

## ДВИЖЕНИЕ ИЗМЕЛЬЧАЮЩИХ ТЕЛ ПО СТАТИЧЕСКОМУ КОЛЬЦУ ЦЕНТРОБЕЖНО-ШАРОВОЙ МЕЛЬНИЦЫ

Боровский Д.Н., Вайтехович П.Е.

УО «Белорусский государственный технологический университет», г. Минск, Республика Беларусь

ИЗМЕЛЬЧЕНИЕ, ПОМОЛ, МЕЛЬНИЦА, СТАТИЧЕСКОЕ КОЛЬЦО, МЕЛЮЩЕЕ ТЕЛО, УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ, ТРАЕКТОРИЯ ДВИЖЕНИЯ, УДАР.

В статье рассмотрены проблемы получения тонкодисперсных порошков. Представлена методика расчета движения тел по статическому кольцу. Согласно составленной модели рассчитано максимальное радиальное перемещение тела в зависимости от наклона образующей кольца, от величины угловой скорости и геометрических размеров ротора.

Problems of obtaining of fine disperse powders are considered. The design procedure of movement of bodies on a static ring is presented. According to the model developed the maximum radial moving of a body depending on an inclination forming rings, from size of angular speed and the geometrical sizes of a rotor is calculated.

**Ш**аровое измельчение – один из наиболее распространенных способов разрушения материалов, позволяющий получить тонкодисперсный продукт. Это достигается благодаря комбинированному воздействию на материал, включающему раздавливание, истирание и удар. Однако измельчение, реализуемое в традиционных тихоходных барабанных мельницах, сопровождается большими энергозатратами.

Интенсификация шарового измельчения возможна в быстроходных мельницах, к которым относятся и центробежно-шаровые [1]. На уровне изобретений предложено значительное количество таких агрегатов [2 - 5], однако в теоретическом отношении они мало изучены [6], вследствие их большого конструктивного разнообразия и трудностей учета всех действующих факторов внутри мельниц данного типа, что в свою очередь негативно сказывается на разработке промышленных образцов этих измельчителей.

Для изучения центробежно-шаровых мельниц необходимо иметь цельную математическую модель движения как материала, так и мелющих тел внутри мельницы. Она позволит спрогнозировать характер движения загрузки, который в свою очередь даст возможность определить геометрические размеры и технологические параметры мельницы.

На рисунке 1 представлен один из вариантов центробежно-шаровой мельницы. В такой конст-

рукции движение мелющих тел можно разделить на несколько стадий: относительное движение во вращающемся роторе, движение по статическому кольцу, соударение тел и их свободный полет с возвращением на плоское днище ротора.

Движение мелющих тел по поверхности ротора достаточно подробно изучено нами в предыдущих работах [7, 8]. Следующий этап расчета – определение параметров движения элементов загрузки по наклонному статическому кольцу.

Данная задача является трехмерной, и для ее решения будем использовать неподвижную цилиндрическую систему координат, которая позволяет сразу определить координаты тела  $r$  и  $\varphi$ .

Уравнения движения по статическому кольцу имеют вид:

$$\begin{cases} m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = -F_{Tr}, \\ m(\ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2) = -F_{T\varphi}, \\ m\ddot{z} = -G - F_{Tz}. \end{cases} \quad (1)$$

Сила трения, препятствующая движению, направлена в противоположную сторону от вектора полной скорости  $\vec{v}$ . Проекция силы трения на оси координат в данном случае можно рассчитать по аналогии с работой [8] по формулам:

$$\begin{aligned} F_{Tr} &= fN \sin \beta, \\ F_{Tz} &= fN \cos \alpha \cos \beta, \end{aligned}$$

$$F_{Tz} = fN \sin \alpha \cos \beta \quad (2)$$

Поскольку реакция  $N$  направлена по общей нормали к поверхности и приложена в точке касания, то для нашего случая

$$N = N_{rz} = N_r \sin \alpha + N_z \cos \alpha \quad (3)$$

Проекция нормальной реакции на оси координат при отсутствии инерционной силы равны:

$$N_r = 0; N_z = G \quad (4)$$

Подставляя в уравнение (3) значения (4), получаем формулу для определения нормальной реакции:

$$N = mg \cos \alpha \quad (5)$$

Тригонометрические функции угла  $\beta$  в уравнениях (2) определяются через проекции полной скорости. Подставив полученные выражения для сил и функций углов в уравнение (1) и проведя ряд преобразований, получим окончательные уравнения движения мелющего тела по конической поверхности кольца в виде

