УДК 517.977

А. А. Якименко
Белорусский государственный технологический университет

К ВОПРОСУ О МОДАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ОДНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМОЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В СЛАБОЦИКЛИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

В статье рассматривается решение задачи модального управления для одной трехмерной стационарной динамической системы с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию в слабоциклическом случае. Дается определение задачи модального управления для исследуемой системы. При решении этой задачи применяются линейные регуляторы по типу обратной связи, содержащие как линейную, так и интегральную части. Эти регуляторы используют информацию как о текущем состоянии системы, так и векторы состояний и их производные в предыдущие моменты времени. Регуляторы получены в явной форме как элементарные функции параметров исходной системы и ее вектора состояния. Указан вид характеристического квазиполинома замкнутой этим регулятором исходной системы нейтрального типа.

Ключевые слова: системы нейтрального типа, модальное управление, регуляторы, обратная связь, запаздывание.

A. A. Yakimenka
Belarusian State Technological University

TO THE QUESTION OF MODAL CONTROL FOR ONE THREE-DIMENSIONAL NEUTRAL TYPE SYSTEM IN WEAKLY CYCLIC CASE

The paper deals with the solution of the modal control problem for a three-dimensional stationary dynamic system with a delayed argument of a neutral type with one input and one state delay in weakly cyclic case. The definition of the problem of modal control for the studied system is given. To solve this problem, linear feedback regulators are used that contain both linear and integral parts. These regulators use information about the current state of the system, as well as state vectors and their derivatives at previous times. Regulators are obtained in explicit form as elementary functions of the parameters of the original system and its state vector. The characteristic quasi-polynomial of the initial neutral type system closed by this regulator is given.

Key words: neutral type systems, modal control, regulators, feedback control, lag.

Введение. Задача модального управления является одной из основных задач теории управления. Такая задача хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом и систем нейтрального типа решение задачи модального управления значительно сложнее. В статье производится обобщение результатов, полученных в [1], на одну трехмерную систему нейтрального типа в слабоциклическом случае.

Основная часть. Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2 \dot{x}(t-h) + bu(t),\ t > 0, \tag{1}$$

где $A_i, i = 0, 1, 2$ – постоянные 3×3-матрицы; $h > 0$ – постоянное запаздывание; b – ненулевой 3-вектор. Не ограничивая общности, считаем $b' = [0, 0, 1]$ («$'$» означает транспонирование).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = q'_{00} x(t) + \sum_{i=0}^{L}\sum_{j=1}^{M} q'_{ij} x^{(i)}(t - jh) + \int_{-h}^{0} g'(s) x(t+s)\,ds, \tag{2}$$

где q_{00}, q_{ij} – 3-векторы; $g(s)$, $s \in [-h, 0]$ – непрерывная 3-вектор-функция;

$$x^{(i)}(t) \overset{def}{=} \frac{d^i}{dt^i} x(t),\ x^{(0)}(t) \equiv x(t).$$

Характеристическое уравнение системы (1) имеет следующий вид:

$$\det\left[A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_3\right] \equiv \equiv \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \tilde{\alpha}_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} = 0, \tag{3}$$

где числа $\tilde{\alpha}_{ij}$ вычисляются как функции матриц $A_i, i=0, 1, 2$, в частности $\tilde{\alpha}_{00}=\det A_0$, $\tilde{\alpha}_{30}=1$, $\tilde{\alpha}_{33}=\det A_2$.

Определение 1. Система (1) будет модально управляема регулятором вида (2), если для любых наперед заданных чисел $\alpha_{ij}, i=0, 1, 2, 3$, $j=0, 1, 2, 3$, $\alpha_{30}=1$, найдется регулятор (2) такой, что характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (2) имеет следующий вид (ср. с (3)):

$$\det\left[A_0+A_1e^{-\lambda h}+A_2\lambda e^{-\lambda h}-\lambda I_3+bU(\lambda)\right]\equiv$$
$$\equiv\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\alpha_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h}=0,$$

где $U(\lambda)$ – регулятор (2) в частотной области.

