(M_r)_{max}$ получат при $\rho = 0$:

$$(M_r)_{max} = M_{r_0} = 0{,}20625\ qR^2;$$

$$w_{max} = -0{,}06370\ \frac{qR^4}{D} = -0{,}12\ см.$$

Пример 2. Круглая плита (рис. 6) толщиной $h = 3$ см и радиусом $R = 10$ *м* свободно оперта по наружному контуру. Внутренний контур жестко заделан по радиусу $r = 2$ *м*. Плита находится под действием равномерно распределенной нагрузки $q = 0{,}8$ *т/м*^{2} на участке $a = 2$ *м*, $b = 6$ *м* и под действием изгибающих моментов $M = 2$ *тм/м*, приложенных на радиусе 6 *м*, и сосредоточенных сил $P = 1{,}2$ *т/м* на радиусе 8 *м*. Коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}15$.

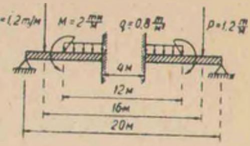


Рис. 6

Требуется написать уравнение срединной поверхности плиты изгибающих моментов M_r и M_θ.

Решение. Уравнения срединной поверхности w, изгибающих моментов M_r и M_θ для данного случая закрепления принимают вид (см. уравнения (3), (5), (6))

$$Dw = M_{r_0}\rho^2\omega_{M_{r_0}} + Q_{r_0}\rho^3\omega_{Q_0} + \phi(\rho); \qquad \text{(I)}$$

$$M_r = M_{r_0}\Omega_{M_{r_0}M_r} + Q_{r_0}\rho\,\Omega_{Q_0M_r} + \Phi_{M_r}(\rho); \qquad \text{(II)}$$

$$M_\theta = M_{r_0}\Omega_{M_{r_0}M_\theta} + Q_{r_0}\rho\,\Omega_{Q_0M_\theta} + \Phi_{M_\theta}(\rho), \qquad \text{(III)}$$

так как в начале отсчета при $r = 2$ *м* $w_0 = 0$ и $\Theta_0 = 0$.

Начальные параметры M_{r_0} и Q_{r_0} определим по формулам табл. 3 (строки 8*а*, 8*б* и 8*в*), пользуясь принципом независимости действия сил, т. е.

$$M_{r_0} = (M_{r_0})_q + (M_{r_0})_M + (M_{r_0})_P; \qquad \text{(IV)}$$

$$Q_{r_0} = (Q_{r_0})_q + (Q_{r_0})_M + (Q_{r_0})_P. \qquad \text{(V)}$$

По графикам (рис. 1—4) находим значения коэффициентов ω и Ω. Значения коэффициентов $\Omega_{Q_0} = 0{,}2258$; $\Omega_{M_{r_0}} = 0{,}5920$; $\omega_{Q_0} = 0{,}03570$; $\omega_{M_{r_0}} = 0{,}20780$ находим

при $\alpha = \dfrac{r}{R} = 0{,}2$; коэффициенты $\omega_{aq} = 0{,}00979$ и $\Omega_{aq} = 0{,}16845$ при

$\alpha = \dfrac{a}{R} = 0{,}2$; $\omega_{bq} = 0{,}00088$, $\Omega_{bq} = 0{.}06089$, $\Omega_M = 0{,}07280$ и $\omega_M = 0{,}06800$

при $\alpha = \dfrac{b}{R} = 0{,}6$; $\Omega_P = 0{,}16390$ и $\omega_P = 0{,}00120$ при $\alpha = 0{,}8$. Подставив эти значения и данные задачи в вышеуказанные формулы, получим