$$\begin{cases} r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = -fg \cos \alpha \frac{r\dot{\phi}}{\sqrt{(r\dot{\phi})^2 + (\dot{r})^2 + (\dot{z})^2}}, \\ \ddot{r} - r(\dot{\phi})^2 = -fg \cos \alpha \frac{\sqrt{(\dot{r})^2 + (\dot{z})^2} \cos \alpha}{\sqrt{(r\dot{\phi})^2 + (\dot{r})^2 + (\dot{z})^2}}, \\ \ddot{z} = -g - fg \cos \alpha \frac{\sqrt{(\dot{r})^2 + (\dot{z})^2} \sin \alpha}{\sqrt{(r\dot{\phi})^2 + (\dot{r})^2 + (\dot{z})^2}}. \end{cases} \quad (6)$$

Полученная система уравнений (6) была использована для расчета движения тела по статическому кольцу вертикальной центробежно-шаровой мельницы. При этом радиус ротора изменялся от 0,1 до 0,5 м, а угол наклона образующей кольца  $\alpha$  – от 15 до 75°.

Расчеты проводились с использованием математического пакета Mathcad при различных угловых скоростях ротора мельницы  $\omega = 30-90$  рад/с для мелющего тела  $d_r = 15$  мм с коэффициентом трения качения  $f = 0,0001$  и материала  $d_v = 3$  мм с коэффициентом трения скольжения  $f = 0,3$ . Начальными условиями для расчета являлись значения координат тела и скоростей по осям  $r$ ,  $\phi$  и  $z$  на выходе из ротора [8]. Граничным условием при расчете принималось максимальное радиальное перемещение тела  $r_{max}$ , которое соответствует нулевым значениям проекций скоростей  $\dot{r}$  и  $\dot{z}$ , т.е.  $v_{rz} = 0$ . В этом случае измельчающее тело (частица) разворачивается и начинает двигаться вниз по конусу, продолжая перемещаться по окружности (координата  $\phi$ ). Максимальное радиальное перемещение

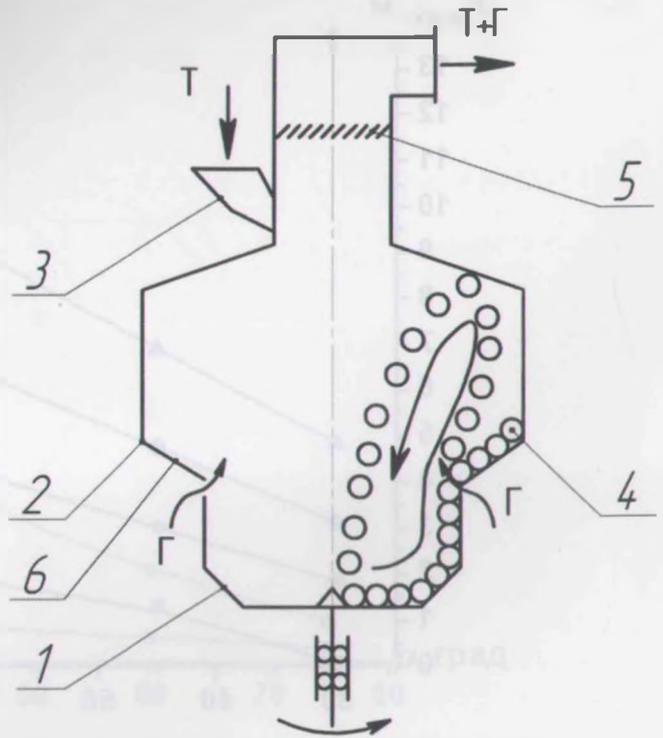


Рис. 1. Схема вертикальной центробежно-шаровой мельницы: 1 – ротор; 2 – корпус; 3 – загрузочная воронка; 4 – мелющее тело; 5 – классификатор; 6 – статическое кольцо

соответствует максимально возможному радиусу статического кольца  $R_{max}$  – одному из основных геометрических параметров мельницы.

Согласно полученным уравнениям (6) с учетом введенных ограничений получили максимальные значения радиального перемещения  $r_{max}$  для частиц материала (рисунки 2 и 3), скользящих по поверхности кольца.

Как видно из рисунка 2 максимальное радиальное перемещение возрастает с увеличением диаметра ротора, что объясняется соответственным увеличением центробежной силы на выходе из ротора. Аналогичная закономерность наблюдается и при уменьшении угла наклона между образующей и горизонталью (рисунок 3), причем изменение угла в пределах от 45 до 75° не очень существенно влияет на изменение радиального перемещения.