Рассмотрим еще одно определение модальной управляемости.

Определение 2. Система (1) будет модально управляема регулятором вида (2), если для любых наперед заданных чисел $\alpha_{ij}, i=0, 1, 2$, $j=0, 1, 2$, $\alpha_{20}=1$, $\alpha_{3j}, j=0, 1, 2$, найдется регулятор (2) такой, что характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (2) имеет следующий вид:

$$\det\left[A_0+A_1e^{-\lambda h}+A_2\lambda e^{-\lambda h}-\lambda I_3+bU(\lambda)\right]\equiv$$
$$\equiv\left(\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}\alpha_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h}\right)\times$$
$$\times\left(\alpha_{30}+\alpha_{31}e^{-j\lambda h}+\alpha_{32}\lambda e^{-j\lambda h}+\lambda\right)=0.$$

Можно показать, что определения 1 и 2 эквивалентны.

Введем 3×3-матрицы:

$$\mathsf{A}(\lambda)=A_0+A_1e^{-\lambda h}+A_2\lambda e^{-\lambda h},$$

$$W(\lambda)=\left[\mathsf{A}^2(\lambda)b,\ \mathsf{A}(\lambda)b,\ b\right],\ \lambda\in\mathbb{C}.$$

Рассмотрим слабоциклический случай:

$$\det W(\lambda)=c\left(\gamma_0+e^{-\lambda h}\right),\ (c\neq 0).$$

Пусть матрица $\mathsf{A}(\lambda)$ имеет следующий вид:

$$\mathsf{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}\beta_0+\beta_1e^{-\lambda h}+\beta_2\lambda e^{-\lambda h} & c\left(\gamma_0+e^{-\lambda h}\right) & 0\\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & 1\\ a_{31}(\lambda) & a_{32}(\lambda) & a_{33}(\lambda)\end{bmatrix}\equiv$$

$$\equiv\begin{bmatrix}a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & 0\\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & 1\\ a_{31}(\lambda) & a_{32}(\lambda) & a_{33}(\lambda)\end{bmatrix},$$

где $\beta_i, i=0, 1, 2, c, \gamma_0$ – некоторые действительные числа; $a_{ij}(\lambda), i=1, 2, 3, j=1, 2, 3$ – квазиполиномы:

$$a_{ij}(\lambda)=a_{ij0}+a_{ij1}e^{-\lambda h}+a_{ij2}\lambda e^{-\lambda h},$$

здесь $a_{ijk}\in\mathbb{R}$; $k=0, 1, 2$.

Сделаем в системе (1) замену переменной по правилу

$$x=T_1(\lambda)y,$$

где

$$T_1(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -a_{11}(\lambda)+\eta_1(\lambda) & -a_{12}(\lambda)+\eta_2(\lambda) & 1\end{bmatrix}.$$

Тогда система (1) с новой переменной в частотной области примет вид

$$\lambda y=\tilde{\mathsf{A}}(\lambda)y+bU(\lambda)y, \tag{4}$$

где

$$\tilde{\mathsf{A}}(\lambda)=\begin{bmatrix}a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & 0\\ \eta_1(\lambda) & \eta_2(\lambda) & 1\\ b_{31}(\lambda) & b_{32}(\lambda) & b_{33}(\lambda)\end{bmatrix},$$

$$b_{31}(\lambda)=a_{31}(\lambda)+a_{11}(\lambda)a_{21}(\lambda)-a_{11}(\lambda)\eta_1(\lambda)-$$
$$-a_{21}(\lambda)a_{33}(\lambda)+a_{22}(\lambda)\eta_1(\lambda)+a_{33}(\lambda)\eta_1(\lambda)-$$
$$-\eta_1(\lambda)\eta_2(\lambda),$$
$$b_{32}(\lambda)=a_{32}(\lambda)+a_{12}(\lambda)a_{21}(\lambda)-a_{12}(\lambda)\eta_1(\lambda)-$$
$$-a_{22}(\lambda)a_{33}(\lambda)+a_{22}(\lambda)\eta_2(\lambda)+$$
$$+a_{33}(\lambda)\eta_2(\lambda)-\eta_2^2(\lambda),$$
$$b_{33}(\lambda)=a_{22}(\lambda)+a_{33}(\lambda)-\eta_2(\lambda),$$