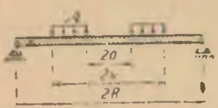
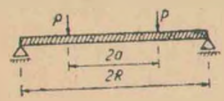
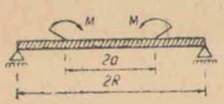
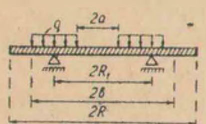
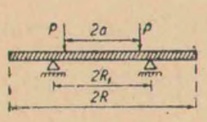
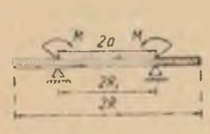
$$(M_{r_0})_q = -5{,}6744 \text{ тм/м}; \quad (M_{r_0})_M = 0{,}8248 \text{ тм/м};$$

$$(M_{r_0})_P = -2{,}59534 \text{ тм/м};$$

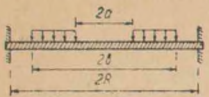
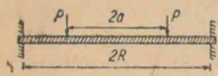
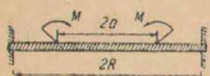
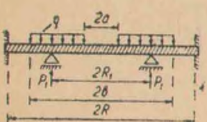
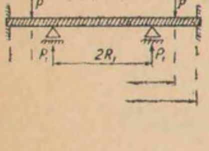
$$(Q_{r_0})_q = 5{,}302 \text{ т/м}; \quad (Q_{r_0})_M = -0{,}8605 \text{ т/м}; \quad (Q_{r_0})_P = 1{,}550 \text{ т/м}.$$

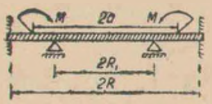
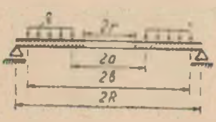
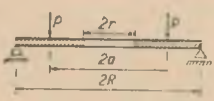
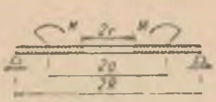
Таблица 3

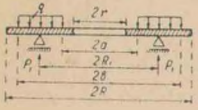
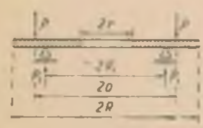
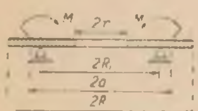
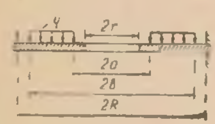
Формулы начальных параметров для частных случаев закрепления и частных случаев симметричного загружения

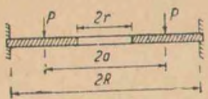
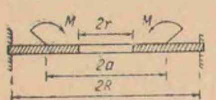
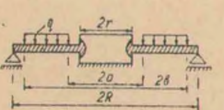
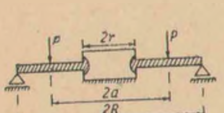
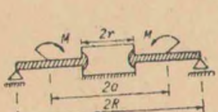
№ пп.	Схемы закрепления и загружения	Начальные параметры
1	2	3
1а		$DW_0 = qR^4\left[(\omega_{aq}-\omega_{bq}) - \frac{1}{2\lambda_2}(\Omega_{aq}-\Omega_{bq})\right]$; $M_{r_0} = qR^2(\Omega_{aq}-\Omega_{bq})$
1б		$DW_0 = PR^3\left(\omega_P - \frac{1}{2\lambda_2}\Omega_P\right)$; $M_{r_0} = PR\Omega_P$
1в		$DW_0 = -MR^2\left(\frac{1}{2\lambda_2}\Omega_M - \omega_M\right)$; $M_{r_0} = M\Omega_M$
2а		$DW_0 = qR^4\left\{(\omega_{aq}-\omega_{bq}) - \frac{R_1^2}{2R^2\lambda_2}\left[-\frac{R}{2R_1}(\alpha_2^2-\alpha_1^2)\Omega_{P_1} + (\Omega_{aq}-\Omega_{bq})\right]\right\}$; $M_{r_0} = qR^2\left[-\frac{R}{2R_1}(\alpha_2^2-\alpha_1^2)\Omega_{P_1} + (\Omega_{aq}-\Omega_{bq})\right]$; при $a > R_1$ $\omega_{aq}-\omega_{bq}=0$; при $b=R$ $\omega_{bq}=0$
2б		$DW_0 = PR_1^3\left[\omega_P - \frac{R}{2\lambda_2}\left(\Omega_P - \frac{a}{R_1}\Omega_{P_1}\right)\right]$; $M_{r_0} = PR\left(\Omega_P - \frac{a}{R_1}\Omega_{P_1}\right)$; при $a \geqslant R_1$ $\omega_P = 0$
2в		$DW_0 = -MR_1^2\left(\frac{1}{2\lambda_2}\Omega_M - \omega_M\right)$; $M_{r_0} = M\Omega_M$; при $a \geqslant R_1$ $\omega_M = 0$