Необходимо отметить и тот факт, что при угловой скорости ротора диаметром 0,2 м менее 35 рад/с движения по статическому кольцу наблюдаться не будет, т.к. вылета из ротора ближайшего к его стенкам ряда материала или мелющих тел не происходит. При увеличении степени загрузки ротора, т.е. при возрастании количества рядов внутри него, эта минимальная угловая скорость враще-

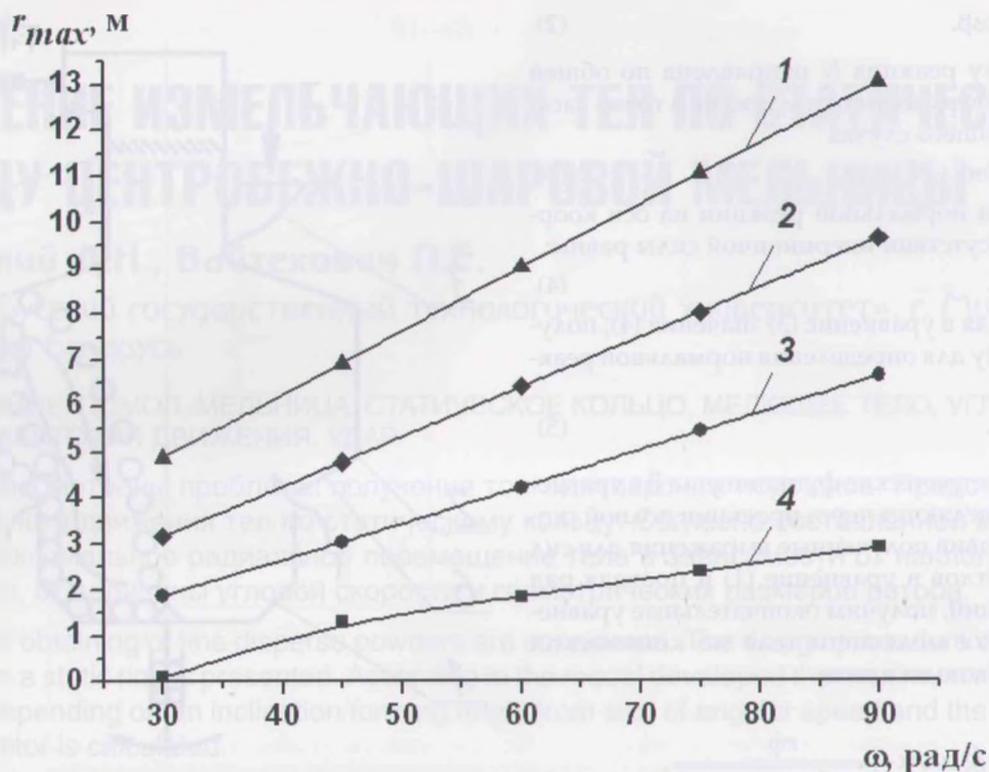


Рис. 2. Зависимость максимального радиального перемещения частицы материала от угловой скорости ротора при разных его диаметрах и фиксированном угле наклона образующей кольца  $\alpha = 30^\circ$   
 1 -  $d_p = 1,0$  м; 2 -  $d_p = 0,6$  м; 3 -  $d_p = 0,4$  м; 4 -  $d_p = 0,2$  м