$\eta_1(\lambda), \eta_2(\lambda)$ – функции, определяемые далее.

Регулятор вида (2) в частотной области будем искать в виде

$$U_1(\lambda)y=\left(-b_{31}(\lambda),\ \ -b_{32}(\lambda),\ \ \eta_3(\lambda)-b_{33}(\lambda)\right)y. \tag{5}$$

Тогда матрица $\tilde{\mathsf{A}}(\lambda)$ системы (4), замкнутой этим регулятором, примет вид

$$\tilde{\mathsf{A}}(\lambda)=\begin{bmatrix}a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & 0\\ \eta_1(\lambda) & \eta_2(\lambda) & 1\\ 0 & 0 & \eta_3(\lambda)\end{bmatrix}. \tag{6}$$

Возможны два случая:

i) $\beta_2\gamma_0+1=0$,

ii) $\beta_2\gamma_0+1\neq 0$.

Теорема 1. В случае i) система (1) модально управляема регулятором вида (2) тогда и только тогда, когда $\beta_0 - \beta_1\gamma_0 \neq 0$.

Пусть функции $\eta_1(\lambda), \eta_2(\lambda)$ в (6) имеют следующий вид:

$$\eta_1(\lambda) = \frac{1}{c}\Bigg(\beta_2 \frac{\alpha_{21}\beta_2 + \beta_2^2 + \alpha_{22}}{\beta_0\beta_2 + \beta_1}\lambda^3 e^{-\lambda h} + \beta_2 \times$$

$$\times \frac{\alpha_{11}\beta_2 + 2\beta_1\beta_2 - \alpha_{22}\beta_0 + \alpha_{12} + \alpha_{10}\beta_2^2 + \alpha_{21}\beta_1 + \beta_0\beta_2^2}{\beta_0\beta_2 + \beta_1}\lambda^2 e^{-\lambda h} +$$

$$+\beta_2 \frac{\alpha_{11}\beta_1 + 2\beta_0\beta_1\beta_2 + \beta_1^2 + \alpha_{10}\beta_0\beta_2^2 + 2\alpha_{10}\beta_1\beta_2}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} +$$

$$+\frac{\alpha_{00}\beta_2^2 + \alpha_{01}\beta_2 + \alpha_{02} - \alpha_{12}\beta_0 + \beta_0^2\beta_2^2}{\beta_0\beta_2 + \beta_1}\lambda e^{-\lambda h} +$$

$$+\beta_2 \frac{\beta_0\beta_1^2 + \alpha_{10}\beta_0\beta_1\beta_2 - \alpha_{02}\beta_0 + \beta_0^2\beta_1\beta_2}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} +$$

$$+\frac{\alpha_{00}\beta_1\beta_2 + \alpha_{01}\beta_1 + \alpha_{10}\beta_1^2}{\beta_0\beta_2 + \beta_1}e^{-\lambda h} +$$

$$+\left(\alpha_{00} + \beta_0^2 + \beta_0\alpha_{10}\right)\beta_2\Bigg),$$

$$\eta_2(\lambda) = \frac{\alpha_{21}\beta_2 + \beta_2^2 + \alpha_{22}}{\beta_0\beta_2 + \beta_1}\lambda^2 e^{-\lambda h} +$$

$$+\frac{\alpha_{11}\beta_2 + \beta_0\beta_2^2 + \alpha_{10}\beta_2^2 + \alpha_{12} + \beta_1\beta_2}{\beta_0\beta_2 + \beta_1}\lambda e^{-\lambda h} +$$

