ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.935.2+519.71

В. М. Марченко, И. М. Борковская
Белорусский государственный технологический университет

К ВОПРОСУ О СТАБИЛИЗАЦИИ ГИБРИДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

В статье рассматриваются некоторые проблемы стабилизации гибридных дифференциально-разностных (ГДР) систем при использовании регуляторов по типу обратной связи. Доказаны необходимые условия стабилизации указанных систем с помощью простейшего регулятора и регулятора с интегральными составляющими типа свертки. Представленные условия стабилизации являются теоретической основой исследования качественных свойств как многомерных, так и скалярных дифференциально-разностных систем. Проведена экспоненциальная оценка роста решений рассматриваемых систем, что является обоснованием возможности применения к ним преобразования Лапласа. Статья является продолжением и обобщением исследования стабилизации гибридных дифференциально-разностных систем, проведенного ранее для скалярного случая.

Ключевые слова: дифференциально-разностные системы, оценка роста решений, регуляторы по типу обратной связи, стабилизация.

V. M. Marchenko, I. M. Borkovskaya
Belarusian State Technological University

ON THE STABILIZATION OF HYBRID DIFFERENTIAL-DIFFERENCE SYSTEMS

The article discusses some problems of stabilization of hybrid differential-difference systems by using regulators as feedback. The necessary stabilization conditions for these systems are proved using the simplest regulator and a regulator with integral components such as convolution. The stabilization conditions presented are the theoretical basis for studying the qualitative properties of both multidimensional and scalar differential-difference systems. An exponential growth estimation for the solutions of the systems under consideration is carried out, which is the rationale for the possibility of applying the Laplace transform to them. The article is a continuation and generalization of the stabilization study of hybrid differential-difference systems, carried out earlier for the scalar case.

Key words: differential-difference systems, solutions growth estimation, feedback regulators, stabilization.

Введение. В настоящей статье рассматриваются некоторые вопросы стабилизации линейных гибридных дифференциально-разностных (ГДР) систем, описывающих процессы, природа которых носит неоднородный характер. Такие системы широко используются в автомобилестроении, авиастроении, робототехнике и других областях. При изучении реальных физических процессов наряду с динамическими (дифференциальными) появляются и алгебраические (функциональные) зависимости, приводящие к гибридным системам.

К качественной теории управления для данных систем относятся такие важные проблемы, как управляемость, наблюдаемость, двойственность и др. В работе [1] представлены некоторые задачи в теории управляемых динамических ГДР-систем. Исследованию разных классов гибридных систем посвящены, в частности, статьи [2–14]. При изучении гибридных систем фундаментальными остаются такие работы, как [15, 16].

Одной из важнейших проблем в теории управления динамических систем является проблема их устойчивости и стабилизации.

Вопросы стабилизации скалярных линейных стационарных гибридных дифференциально-разностных систем рассматривались авторами в работе [17]. Данная статья продолжает и обобщает исследования, проведенные ранее. Получены результаты для многомерного случая, проведена оценка роста решений дифференциально-разностных систем, что является теоретическим обоснованием возможности применения к этим системам преобразования Лапласа.

Основная часть. Рассмотрим гибридную дифференциально-разностную систему в симметрической относительно операторов дифференцирования и сдвига форме:

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t), \quad (1)$$

$$x_2(t+h) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t), t \geq 0 \quad (2)$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = x_{10}, x_2(\tau) = \psi(\tau), \tau \in [0, h). \quad (3)$$

Здесь $x_1(t) \in R^{n_1}$, $x_2(kh) \in R^{n_2}$, $u(t) \in R^r$, $h > 0$, $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$ – действительные постоянные матрицы соответствующих размеров; $u = u(\cdot)$ – внешнее (кусочно-непрерывное) воздействие – управление; $\psi(\cdot)$ – начальная кусочно-непрерывная n_2-вектор-функция.

Под решением системы (1), (2) будем понимать абсолютно непрерывную n_1-вектор-функцию $x_1(\cdot)$ и кусочно-непрерывную n_2-вектор-функцию $x_2(\cdot)$, которые для всех $t \geq 0$ удовлетворяют уравнению (2) и для почти всех $t \geq 0$ удовлетворяют уравнению (1). Это решение начальной задачи (1)–(3) для каждого начального значения $x_{10} \in R^{n_1}$ и кусочно-непрерывной n_2-вектор-функции $\psi(\cdot)$ существует и единственно. Наряду с системой (1), (2) рассмотрим линейную обратную связь следующих типов:

– в виде простейшего регулятора

$$u(t) = Q_1x_1(t) + Q_2x_2(t), \quad (4)$$

где Q_1 и Q_2 – постоянные матрицы. Такой регулятор не выводит замкнутую систему за пределы рассматриваемого класса;