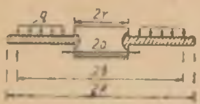
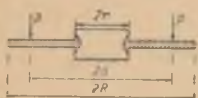
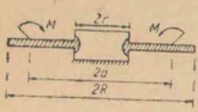
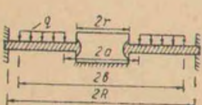
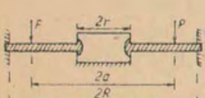
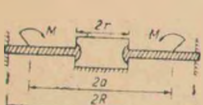
Продолжение табл. 3

1	2	3
3а		$DW_0 = qR^4\left[\left(\omega_a - \omega_b\right) - \frac{1}{2}\left(\omega'_a - \omega'_b\right)\right];$ $M_{r_0} = qR^2\lambda_2\left(\omega'_a - \omega'_b\right)$
3б		$DW_0 = PR^3\left(\omega_P - \frac{1}{2}\,\omega_P\right);\quad M_{r_0} = PR\lambda_2\omega'_P$
3в		$DW_0 = -MR^2\left(\frac{1}{2}\,\omega'_M - \omega_M\right);\quad M_{r_0} = M\lambda_2\omega'_M$
4а		a и $b < R_1$ $P_1 = -qR\,\frac{2(\omega_a - \omega_b)_R - 2\,\frac{R_1^4}{R^4}(\omega_a - \omega_b)_{R_1}}{2\omega_{P_1} - \left(1 - \frac{R_1^2}{R^2}\right)\omega'_{P_1}} - \frac{\left(1 - \frac{R_1^2}{R^2}\right)\left(\omega'_a - \omega'_b\right)_R}{2\omega_{P_1} - \left(1 - \frac{R_1^2}{R^2}\right)\omega'_{P_1}}$
4б		$P_1 = -P\,\frac{2\omega_{P_R} - 2\,\frac{R_1^3}{R^3}\,\omega_{P_{R_1}} - \left(1 - \frac{R_1^2}{R^2}\right)\omega'_{P_R}}{2\omega_{P_1} - \left(1 - \frac{R_1^2}{R^2}\right)\omega'_{P_1}};$ $a < R_1$ $P_1 = -P\,\frac{2\omega_{P_R} - \left(1 - \frac{R_1^2}{R^2}\right)\omega'_{P_R}}{2\omega_{P_1} - \left(1 - \frac{R_1^2}{R^2}\right)\omega'_{P_1}}$ $a > R_1$

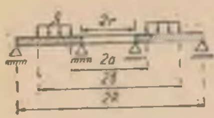
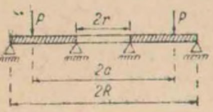
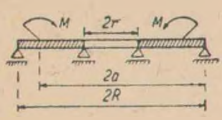
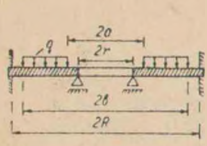
1	2	3
4в		$a < R_1$ $$P_1 = -\frac{M}{R}\,\frac{\left(1-\frac{R_1^2}{R^2}\right)\omega'_{M_R} + 2\omega_{M_{R_1}} - 2\omega_{M_R}}{2\omega_{P_1} - \left(1-\frac{R_1^2}{R^2}\right)\omega'_{P_1}};$$ $a > R_1$ $$P_1 = -\frac{M}{R}\,\frac{\left(1-\frac{R_1^2}{R^2}\right)\omega'_{M_R} - 2\omega_{M_R}}{2\omega_{P_1} - \left(1-\frac{R_1^2}{R^2}\right)\omega'_{P_1}}$$
5а		$$D\Theta_0 = \frac{qR^2r}{1-\mu^2}\,\frac{\Omega_{aq}-\Omega_{bq}}{\Omega_{\Theta_0}};$$ $$DW_0 = qR^4\left[(\omega_{aq}-\omega_{bq}) - \frac{\omega_{\Theta_0}}{(1-\mu^2)\Omega_{\Theta_0}}\,(\Omega_{aq}-\Omega_{bq})\right]$$
5б		$$D\Theta_0 = \frac{PRr}{1-\mu^2}\,\frac{\Omega_P}{\Omega_{\Theta_0}};$$ $$DW_0 = PR^3\left[\omega_P - \frac{\omega_{\Theta_0}\,\Omega_P}{(1-\mu^2)\,\Omega_{\Theta_0}}\right]$$
5в		$$D\Theta_0 = \frac{Mr}{1-\mu^2}\,\frac{\Omega_M}{\Omega_{\Theta_0}};$$ $$DW_0 = -MR^2\left[\frac{\omega_{\Theta_0}\,\Omega_M}{(1-\mu^2)\Omega_{\Theta_0}} - \omega_M\right]$$