$$+\frac{\beta_0\beta_1\beta_2 + \alpha_{10}\beta_0\beta_2^2 + \beta_0^2\beta_2^2 + \alpha_{00}\beta_2^2}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} +$$

$$+\frac{\alpha_{10}\beta_2 + \alpha_{10}\beta_1\beta_2 + \alpha_{02}}{\beta_0\beta_2 + \beta_1}e^{-\lambda h} - \beta_0 - \alpha_{10}.$$

Пусть $\eta_3(\lambda)$ в регуляторе (5) имеет вид

$$\eta_3(\lambda) = -\alpha_{30} - \alpha_{31}e^{-j\lambda h} - \alpha_{32}\lambda e^{-j\lambda h}.$$

Нетрудно проверить, что регулятор (5) решает задачу модального управления для системы (4), а регулятор

$$U(\lambda)x = U_1(\lambda)T^{-1}(\lambda)x$$

решает задачу модального управления для системы (1).

Рассмотрим случай ii). Введем обозначения:

$$\xi = \frac{\beta_0 - \beta_1\gamma_0}{1 + \beta_2\gamma_0}, \ \delta_1 = \gamma_0 + e^{-\xi h}. \qquad (7)$$

Теорема 2. Для того, чтобы система (1) в случае ii) была модально управляема регулятором вида (2), необходимо и достаточно выполнения условия $\delta_1 \neq 0$.

Пусть функции $\eta_1(\lambda), \eta_2(\lambda)$ в (6) имеют следующий вид:

$$\eta_1(\lambda) = \frac{1}{c}\Bigg(\left(\frac{-\beta_2 - \alpha_{21} + \alpha_{22}\gamma_0}{1 + \beta_2\gamma_0}\beta_2 - \alpha_{22}\right)\lambda^2 e^{-\lambda h} +$$

$$+\Bigg(-\frac{\left(\beta_2 + \alpha_{21} - \alpha_{22}\gamma_0\right)\left(\beta_0\beta_2 + \beta_1\right)}{1 + \beta_2\gamma_0} - \alpha_{12} -$$

$$-\frac{\alpha_{10}\beta_2^2\gamma_0 - \alpha_{12}\beta_2\gamma_0^2 + \alpha_{22}\beta_0\beta_2\gamma_0^2 - \alpha_{21}\beta_0\beta_2\gamma_0}{\left(1 + \beta_2\gamma_0\right)^2} -$$

$$-\frac{\alpha_{11}\beta_2\gamma_0 + \beta_0\beta_2 + \alpha_{10}\beta_2 + \beta_1 - \alpha_{12}\gamma_0}{\left(1 + \beta_2\gamma_0\right)^2}\beta_2 -$$

$$-\frac{-\alpha_{21}\beta_1\gamma_0 + \alpha_{11} + \alpha_{22}\beta_1\gamma_0^2}{\left(1 + \beta_2\gamma_0\right)^2}\beta_2\Bigg)\lambda e^{-\lambda h} -$$

$$-\frac{\beta_2 + \alpha_{21} - \alpha_{22}\gamma_0}{1 + \beta_2\gamma_0}\beta_0\beta_1 e^{-\lambda h} - \frac{\beta_2 + \alpha_{21} - \alpha_{22}\gamma_0}{1 + \beta_2\gamma_0}\beta_0^2 -$$

$$-\frac{3\alpha_{00}\beta_2^2\gamma_0^2 + \alpha_{12}\beta_0\gamma_0^2 - \alpha_{21}\beta_0^2\gamma_0 - \alpha_{11}\beta_0\gamma_0 + \alpha_{22}\beta_0\beta_1\gamma_0^2 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1 + \beta_2\gamma_0\right)^3} -$$