– в виде регулятора с интегральными составляющими типа свертки

$$u(t) = Q_1x_1(t) + Q_2x_2(t) + \int_0^t Q_1(s)x_1(t-s)ds + \int_0^t Q_2(s)x_2(t+h-s)ds, \quad (5)$$

где Q_1 и Q_2 – постоянные матрицы, $Q_1(\cdot)$ и $Q_2(\cdot)$ – матрицы-функции соответствующих размеров, причем элементы функциональных матриц $Q_1(\cdot)$ и $Q_2(\cdot)$ являются кусочно-непрерывными функциями с конечным носителем $H > 0$, $Q_1(\cdot) \equiv 0, Q_2(\cdot) \equiv 0$ для $t > H$.

Как и в работе [17], спектром системы (1), (2) назовем множество всех характеристических значений (основных и присоединенных) с учетом их кратностей, а соответствующие решения – спектральными решениями системы (1), (2). Невозмущенную систему (с выключенным управлением) назовем спектрально устойчивой, если все ее спектральные решения являются асимптотически устойчивыми.

Остается в силе [17] условие спектральной устойчивости невозмущенной системы (1), (2): для спектральной устойчивости невозмущенной системы (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы:

1) все основные собственные значения имели отрицательные действительные части;

2) все присоединенные собственные значения λ лежали в комплексной плоскости внутри единичного диска: $|\lambda| < 1$.

При исследовании ГДР-систем приходится применять к таким системам преобразование Лапласа, в связи с чем возникает необходимость в экспоненциальной оценке роста решений этих систем. Положим

$$x_2(t) = x_3(t-h), t \geq 0. \quad (6)$$

Тогда система запишется в виде ГДР-системы запаздывающего типа, более удобной для применения преобразования Лапласа:

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_3(t-h) + B_1u(t), \quad (7)$$

$$x_3(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_3(t-h) + B_2u(t), t \geq 0 \quad (8)$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = x_{10}, x_3(\tau) = \psi(\tau+h), \tau \in [-h, 0). \quad (9)$$

Пусть $T_t = \left[\frac{t}{h}\right]$ – целая часть числа $\frac{t}{h}$, $\|d\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |d_i|$ – норма n-вектора $d = [d_1, ..., d_n]' \in R^n$, $\|A\| = \max\limits_{1 \leq i \leq m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ – согласованная с нормой $\|d\|$ норма $m \times n$-матрицы $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n} \in R^{m \times n}$, штрих «'» означает транспонирование, $\aleph = \max\{\|A_{11}\|, \|A_{12}\|, \|A_{21}\|, \|A_{22}\|, \|B_1\|, \|B_2\|, \|x_{10}\|, \sup\limits_{\tau \in [0,h)} \|\psi(\tau)\|\}$.

Предположим, что управление имеет не выше, чем экспоненциальный рост, т. е. существуют такие неотрицательные числа K и α, что

$$\|u(t)\| \le Ke^{\alpha t} \text{ для } t \ge 0. \qquad (10)$$

Утверждение 1. Выберем число $\beta > 0$ так, чтобы $\beta > \alpha$ и $e^{-\beta h}\aleph < 1$. Имеет место следующая оценка:

$$\int_0^t e^{-\beta\tau}\|x_3(\tau-h)\|d\tau \le M + N\int_0^t e^{-\beta\tau}\|x_1(\tau)\|d\tau, t \ge 0,$$

$$M = \frac{N}{\beta} + \frac{K\aleph e^{-\beta h}(K\beta+(\beta-\alpha)\aleph)}{\beta(\beta-\alpha)(1-\aleph e^{-\beta h})}, N = \frac{\aleph e^{-\beta h}}{1-\aleph e^{-\beta h}}.$$

Доказательство. В силу уравнения (8) для $t \ge h$ имеем:

$$\int_h^t e^{-\beta\tau}\|x_3(\tau-h)\|d\tau = \left\|\int_h^t e^{-\beta\tau}\big(A_{21}x_1(\tau-h) +\right.$$

$$\left. + B_2u(\tau-h) + A_2x_3(\tau-h-h))d\tau\right\| \le$$

$$\le \|A_{21}\|\int_h^t e^{-\beta\tau}\|x_1(\tau-h)\|d\tau +$$

$$+\|B_2\|\int_h^t e^{-\beta\tau}\|u(\tau-h)\|d\tau +$$

$$+\|A_{22}\|\int_h^t e^{-\beta\tau}\|x_3(\tau-2h)\|d\tau \le \dots$$

$$\le \|A_{21}\|\int_h^t e^{-\beta\tau}\big(\|x_1(\tau-h)\| + \|A_{22}\|\|x_1(\tau-2h)\| + \dots +$$