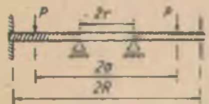
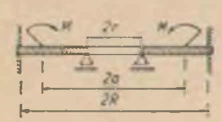
1	2	3
6а		$D\Theta_0 = \frac{qR^2r}{(1-\mu^2)} \frac{1}{\Omega_{\Theta_0}} \left[(\Omega_{aq} - \Omega_{bq}) - \frac{R}{2R_1}\left(\alpha_2^2 - \alpha_1^2\right)\Omega_{P_1} \right];$ $DW_0 = -qR^4 \left\{ \frac{\omega_{\Theta_0}}{(1-\mu^2)\Omega_{\Theta_0}} \left[(\Omega_{aq}-\Omega_{bq}) - \frac{R}{2R_1}\left(\alpha_2^2-\alpha_1^2\right)\Omega_{P_1}\right] - (\omega_{aq}-\omega_{bq}) \right\}$ $\alpha_1 = \frac{a}{R}; \quad \alpha_2 = \frac{b}{R};$ при $a \geqslant R_1$ $\omega_{aq}-\omega_{bq}=0$; при $b \geqslant R_1$ $\omega_{bq}=0$
6б		$D\Theta_0 = \frac{PRr}{1-\mu^2}\frac{1}{\Omega_{\Theta_0}}\left(\Omega_P - \frac{a}{R_1}\Omega_{P_1}\right);$ $DW_0 = -PR^3\left[\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\omega_{\Theta_0}}{\Omega_{\Theta_0}}\left(\Omega_P - \frac{a}{R_1}\Omega_{P_1}\right) - \omega_P\right];$ при $a \geqslant R_1$ $\omega_P = 0$
6в		$D\Theta_0 = \frac{Mr}{1-\mu^2}\frac{\Omega_{M_r}}{\Omega_{\Theta_0}};$ $DW_0 = MR^2\left[\frac{\omega_{\Theta_0}}{1-\mu^2}\frac{\Omega_{M_r}}{\Omega_{\Theta_0}} - \omega_M\right];$ при $a \geqslant R_1$ $\omega_M = 0$
7а		$D\Theta_0 = \frac{qR^2r}{\omega_{\Theta_0}}\left(\omega'_{aq}-\omega'_{bq}\right);$ $DW_0 = qR^4\left[(\omega_{aq}-\omega_{bq}) - \frac{\omega_{\Theta_0}}{\omega'_{\Theta_0}}\left(\omega'_{aq}-\omega'_{bq}\right)\right]$