$$-\frac{3\alpha_{00}\beta_2\gamma_0 - \beta_0\beta_1\gamma_0 + \alpha_{22}\beta_0^2\gamma_0^2 - \alpha_{21}\beta_0\beta_1\gamma_0 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1 + \beta_2\gamma_0\right)^3} -$$

$$-\frac{-\alpha_{22}\beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0^4 + \alpha_{21}\beta_1^2\gamma_0^2 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1 + \beta_2\gamma_0\right)^3} -$$

$$-\frac{\alpha_{00} - \beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0^2 + \alpha_{01}e^{-\xi h} + 2\alpha_{10}\beta_0\beta_2\gamma_0}{\delta_1\left(1 + \beta_2\gamma_0\right)^3} -$$

$$-\frac{-2\alpha_{11}\beta_0\beta_2\gamma_0^2 + 2\alpha_{12}\beta_0\beta_2\gamma_0^3 + \alpha_{21}\beta_0\beta_1\gamma_0^2}{\delta_1\left(1 + \beta_2\gamma_0\right)^3} -$$

$$-\frac{-\alpha_{22}\beta_0\beta_1\gamma_0^3 + \alpha_{10}\beta_0 + \beta_0^2 + \beta_0^2\beta_2\gamma_0}{\delta_1\left(1 + \beta_2\gamma_0\right)^3} -$$

$$-\frac{-2\alpha_{02}\beta_2\gamma_0^2 e^{-\xi h} + \alpha_{12}\beta_0\beta_2^2\gamma_0^4 + \alpha_{02}\beta_2^2\gamma_0^3 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1 + \beta_2\gamma_0\right)^3} -$$

$$-\frac{-\alpha_{02}\gamma_0 e^{-\xi h} + \alpha_{12}\beta_0\beta_2^2\gamma_0^3 e^{-\xi h} + \alpha_{12}\beta_0\beta_2\gamma_0^2 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1 + \beta_2\gamma_0\right)^3} -$$

$$-\frac{\alpha_{10}\beta_1 e^{-\xi h} + \alpha_{00}\beta_2 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1 + \beta_2\gamma_0\right)^3} -$$

$$-\frac{2\alpha_{01}\beta_2\gamma_0 e^{-\xi h}-\alpha_{11}\beta_0\beta_2\gamma_0 e^{-\xi h}-\alpha_{11}\beta_0\beta_2^2\gamma_0^2 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{\alpha_{00}\beta_2^3\gamma_0^2 e^{-\xi h}+\alpha_{01}\beta_2^2\gamma_0^2 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{\alpha_{00}\beta_2^3\gamma_0^3+2\alpha_{00}\beta_2^2\gamma_0 e^{-\xi h}+\alpha_{10}\beta_1\beta_2\gamma_0 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{-\alpha_{11}\beta_0\beta_2^2\gamma_0^3+\alpha_{22}\beta_0^2\beta_2\gamma_0^3-\alpha_{21}\beta_0^2\beta_2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{-\alpha_{11}\beta_1\gamma_0 e^{-\xi h}-\alpha_{22}\beta_1^2\gamma_0^3 e^{-\xi h}+\alpha_{10}\beta_0\beta_2^2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{\alpha_{10}\beta_0\beta_2 e^{-\xi h}+\alpha_{12}\beta_1\gamma_0^2 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{\beta_0^2\beta_2 e^{-\xi h}-\beta_1^2\gamma_0 e^{-\xi h}+\beta_0\beta_1 e^{-\xi h}-\alpha_{22}\beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0^3 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{\alpha_{21}\beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0^3+\alpha_{12}\beta_1\beta_2\gamma_0^3 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{\alpha_{22}\beta_0^2\beta_2\gamma_0^2 e^{-\xi h}-\alpha_{21}\beta_0^2\beta_2\gamma_0 e^{-\xi h}-\alpha_{11}\beta_1\beta_2\gamma_0^2 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{-\beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0+\alpha_{10}\beta_0\beta_2^2\gamma_0 e^{-\xi h}-\alpha_{10}\beta_2^2\gamma_0}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\Bigg(\frac{-\alpha_{12}\beta_2\gamma_0^2+\alpha_{22}\beta_0\beta_2\gamma_0^2-\alpha_{21}\beta_0\beta_2\gamma_0+\alpha_{11}\beta_2\gamma_0+\beta_0\beta_2}{\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^2}+$$