$$+\|A_{22}\|^{T_\tau-1}\|x_1(\tau-T_\tau h)\|\big)d\tau + \|B_2\|\int_h^t e^{-\beta\tau}\big(\|u(\tau-h)\| +$$

$$+\|A_{22}\|\|u(\tau-2h)\| + \dots + \|A_{22}\|^{T_\tau-1}\|u(\tau-T_\tau h)\|\big)d\tau +$$

$$+\int_h^t e^{-\beta\tau}\|A_{22}\|^{T_\tau}\|\psi(\tau-T_\tau h)\|d\tau \le \int_h^t e^{-\beta\tau}\big(\aleph\|x_1(\tau-h)\| +$$

$$+\aleph^2\|x_1(\tau-2h)\| + \dots + \aleph^{T_\tau}\|x_1(\tau-T_\tau h)\|\big)d\tau +$$

$$+\int_h^t e^{-\beta\tau}(\aleph K e^{\alpha(\tau-h)} + \aleph^2 K e^{\alpha(\tau-2h)} + \dots +$$

$$+\aleph^{T_\tau}Ke^{\alpha(\tau-T_\tau h)})d\tau +$$

$$+\int_h^t e^{-\beta\tau}\aleph^{T_\tau}\aleph\, d\tau \le \aleph e^{-\beta h}\int_0^{t-h} e^{-\beta\gamma}\|x_1(\gamma)\|d\gamma + \aleph^2 e^{-2\beta h}\times$$

$$\times\int_0^{t-2h} e^{-\beta\gamma}\|x_1(\gamma)\|d\gamma + \dots + \aleph^{T_t}e^{-\beta T_t h}\int_0^{t-T_t h} e^{-\beta\gamma}\|x_1(\gamma)\|d\gamma +$$

$$+K\aleph e^{-\beta h}\int_0^{t-h} e^{-(\beta-\alpha)\gamma}d\gamma + K\aleph^2 e^{-2\beta h}\int_0^{t-2h} e^{-(\beta-\alpha)\gamma}d\gamma + \dots +$$

$$+K\aleph^{T_t}e^{-\beta T_t h}\int_0^{t-T_t h} e^{-(\beta-\alpha)\gamma}d\gamma + \aleph^2\int_h^{2h} e^{-\beta\tau}d\tau + \aleph^3\int_{2h}^{3h} e^{-\beta\tau}d\tau +$$

$$+\aleph^{T_t}\int_{T_t h-h}^{T_t h} e^{-\beta\tau}d\tau + \aleph^{T+1_t}\int_{T_t h}^{t} e^{-\beta\tau}d\tau = \oplus.$$

Расширяя при необходимости промежутки интегрирования и суммирования, с учетом формулы для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии получаем:

$$\oplus \le \big(\aleph e^{-\beta h} + \aleph^2 e^{-2\beta h} + \dots + \aleph^{T_t} e^{-\beta T_t h} + \dots\big)\times$$

$$\times\int_0^{t-h} e^{-\beta\gamma}\|x_1(\gamma)\|d\gamma + K\big(\aleph e^{-\beta h} + \aleph^2 e^{-2\beta h} + \dots + \aleph^{T_t} e^{-\beta T_t h} + \dots\big)\times$$

$$\times\int_0^{t-h} e^{-(\beta-\alpha)\gamma}d\gamma + \frac{\aleph^2 e^{-\beta h}}{\beta} + \frac{\aleph^3 e^{-2\beta h}}{\beta} + \dots + \frac{\aleph^{T_t+1}e^{-\beta T_t h}}{\beta} \le$$

$$\le \frac{\aleph e^{-\beta h}}{1-\aleph e^{-\beta h}}\int_0^{t-h} e^{-\beta\gamma}\|x_1(\gamma)\|d\gamma + \frac{K\aleph e^{-\beta h}}{(\beta-\alpha)(1-\aleph e^{-\beta h})} +$$

$$+\frac{\aleph^2 e^{-\beta h}}{\beta(1-\aleph e^{-\beta h})} = \frac{\aleph e^{-\beta h}(K\beta+(\beta-\alpha)\aleph)}{\beta(\beta-\alpha)(1-\aleph e^{-\beta h})} +$$

$$+\frac{\aleph e^{-\beta h}}{1-\aleph e^{-\beta h}}\int_0^{t-h} e^{-\beta\tau}\|x_1(\tau)\|d\tau.$$