1	2	3
7б	 	$D\Theta_0 = PRr\,\frac{\omega'_P}{\omega'_{\Theta_0}}$; $DW_0 = PR^3\left[\omega_P - \omega_{\Theta_0}\frac{\omega'_P}{\omega'_{\Theta_0}}\right]$
7в	 	$D\Theta_0 = Mr\,\frac{\omega'_M}{\omega'_{\Theta_0}}$; $DW_0 = -MR^2\left(\omega_{\Theta_0}\frac{\omega'_M}{\omega'_{\Theta_0}} - \omega_M\right)$
8а	 	$Q_{r_0} = qR\,\frac{\Omega_{M_{r_0}}\left(\omega_{aq} - \omega_{bq}\right) - \omega_{M_{r_0}}\left(\Omega_{aq} - \Omega_{bq}\right)}{\Omega_{M_{r_0}}\omega_{Q_0} - \Omega_{Q_0}\omega_{M_{r_0}}}$; $M_{r_0} = qR^2\,\frac{\omega_{Q_0}\left(\Omega_{aq} - \Omega_{bq}\right) - \Omega_{Q_0}\left(\omega_{aq} - \omega_{bq}\right)}{\Omega_{M_{r_0}}\omega_{Q_0} - \Omega_{Q_0}\omega_{M_{r_0}}}$
8б	 	$Q_{r_0} = P\,\frac{\Omega_{M_{r_0}}\omega_P - \Omega_P\omega_{M_{r_0}}}{\Omega_{M_{r_0}}\omega_{Q_0} - \Omega_{Q_0}\omega_{M_{r_0}}}$; $M_{r_0} = PR\,\frac{\Omega_P\omega_{Q_0} - \Omega_{Q_0}\omega_P}{\Omega_{M_{r_0}}\omega_{Q_0} - \Omega_{Q_0}\omega_{M_{r_0}}}$
8в	 	$Q_{r_0} = \frac{M}{R}\,\frac{-\Omega_M\omega_{M_{r_0}} + \Omega_{M_{r_0}}\omega_M}{\Omega_{M_{r_0}}\omega_{Q_0} - \Omega_{Q_0}\omega_{M_{r_0}}}$; $M_{r_0} = M\,\frac{-\Omega_{Q_0}\omega_M + \Omega_M\omega_{Q_0}}{\Omega_{M_{r_0}}\omega_{Q_0} - \Omega_{Q_0}\omega_{M_{r_0}}}$

1	2	3
9*а*		$M_{r_0} = -\frac{qR^2}{\Omega_{M_{r_0}}}\left[\frac{R}{2r}(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)\Omega_{Q_0} - (\Omega_{aq} - \Omega_{bq})\right]$; $Q_{r_0} = \frac{q}{2r}(b^2 - a^2)$
9*б*		$M_{r_0} = -\frac{PR}{\Omega_{M_{r_0}}}\left(\frac{a}{r}\Omega_{Q_0} - \Omega_P\right)$; $Q_{r_0} = P\frac{a}{r}$
9*в*		$M_{r_0} = M\frac{\Omega_M}{\Omega_{M_{r_0}}}$; $Q_{r_0} = 0$
10*а*		$Q_{r_0} = qR\frac{\omega'_{M_{r_0}}(\omega_{aq} - \omega_{bq}) - \omega_{M_{r_0}}(\omega'_{aq} - \omega'_{bq})}{\omega'_{M_{r_0}}\omega_{Q_0} - \omega_{M_{r_0}}\omega'_{Q_0}}$; $M_{r_0} = qR^2\frac{\omega_{Q_0}(\omega'_{aq} - \omega'_{bq}) - \omega'_{Q_0}(\omega_{aq} - \omega_{bq})}{\omega'_{M_{r_0}}\omega_{Q_0} - \omega_{M_{r_0}}\omega'_{Q_0}}$
10*б*		$Q_{r_0} = P\frac{\omega'_{M_{r_0}}\omega_P - \omega_{M_{r_0}}\omega'_P}{\omega'_{M_{r_0}}\omega_{Q_0} - \omega_{M_{r_0}}\omega'_{Q_0}}$; $M_{r_0} = PR\frac{\omega_{Q_0}\omega'_P - \omega'_{Q_0}\omega_P}{\omega'_{M_{r_0}}\omega_{Q_0} - \omega_{M_{r_0}}\omega'_{Q_0}}$
10*в*		$Q_{r_0} = \frac{M}{R}\frac{-\omega_{M_{r_0}}\omega'_M + \omega'_{M_{r_0}}\omega_M}{\omega'_{M_{r_0}}\omega_{Q_0} - \omega_{M_{r_0}}\omega'_{Q_0}}$; $M_{r_0} = M\frac{-\omega'_{Q_0}\omega_M + \omega_{Q_0}\omega'_M}{\omega'_{M_{r_0}}\omega_{Q_0} - \omega_{M_{r_0}}\omega'_{Q_0}}$