$$+\frac{\alpha_{10}\beta_2+\beta_1-\alpha_{12}\gamma_0-\alpha_{21}\beta_1\gamma_0+\alpha_{11}+\alpha_{22}\beta_1\gamma_0^2}{\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^2}\Bigg)\beta_1 e^{-\lambda h}-$$

$$-\Bigg(\frac{\alpha_{10}\beta_2^2\gamma_0-\alpha_{12}\beta_2\gamma_0^2+\alpha_{22}\beta_0\beta_2\gamma_0^2-\alpha_{21}\beta_0\beta_2\gamma_0}{\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^2}+$$

$$+\frac{\alpha_{11}\beta_2\gamma_0+\beta_0\beta_2+\alpha_{10}\beta_2+\beta_1}{\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^2}+$$

$$+\frac{-\alpha_{12}\gamma_0-\alpha_{21}\beta_1\gamma_0+\alpha_{11}+\alpha_{22}\beta_1\gamma_0^2}{\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^2}\Bigg)\beta_0-$$

$$-\Bigg(\frac{\alpha_{02}\gamma_0+2\beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0+\alpha_{02}e^{-\xi h}-\beta_0^2\beta_2+2\alpha_{02}\beta_2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$+\frac{\alpha_{02}\beta_2^2\gamma_0^3-\beta_1^2\beta_2\gamma_0^2-\alpha_{12}\beta_0\beta_2^2\gamma_0^3}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$+\frac{\alpha_{12}\beta_1\beta_2^2\gamma_0^4+\alpha_{10}\beta_1\beta_2^2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$+\frac{\alpha_{12}\beta_1\beta_2\gamma_0^3-\alpha_{12}\beta_0\beta_2\gamma_0^2 e^{-\xi h}+\alpha_{21}\beta_0^2\beta_2\gamma_0}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$+\frac{-\alpha_{22}\beta_1^2\beta_2\gamma_0^4-\alpha_{22}\beta_0^2\beta_2\gamma_0^2+\alpha_{21}\beta_1^2\beta_2\gamma_0^3 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{3\alpha_{02}\beta_2\gamma_0 e^{-\xi h}+3\alpha_{02}\beta_2^2\gamma_0^2 e^{-\xi h}+\alpha_{02}\beta_2^3\gamma_0^3 e^{-\xi h}}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{-2\alpha_{21}\beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0^2+2\alpha_{22}\beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0^3-\alpha_{11}\beta_1\beta_2^2\gamma_0^3+\alpha_{11}\beta_0\beta_2\gamma_0}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}-$$

$$-\frac{\alpha_{10}\beta_1\beta_2\gamma_0-\alpha_{11}\beta_1\beta_2\gamma_0^2-\alpha_{01}\beta_2\gamma_0-\alpha_{00}\beta_2^3\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$+\frac{-\alpha_{10}\beta_0\beta_2^2\gamma_0-\alpha_{11}\beta_1\beta_2^2\gamma_0^2-\alpha_{10}\beta_0\beta_2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$+\frac{\alpha_{01}\beta_2^3\gamma_0^3+2\alpha_{01}\beta_2^2\gamma_0^2-2\alpha_{00}\beta_2^2\gamma_0-\alpha_{00}\beta_2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}\Bigg)e^{-\lambda h}-$$