Тогда

$$\int_0^t e^{-\beta\tau}\|x_3(\tau-h)\|d\tau \le \int_0^h e^{-\beta\tau}\|x_3(\tau-h)\|d\tau +$$

$$+\int_h^t e^{-\beta\tau}\|x_3(\tau-h)\|d\tau \le \int_0^h e^{-\beta\tau}\|\psi(\tau)\|d\tau +$$

$$+\frac{\aleph e^{-\beta h}(K\beta+(\beta-\alpha)\aleph)}{\beta(\beta-\alpha)(1-\aleph e^{-\beta h})} + \frac{\aleph e^{-\beta h}}{1-\aleph e^{-\beta h}}\times$$

$$\times\int_0^{t-h} e^{-\beta\tau}\|x_1(\tau)\|d\tau = \frac{N}{\beta} + \frac{\aleph e^{-\beta h}(K\beta+(\beta-\alpha)\aleph)}{\beta(\beta-\alpha)(1-\aleph e^{-\beta h})} +$$

$$+\frac{\aleph e^{-\beta h}}{1-\aleph e^{-\beta h}}\int_0^{t-h} e^{-\beta\tau}\|x_1(\tau)\|d\tau \le M + N\int_0^t e^{-\beta\tau}\|x_1(\tau)\|d\tau.$$

Утверждение доказано.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Пусть неотрицательные функции $v(\cdot)$, $p(\cdot)$ удовлетворяют соотношению

$$V(t) \le c + \int_a^t p(\tau)V(\tau)\tau \text{ для } t > 0, \text{ где } c \in R, c \ge 0.$$

Тогда имеет место неравенство

$$V(t) \le c\,e^{\int_a^t p(\tau)d\tau} \quad \text{при } t > 0.$$

Теорема 1. Для каждого решения $x_1(\cdot)$, $x_3(\cdot)$ системы (7), (8), порожденного начальными данными (9) и кусочно-непрерывным управлением, имеющим не выше, чем экспоненциальный рост (10), найдутся такие положительные числа L и μ, что

$$\|x_1(t)\| \le Le^{\mu t}, \ \|x_3(t)\| \le Le^{\mu t}. \tag{11}$$

Доказательство.

$$\frac{d}{d\tau}\left(e^{-\beta\tau}x_1(\tau)\right) = -\beta e^{-\beta\tau}x_1(\tau) + e^{-\beta\tau}\dot{x}_1(\tau) = -\beta e^{-\beta\tau} \times$$

$$\times x_1(\tau) + e^{-\beta\tau}(A_{11}x_1(\tau) + A_{12}x_3(\tau - h) + B_1u(\tau)),$$

откуда, интегрируя от 0 до t и оценивая по норме, с учетом неравенства (10) и утверждения 1 получаем:

$$e^{-\beta t}\|x_1(t)\| \le \|x_{10}\| + \beta\int_0^t e^{-\beta\tau}x_1(\tau)d\tau +$$

$$+\|A_{11}\|\int_0^t e^{-\beta\tau}\|x_1(\tau)\|d\tau + \|B_1\|\int_0^t e^{-\beta\tau}\|u(\tau)\|d\tau + \|A_{12}\| \times$$

$$\times\int_0^t e^{-\beta\tau}\|x_3(\tau - h)\|d\tau \le \aleph + (\beta + \aleph)\int_0^t e^{-\beta\tau}\|x_1(\tau)\|d\tau +$$

$$+K\aleph\int_0^t e^{-(\beta-\alpha)\tau}d\tau + \aleph M + \aleph N\int_0^t e^{-\beta\tau}\|x_1(\tau)\|d\tau \le$$

$$\le \aleph + \aleph M + \frac{K\aleph}{\beta - \alpha} + (\beta + \aleph + \aleph N)\int_0^t e^{-\beta\tau}\|x_1(\tau)\|d\tau.$$

Тогда в силу леммы

$$e^{-\beta t}\|x_1(t)\| \le \aleph\left(1 + M + \frac{K}{\beta - \alpha}\right)e^{\int_0^t(\beta + \aleph + \aleph N)d\tau},$$

откуда $\|x_1(t)\| \le L_1e^{\mu_1 t}$, и первое из неравенств (11) выполняется при

$$L = L_1 = \aleph + \aleph M + \frac{K\aleph}{\beta - \alpha}, \mu = \mu_1 = 2\beta + \aleph + \aleph N.$$

Докажем справедливость второго неравенства в (11).

Выберем положительное число m так, чтобы $m > \max\{1, \mu_1, \alpha\}$, $\aleph e^{-(m-\mu_1)h} < 1$, $\aleph e^{-(m-\alpha)h} < 1$.