Продолжение табл. 3

1	2	3
11*а*		$D\Theta_0 = qR^2 r \frac{\omega_{Q_0}(\Omega_{aq}-\Omega_{bq}) - \Omega_{Q_0}(\omega_{aq}-\omega_{bq})}{(1-\mu^2)\,\omega_{Q_0}\Omega_{\Theta_0} - \omega_{\Theta_0}\Omega_{Q_0}}$; $Q_{r_0} = qR \frac{(1-\mu^2)\,\Omega_{\Theta_0}(\omega_{aq}-\omega_{bq}) - \omega_{\Theta_0}(\Omega_{aq}-\Omega_{bq})}{(1-\mu^2)\,\Omega_{\Theta_0}\omega_{Q_0} - \omega_{\Theta_0}\Omega_{Q_0}}$
11*б*		$D\Theta_0 = PRr \frac{\omega_{Q_0}\Omega_P - \omega_P\Omega_{Q_0}}{(1-\mu^2)\,\omega_{Q_0}\Omega_{\Theta_0} - \omega_{\Theta_0}\Omega_{Q_0}}$; $Q_{r_0} = P \frac{(1-\mu^2)\,\Omega_{\Theta_0}\omega_P - \omega_{\Theta_0}\Omega_P}{(1-\mu^2)\,\Omega_{\Theta_0}\omega_{Q_0} - \omega_{\Theta_0}\Omega_{Q_0}}$
11*в*		$D\Theta_0 = Mr \frac{-\omega_M\Omega_{Q_0} + \omega_{Q_0}\Omega_M}{(1-\mu^2)\,\omega_{Q_0}\Omega_{\Theta_0} - \omega_{\Theta_0}\Omega_{Q_0}}$; $Q_{r_0} = \frac{M}{R} \frac{-\omega_{\Theta_0}\Omega_M + (1-\mu^2)\,\omega_M\Omega_{\Theta_0}}{(1-\mu^2)\,\omega_{Q_0}\Omega_{\Theta_0} - \omega_{\Theta_0}\Omega_{Q_0}}$
12*а*		$D\Theta_0 = qR^2 r \frac{\omega_{Q_0}(\omega'_{aq}-\omega'_{bq}) - \omega'_{Q_0}(\omega_{aq}-\omega_{bq})}{\omega'_{\Theta_0}\omega_{Q_0} - \omega_{\Theta_0}\omega'_{Q_0}}$; $Q_{r_0} = qR \frac{\omega'_{\Theta_0}(\omega_{aq}-\omega_{bq}) - \omega_{\Theta_0}(\omega'_{aq}-\omega'_{bq})}{\omega'_{\Theta_0}\omega_{Q_0} - \omega_{\Theta_0}\omega'_{Q_0}}$

1	2	3
12б		$D\theta_0 = PRr\,\dfrac{\omega_{Q_0}\omega'_P - \omega'_{Q_0}\omega_P}{\omega'_{\theta_0}\omega_{Q_0} - \omega_{\theta_0}\omega'_{Q_0}}$; $Q_{r_0} = P\,\dfrac{\omega'_{\theta_0}\omega_P - \omega_{\theta_0}\omega'_P}{\omega'_{\theta_0}\omega_{Q_0} - \omega_{\theta_0}\omega'_{Q_0}}$
12в		$D\theta_0 = Mr\,\dfrac{-\omega'_{Q_0}\omega_M + \omega_{Q_0}\omega'_M}{\omega'_{\theta_0}\omega_{Q_0} - \omega_{\theta_0}\omega'_{Q_0}}$; $Q_{r_0} = \dfrac{M}{R}\,\dfrac{-\omega_{\theta_0}\omega'_M + \omega'_{\theta_0}\omega_M}{\omega'_{\theta_0}\omega_{Q_0} - \omega_{\theta_0}\omega'_{Q_0}}$