$$-\Bigg(\frac{\alpha_{11}\beta_0\beta_1\gamma_0-\alpha_{10}\beta_0^2\beta_2-\alpha_{02}\beta_1\gamma_0^2-\alpha_{12}\beta_0\beta_1\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{-\alpha_{00}\beta_1\beta_2^2\gamma_0^2-\alpha_{11}\beta_1^2\beta_2\gamma_0^3-\beta_0^3\beta_2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{\alpha_{01}\beta_1\gamma_0-\alpha_{22}\beta_1^3\gamma_0^4+\alpha_{21}\beta_1^3\gamma_0^3-\alpha_{00}\beta_0\beta_2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{-\alpha_{22}\beta_0\beta_1^2\beta_2\gamma_0^4+\alpha_{11}\beta_0^2\beta_2^2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{-\alpha_{11}\beta_1^2\gamma_0^2+2\alpha_{11}\beta_0\beta_1^2\gamma_0+\alpha_{10}\beta_1^2\gamma_0}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{-\alpha_{10}\beta_0\beta_1+\alpha_{12}\beta_1^2\gamma_0^3-\alpha_{00}\beta_1-\beta_1^3\gamma_0^2+\alpha_{10}\beta_1^2\beta_2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{\alpha_{21}\beta_0^2\beta_1\gamma_0+\alpha_{01}\beta_1\beta_2^2\gamma_0^3-\alpha_{22}\beta_0^2\beta_1\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{\alpha_{12}\beta_1^2\beta_2\gamma_0^4+2\alpha_{01}\beta_1\beta_2\gamma_0^2-2\alpha_{00}\beta_1\beta_2\gamma_0}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{-\alpha_{02}\beta_0\beta_2\gamma_0^2-2\alpha_{02}\beta_0\beta_2^2\gamma_0^3-2\alpha_{21}\beta_0\beta_1^2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{2\alpha_{22}\beta_0\beta_1^2\gamma_0^3-2\alpha_{02}\beta_1\beta_2\gamma_0^3-\alpha_{02}\beta_1\beta_2^2\gamma_0^4}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{\alpha_{01}\beta_0\beta_2\gamma_0+2\alpha_{01}\beta_0\beta_2^2\gamma_0^2+2\beta_0^2\beta_1\beta_2\gamma_0}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{-\beta_0\beta_1^2\beta_2\gamma_0^2-\alpha_{02}\beta_0\beta_2^3\gamma_0^4-\alpha_{11}\beta_0\beta_1\beta_2^2\gamma_0^3}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{-2\alpha_{21}\beta_0^2\beta_1\beta_2\gamma_0^2+2\alpha_{22}\beta_0^2\beta_1\beta_2\gamma_0^3+\alpha_{10}\beta_0\beta_1\beta_2^2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{\alpha_{12}\beta_0\beta_1\beta_2^2\gamma_0^4+\alpha_{21}\beta_0\beta_1^2\beta_2\gamma_0^3}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{-\alpha_{12}\beta_0^2\beta_2^2\gamma_0^3-\alpha_{12}\beta_0^2\beta_2\gamma_0^2+\alpha_{21}\beta_0^3\beta_2\gamma_0}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$+\frac{-\alpha_{22}\beta_0^3\beta_2\gamma_0^2+\alpha_{11}\beta_0^2\beta_2\gamma_0-\alpha_{10}\beta_0^2\beta_2^2\gamma_0}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}+$$

$$\left.\left.+\frac{-\alpha_{00}\beta_0\beta_2^3\gamma_0^2+\alpha_{01}\beta_0\beta_2^3\gamma_0^3-2\alpha_{00}\beta_0\beta_2^2\gamma_0}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^4}\right)\frac{e^{-\xi h}-e^{-\lambda h}}{\lambda-\xi}\right),$$

$$\eta_2(\lambda)=$$

$$=\frac{-\beta_2+\alpha_{22}\gamma_0-\alpha_{21}-\beta_2^2\gamma_0-\alpha_{21}\beta_2\gamma_0+\alpha_{22}\beta_2\gamma_0^2}{\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^2}\lambda e^{-\lambda h}+$$