Умножая (8) на e^{-mt} и оценивая по норме, с учетом выражения для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии получаем:

$$e^{-mt}\|x_3(t)\| \le e^{-mt}\left(\|A_{21}\|\|x_1(t)\| + \|A_{22}\|\|x_3(t-h)\| +\right.$$

$$\left.+\|B_2\|\|u(t)\|\right) \le e^{-mt}\|A_{21}\|\left(\|x_1(t)\| + \|A_{22}\|\|x_1(t-h)\| + \ldots +\right.$$

$$\left.+\ \|A_{22}\|^{T_t}\|x_1(t - T_th)\|\right) + e^{-mt}\|B_2\|\left(\|u(t)\| +\right.$$

$$\left.+\|A_{22}\|\|u(t-h)\| + \ldots + \|A_{22}\|^{T_t}\|u(t - T_th)\|\right) +$$

$$+\ e^{-mt}\|A_{22}\|^{T_t+1}\|\psi(t - T_th)\| \le \aleph L_1\left(e^{-(m-\mu_1)t} +\right.$$

$$+\ \aleph e^{-(m-\mu_1)h}e^{-(m-\mu_1)(t-h)} + \ldots +$$

$$\left.+\ \aleph^{T_t}e^{-(m-\mu_1)T_th}e^{-(m-\mu_1)(t-T_th)}\right) +$$

$$+\ \aleph K\left(e^{-(m-\alpha)t} + \aleph e^{-(m-\alpha)h}e^{-(m-\alpha)(t-h)} + \ldots +\right.$$

$$\left.+\ \aleph^{T_t}e^{-(m-\alpha)T_th}\ e^{-(m-\alpha)(t-T_th)}\right) + \aleph^2(\aleph e^{-mh})^{T_t} \times$$

$$\times\ e^{-m(t-T_th)} \le \aleph L_1\left(1 + \aleph e^{-(m-\mu_1)h}\cdot 1 + \ldots +\right.$$

$$\left.+\ (\aleph e^{-(m-\mu_1)h})^{T_t}\cdot 1\right) +$$

$$+\ \aleph K\left(1 + \aleph e^{-(m-\alpha)h}\cdot 1 + \ldots + (\aleph e^{-(m-\alpha)h})^{T_t}\cdot 1\right) +$$

$$+\ \aleph^2\cdot 1\cdot 1 \le \frac{\aleph L_1}{1 - \aleph e^{-(m-\mu_1)h}} + \frac{\aleph K}{1 - \aleph e^{-(m-\alpha)h}} + \aleph^2,$$

откуда

$$\|x_3(t)\| \le \left(\aleph^2 + \frac{\aleph L_1}{1 - \aleph e^{-(m-\mu_1)h}} + \frac{\aleph K}{1 - \aleph e^{-(m-\alpha)h}}\right)e^{mt}.$$

Таким образом, второе неравенство в (11) выполняется с

$$L = L_2 = \aleph^2 + \frac{\aleph L_1}{1 - \aleph e^{-(m-\mu_1)h}} + \frac{\aleph K}{1 - \aleph e^{-(m-\alpha)h}}, \mu = m.$$

Тогда при $L = \max\{L_1, L_2\}, \mu = m$ соблюдаются оба неравенства (11), что завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 1 дает экспоненциальную оценку решений системы (7), (8) (а следовательно, и системы (1), (2)), что позволяет применять к этим системам преобразование Лапласа.

Рассмотрим теперь необходимые условия стабилизации дифференциально-разностных систем.

Теорема 2. Если система является стабилизируемой регуляторами (4) или (5), то

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\lambda I_{n_1} - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ -A_{21} & e^{\lambda h}I_{n_2} - A_{22} & B_2\end{bmatrix} = n_1 + n_2, \tag{12}$$

$$\forall\lambda \in C, \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Доказательство. Предположим противное: система (1), (2) стабилизируема (регулятором (4) или (5)), а условие (12) не выполняется, т. е. существуют в общем случае комплексные число $\lambda^* \in C, \operatorname{Re}\lambda^* > 0$, и n_1- и n_2-вектор-строки c_1 и c_2 такие, что $[c_1, c_2] \ne 0$,

$$[c_1, c_2]\begin{bmatrix}\lambda^* I_{n_1} - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ -A_{21} & e^{\lambda^* h}I_{n_2} - A_{22} & B_2\end{bmatrix} = 0. \tag{13}$$