Поэтому

$$M_{r_0} = -5{,}6744 + 0{,}8248 - 2{,}59534 = -7{,}4449\ \text{тм/м};$$
$$Q_{r_0} = 5{,}302 - 0{,}861 + 1{,}550 = 5{,}991\ \text{т/м}.$$

Уравнения (I), (II) и (III) после раскрытия значений $\phi(\rho)$, $\Phi_{M_r}(\rho)$ и $\Phi_{M_\Theta}(\rho)$ по табл. 1 для последнего участка:

$$Dw = -7{,}4449\,\rho^2\omega_{M_{r_0}} + 5{,}991\,\rho^3\omega_{Q_0} - q\rho^4(\omega_{aq} - \omega_{bq}) + + M\rho^2\omega_M - P\rho^3\omega_P; \tag{VI}$$

$$M_r = -7{,}4449\,\Omega_{M_{r_0}M_r} + 5{,}991\,\rho\Omega_{Q_0M_r} - q\rho^2(\Omega_{aqr} - \Omega_{bqr}) + + M\Omega_{MM_r} - P\rho\Omega_{PM_r}; \tag{VII}$$

$$M_\Theta = -7{,}4449\,\Omega_{M_{r_0}M_\Theta} + 5{,}991\,\rho\Omega_{Q_0M_\Theta} - q\rho^2(\Omega_{aq\Theta} - \Omega_{bq\Theta}) + + M\Omega_{MM_\Theta} - P\rho\Omega_{PM_\Theta}. \tag{VIII}$$

Для всех остальных участков уравнения получаются из уравнений (VI), (VII) и (VIII) путем отбрасывания соответствующих силовых факторов, не попадающих в сечение с соответствующим значением ρ.

Из приведенных примеров видим, что расчет круглых пластин с симметричной нагрузкой ничем не отличается от расчета балок,

балок на упругом основании, тонкостенных стержней. Метод остается один и тот же, а это значительно облегчает усвоение расчета.

Если сосредоточенная сила приложена в центре плиты, рекомендуем использовать случай распределенной нагрузки с интенсивностью q на площади с некоторым радиусом ρ.

Второй пример заимствован из книги К. А. Китовера [1], с тем чтобы желающие могли провести сравнение двух решений.

Литература

1. К. А. Китовер. Круглые тонкие плиты. Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1953.
2. К. А. Китовер. Определение расчетных условий и деформаций в симметрично нагруженных круглых и кольцевых пластинках. Труды Одесского института гражданского и коммунального строительства, вып. I. Одесса, 1939.
3. С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев, В. М. Макушин, В. И. Федосьев. Расчеты на прочность в машиностроении, т. II. М., Машгиз, 1958.
4. П. Я. Артемов. Таблицы для расчета на прочность и жесткость балок и стержней. Минск, Белгосиздат, 1959.

Н. П. ВОРОБЬЕВ

НОВЫЙ МЕТОД ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ РАДИОЗОНДОВ ПО ИЗОБАРИЧЕСКИМ ПОВЕРХНОСТЯМ

При оперативном исследовании свободной атмосферы для прогнозирования погоды широкое применение в гидрометеорологической службе находит гребенчатый радиозонд системы проф. П. А. Молчанова [1].

Радиозонд любой конструкции состоит, как известно, из трех частей: приемников метеоэлементов, радиоблока и кодирующего устройства [1]. В гребенчатом радиозонде, названном так потому, что контактирующие приспособления в нем напоминают собой гребенки (зубцы и пропуски), применяется число-импульсный метод кодирования. При таком кодировании изменению метеоэлементов соответствует изменение числа, продолжительности и комбинации радиосигналов.

Сущность нового метода обработки сигналов радиозондов, предложенного нами и принятого к использованию Главным управлением гидрометеорологической службы при Совете Министров СССР, состоит в том, что для изобарических поверхностей температура, влажность и высота определяются в начале обработки сигналов радиозонда.

Для заданных значений давления (изобарических поверхностей) устанавливается время момента контакта указателя давления с гребенкой и строятся графики изменения температуры и влажности на высотах. По времени контакта указателя давле-