$$+\frac{-2\beta_0\beta_2-\beta_0\beta_2^2\gamma_0-\beta_1+\alpha_{21}\beta_1\gamma_0+\alpha_{12}\beta_2\gamma_0^2+\alpha_{22}\beta_0\gamma_0}{\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^2}e^{-\lambda h}+$$

$$+\frac{-\alpha_{22}\beta_1\gamma_0^2+\alpha_{12}\gamma_0-\alpha_{11}-\alpha_{21}\beta_0-\alpha_{10}\beta_2^2\gamma_0-\alpha_{10}\beta_2-\alpha_{11}\beta_2\gamma_0}{\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^2}e^{-\lambda h}+$$

$$+\frac{-\alpha_{10}\beta_2^2\gamma_0^2-\beta_0\beta_2^2\gamma_0^2-2\beta_0\beta_2\gamma_0-\alpha_{10}-2\alpha_{10}\beta_2\gamma_0-\beta_0}{\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^2}+$$

$$+\left(\frac{-\alpha_{00}\beta_2^2\gamma_0^2-\alpha_{12}\beta_0\gamma_0^2+\alpha_{01}\beta_2^2\gamma_0^3+\alpha_{21}\beta_0^2\gamma_0}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+\right.$$

$$+\frac{\alpha_{11}\beta_0\gamma_0-2\alpha_{02}\beta_2\gamma_0^3+\alpha_{12}\beta_1\gamma_0^3}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$+\frac{2\alpha_{01}\beta_2\gamma_0^2-\alpha_{02}\beta_2^2\gamma_0^4-2\alpha_{00}\beta_2\gamma_0+2\beta_0\beta_1\gamma_0}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$+\frac{\alpha_{10}\beta_1\gamma_0-\alpha_{22}\beta_1^2\gamma_0^4-\alpha_{22}\beta_0^2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$+\frac{\alpha_{21}\beta_1^2\gamma_0^3-\alpha_{00}+\alpha_{01}\gamma_0-\alpha_{02}\gamma_0^2+\alpha_{10}\beta_1\beta_2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$+\frac{-\alpha_{11}\beta_1\beta_2\gamma_0^3+\alpha_{12}\beta_1\beta_2\gamma_0^4-\alpha_{10}\beta_0\beta_2\gamma_0+\alpha_{11}\beta_0\beta_2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}+$$

$$\left.+\frac{\alpha_{12}\beta_0\beta_2\gamma_0^3-2\alpha_{21}\beta_0\beta_1\gamma_0^2+2\alpha_{22}\beta_0\beta_1\gamma_0^3-\alpha_{10}\beta_0-\beta_0^2-\beta_1^2\gamma_0^2}{\delta_1\left(1+\beta_2\gamma_0\right)^3}\right)\times$$

$$\times\frac{e^{-\xi h}-e^{-\lambda h}}{\lambda-\xi}.$$

Пусть $\eta_3(\lambda)$ в регуляторе (5) имеет вид

$$\eta_3(\lambda)=-\alpha_{30}-\alpha_{31}e^{-j\lambda h}-\alpha_{32}\lambda e^{-j\lambda h}.$$

Нетрудно проверить, что регулятор (5) решает задачу модального управления для системы (4), а регулятор

$$U(\lambda)x=U_1(\lambda)T^{-1}(\lambda)x$$

решает задачу модального управления для системы (1).

Заключение. Таким образом, полученные регуляторы решают задачу модального управления для рассматриваемой системы в слабоциклическом случае.

Список литературы

1. Якименко А. А. Модальное управление одной запаздывающей системой // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 18–21.

References

1. Yakimenka A. A. Modal control for one delayed system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 18–21 (In Russian).

Информация об авторе

Якименко Андрей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yakimenko@belstu.by

Information about the author

Yakimenka Andrei Aliaksandravich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakimenko@belstu.by

Поступила после доработки 30.03.2020