Вдоль решений системы (1), (2) имеем:

$$0=\int_0^t c_1 e^{-\lambda^*\tau}\left(\dot{x}_1(\tau)-A_{11}x_1(\tau)-A_{12}x_2(\tau)-\right.$$

$$\left.-B_1u(\tau)\right)d\tau+\int_0^t c_2 e^{-\lambda^*\tau}\left(x_2(\tau+h)-A_{21}x_1(\tau)-\right.$$

$$\left.-A_{22}x_2(\tau)-B_2u(\tau)\right)d\tau=c_1e^{-\lambda^* t}x_1(t)-c_1x_{10}+$$

$$+\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_1\left(\lambda^* I_{n_1}-A_{11}\right)x_1(\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_1A_{12}x_2(\tau)d\tau-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_1B_1u(\tau)d\tau+$$

$$+\int_h^{t+h} e^{-\lambda^* s+\lambda h}c_2x_2(s)ds-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_2A_{21}x_1(\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_2A_{22}x_2(\tau)d\tau-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_2B_2u(\tau)d\tau=-c_1x_{10}+$$

$$+c_1e^{-\lambda^* t}x_1(t)+\int_t^{t+h} e^{-\lambda^* s+\lambda^* h}c_2x_2(s)ds-\int_0^h e^{-\lambda^* s+\lambda^* h}c_2\times$$

$$\times x_2(s)ds+\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_1\left(\lambda^* I_{n_1}-A_{11}\right)x_1(\tau)d\tau-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_1\times$$

$$\times A_{12}x_2(\tau)d\tau-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_1B_1u(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t e^{-\lambda^* s+\lambda^* h}c_2x_2(s)ds-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_2A_{21}x_1(\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_2A_{22}x_2(\tau)d\tau-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_2B_2u(\tau)d\tau-c_1x_{10}+$$

$$+c_1e^{-\lambda^* t}x_1(t)+e^{-\lambda^*(t-h)}\int_0^h e^{-\lambda^*\tau}c_2x_2(t+\tau)d\tau-$$

$$-e^{\lambda^* h}\int_0^h e^{-\lambda^*\tau}c_2\psi(\tau)d\tau+\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_1\left(\lambda^* I_{n_1}-\right.$$

$$\left.-A_{11}\right)x_1(\tau)d\tau-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_1A_{12}x_2(\tau)d\tau-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_1B_1\times$$

$$\times u(\tau)d\tau+\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_2\left(e^{\lambda^* h}I_{n_2}-A_{22}\right)x_2(\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_2A_{21}x_1(\tau)d\tau-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}c_2B_2u(\tau)d\tau=c_1e^{-\lambda^* t}x_1(t)+$$

$$+e^{-\lambda^*(t-h)}\int_0^h e^{-\lambda^*\tau}c_2x_2(t+\tau)d\tau-c_1x_{10}-e^{\lambda^* h}\int_0^h e^{-\lambda^*\tau}c_2\times$$

$$\times\psi(\tau)d\tau+\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}\left(c_1\left(\lambda^* I_{n_1}-A_{11}\right)-c_2A_{21}\right)x_1(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}\left(c_2\left(e^{\lambda^* h}I_{n_2}-A_{22}\right)-c_1A_{12}\right)x_2(\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}\left(c_1B_1+c_2B_2\right)u(\tau)d\tau=c_1e^{-\lambda^* t}x_1(t)+$$

$$+e^{-\lambda^*(t-h)}\int_0^h e^{-\lambda^*\tau}c_2x_2(t+\tau)d\tau-c_1x_{10}-$$

$$-e^{\lambda^* h}\int_0^h e^{-\lambda^*\tau}c_2\psi(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t e^{-\lambda^*\tau}\left[c_1,c_2\right]\begin{bmatrix}\lambda^* I_{n_1}-A_{11} & -A_{12} & B_1\\ -A_{21} & e^{\lambda^* h}I_{n_2}-A_{22} & B_2\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}x_1(\tau)\\ x_2(\tau)\\ u(\tau)\end{bmatrix}d\tau\underset{(13)}{=}c_1e^{-\lambda^* t}x_1(t)+e^{-\lambda^*(t-h)}\times$$

$$\times\int_0^h e^{-\lambda^*\tau}c_2x_2(t+\tau)d\tau-$$

$$-c_1x_{10}-e^{\lambda^* h}\int_0^h e^{-\lambda^*\tau}c_2\psi(\tau)d\tau\ \Rightarrow$$

$$c_1e^{-\lambda^* t}x_1(t)+e^{-\lambda^*(t-h)}\int_0^h e^{-\lambda^*\tau}c_2x_2(t+\tau)d\tau=$$

$$=c_1x_{10}-e^{\lambda^* h}\int_0^h e^{-\lambda^*\tau}c_2\psi(\tau)d\tau. \qquad (14)$$

Поскольку по условию система (1), (2) стабилизируема, то найдется обратная связь – стабилизирующее управление (4), (или (5)), при котором замкнутая система (1), (2), (4) (или (1), (2), (5)) асимптотически устойчива, а значит, $\lim\limits_{t\to+\infty}\|x_1(t)\|=0,\quad \lim\limits_{t\to+\infty}\|x_2(t)\|=0.$ Поэтому левая часть в равенстве (14) стремится к нулю при $t\to+\infty$ в случае $\mathrm{Re}\lambda^*>0,$ в то время как правую часть можно отграничить от нуля за счет выбора начальных данных. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения теоремы 2.

Теорема 3. Если система является стабилизируемой регуляторами (4) или (5), то

$$\mathrm{rank}\left[\lambda I_{n_2}-A_{22}\quad B_2\right]=n_2,\ \forall\lambda\in C,|\lambda|<1. \qquad (15)$$

Доказательство. Предположим противное: система (1), (2) стабилизируема (регулятором (4) или (5)), а условие (15) не выполняется, т. е. существуют в общем случае комплексные число $\lambda^*\in C,\left|\lambda^*\right|\geq 1,$ n_2-вектор-строка c_2 такие, что $c_2\neq 0,$

$$c_2\left[\lambda^* I_{n_2}-A_{22}\quad B_2\right]=0. \qquad (16)$$

Поскольку система (1), (2) стабилизуема, то найдется линейная обратная связь, при которой все решения соответствующей замкнутой системы со временем затухают. В силу уравнения (2) вдоль импульсных решений с учетом условия (16) имеем:

$$c_2 x_2(kh+h) = c_2(A_{22}x_2(kh) + B_2 u(kh)) =$$
$$= \lambda^* c_2 x_2(kh) = \ldots = (\lambda^*)^{k+1} c_2 \psi(0),$$

поэтому

$$\|c_2 x_2(kh+h)\| = \left|\lambda^*\right|^{k+1} \|c_2 \psi(0)\|.$$

Как и при доказательстве теоремы 2, заключаем, что левая часть последнего равенства при неограниченном возрастании времени стремится к нулю, а правая нет (при подходящем выборе значения $\psi(0)$). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 3.

В работе [17] показано, что необходимое условие стабилизации скалярных дифференциально-разностных систем с помощью регулятора с интегральными составляющими типа свертки является одновременно и достаточным. Получены условия стабилизации системы простейшим регулятором. Приведен пример системы, для которой не существует простейшего регулятора, позволяющего ее стабилизировать, но находится регулятор с интегральными элементами.

Заключение. В работе проведена экспоненциальная оценка роста решений стационарных линейных гибридных дифференциально-разностных систем, таким образом, обоснована возможность применения к ним преобразования Лапласа. Доказаны необходимые условия стабилизации указанных систем линейной обратной связью в виде простейшего регулятора и регулятора с интегральными составляющими типа свертки. Результаты являются теоретическим обоснованием исследования качественных свойств как многомерных, так и скалярных дифференциально-разностных систем, которые описывают реальные системы управления.

Список литературы

1. Марченко В. М. Некоторые нерешенные задачи в теории управляемых динамических ГДР систем // Труды БГТУ. 2006. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–6.

2. Марченко В. М., Борковская И. М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем // Труды БГТУ. 2012. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 7–10.

3. Марченко В. М., Луазо Ж.-Ж. Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 5. С. 728–740.

4. März R. Solvability of linear differentia algebraic equations with properly stated leading terms // Results in Mathematics 45(2004). Basel: Birkhauser Verlag, 2004. P. 88–95.

5. Кириллова Ф. М., Стрельцов С. В. Необходимые условия оптимальности управлений в гибридных системах // Управляемые системы: сб. ст. Новосибирск, 1975. Вып. 14. С. 24–33.

6. Ахундов А. А. Управляемость линейных гибридных систем // Управляемые системы: сб. ст. Новосибирск, 1975. Вып. 14. С. 4–10.

7. Марченко В. М., Поддубная О. Н. Представление решений управляемых гибридных систем // Проблемы управления и информатики. 2002. № 6. С. 17–25.

8. Marchenko V. M., Poddubnaya O. N., Zaczkiewicz Z. Hybrid control and observation systems in symmetric form // IEEE conf. «RoMoCo». Poznan, Poland, 2005. P. 137–143.

9. Marchenko V. M., Zaczkiewicz Z. Observability for linear differential-algebraic systems with delay // IEEE conf. «MMAR'2005». Blazejewko, Poland, 2005. P. 299–303.

10. Луазо Ж.-Ж., Марченко В. М. Реализация в шкалах систем с запаздыванием // Доклады РАН. 2002. Т. 383, № 3. С. 305–308.

11. Марченко В. М., Поддубная О. Н. Представление решений и относительная управляемость линейных дифференциально-алгебраических систем со многими запаздываниями // Доклады РАН. 2005. Т. 404, № 4. С. 465–469.

12. De la Sen M. The reachability and observability of hybrid multirate sampling linear systems // Computers Math. Applic. 1996. Vol. 31, no. 1. P. 109–122.

13. Observability of linear hybrid systems / R.Vidal [et al.] // Hybrid systems: Computation and Control. 2003. Vol. 2623 of LNCS. P. 526–539.

14. Gertler J. J., Cruz J. B., Peshkin M. (Eds.) Hybrid Systems // Prepr. 13th World Congr. IFAC. 1996. Vol. J. P. 275–311, 473–476.

15. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

16. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964. 269 с.

17. Марченко В. М., Борковская И. М. О стабилизации скалярных гибридных дифференциально-разностных систем // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2020. № 1. С. 5–13.

References

1. Marchenko V. M. Some unsolved problems in the theory of controlled dynamic GDR systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2006, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 3–6 (In Russian).

2. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M. Stability and stabilization of the linear hybrid discrete-continues stationary systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2012, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 7–10 (In Russian).

3. Marchenko V. M., Loiseau J.-J. On the stability of hybrid difference-differential systems. *Differentsial'nyye uravneniya* [Differential Equations], 2009, vol. 45, no. 5, pp. 728–740 (In Russian).

4. März R. Solvability of linear differentia algebraic equations with properly stated leading terms. *Results in Mathematics 45(2004)*. Basel, Birkhauser Verlag, 2004. P. 88–95.

5. Kirillova F. M., Strel'tsov S. V. Necessary conditions for optimality of controls in hybrid systems. *Upravlyaemyye sistemy* [Controlled systems]. Novosibirsk, 1975, issue 14, pp. 24–33 (In Russian).

6. Akhundov A. A. Controllability of the linear hybrid systems. *Upravlyaemyye sistemy* [Controlled systems]. Novosibirsk, 1975, issue 14, pp. 4–10 (In Russian).

7. Marchenko V. M., Poddubnaya O. N. Representation of solutions of controlled hybrid systems. *Problemy upravleniya i informatiki* [Journal of Automation and Information Sciences], 2002, no. 6, pp. 17–25 (In Russian).

8. Marchenko V. M., Poddubnaya O. N., Zaczkiewicz Z. Hybrid control and observation systems in symmetric form. *IEEE conf. "RoMoCo".* Poznan, 2005, pp. 137–143.

9. Marchenko V. M., Zaczkiewicz Z. Observability for linear differential-algebraic systems with delay. *IEEE conf. "MMAR'2005"*. Blazejewko, 2005, pp. 299–303.

10. Loiseau J.-J., Marchenko V. M. Realization in scales of systems with aftereffect. *Doklady RAN* [Doklady Mathematics], 2002, vol. 383, no. 3, pp. 305–308 (In Russian).

11. Marchenko V. M., Poddubnaya O. N. Representation of solutions and relative controllability of linear differential-algebraic systems with many delays. *Doklady RAN* [Doklady Mathematics], 2005, vol. 404, no. 4, pp. 465–469 (In Russian).

12. De la Sen M. The reachability and observability of hybrid multirate sampling linear systems. *Computers Math. Applic*., 1996, vol. 31, no. 1, pp. 109–122.

13. Vidal R., Chiuso A., Soato S., Sastry S. Observability of linear hybrid systems. *Hybrid systems: Computation and Control*, 2003, vol. 2623 of LNCS, pp. 526–539.

14. Gertler J. J., Cruz J. B., Peshkin M. (Eds.) Hybrid Systems. *Prepr. 13th World Congr. IFAC*, 1996, vol. J, pp. 275–311, 473–476.

15. Bellman R., Cooke K. L. *Differentsial'no-raznostnyye uravneniya* [Differential-difference equations]. Moscow, Mir Publ., 1967. 548 p.

16. Wiener N., Paley R. *Preobrazovaniye Fur'ye v kompleksnoy oblasti* [Fourier transform in the complex domain]. Moscow, Nauka Publ., 1964. 269 p.

17. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M. On the stabilization of scalar hybrid differential-difference systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2020, no. 1, pp. 5–13 (In Russian).

Информация об авторах

Марченко Владимир Матвеевич − доктор физико-математических наук, профессор. E-mail: vladimir.marchenko@gmail.com

Борковская Инна Мечиславовна − кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: borkovskaia@gmail.com

Information about the authors

Marchenko Vladimir Matveevich − DSc (Physics and Mathematics), Professor. E-mail: vladimir.marchenko@gmail.com

Borkovskaya Inna Mechislavovna − PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: borkovskaia@gmail.com

Поступила после доработки 10.04.2020