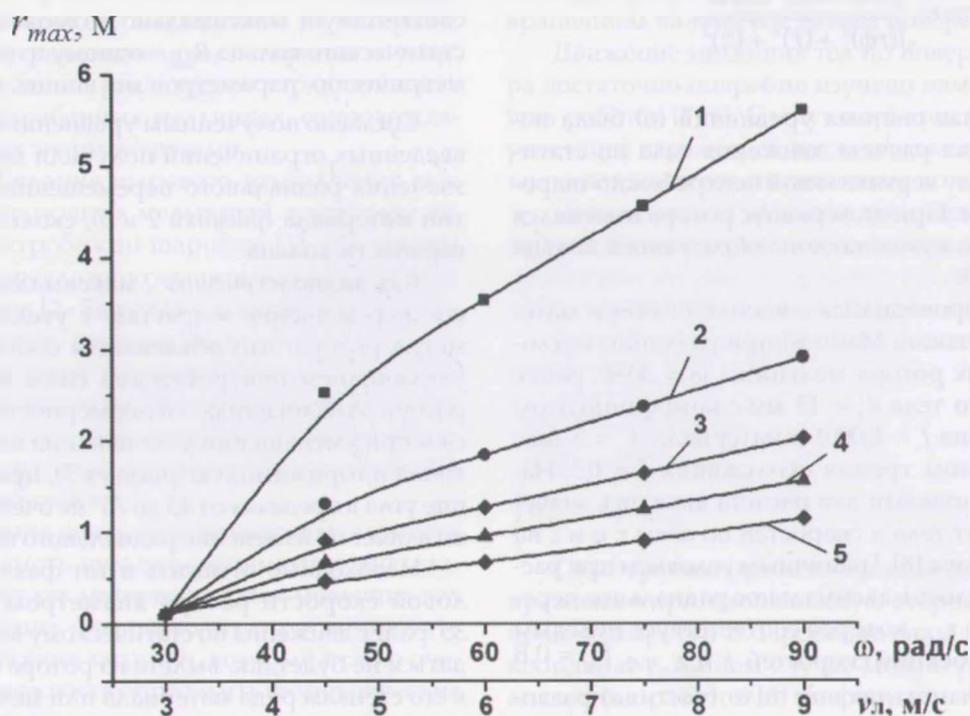


Рис. 3. Зависимость максимального радиального перемещения частицы материала от угловой (линейной) скорости ротора при разных углах наклона образующей и фиксированном диаметре ротора  $d_p = 0,1$  м  
 1 -  $\alpha = 15^\circ$ ; 2 -  $\alpha = 30^\circ$ ; 3 -  $\alpha = 45^\circ$ ; 4 -  $\alpha = 60^\circ$ ; 5 -  $\alpha = 75^\circ$

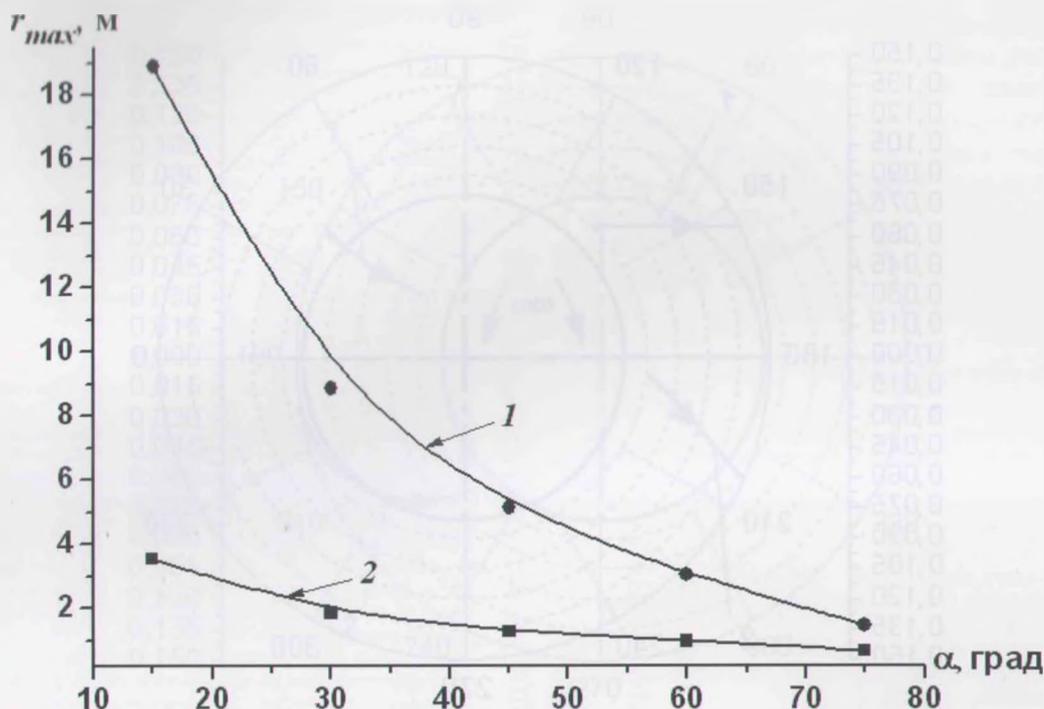


Рис. 4. Зависимость максимального радиального перемещения тел от угла наклона образующей при линейной скорости ротора  $v_p = 6$  м/с. 1 – мелющее тело (шар); 2 – частица материала

ния ротора будет снижаться и, как следствие, будет наблюдаться движение по статическому кольцу материала или мелющих тел.

Перекатывающееся по поверхности кольца измельчающее тело (шар) перемещается в радиальном направлении на значительно большее расстояние, чем скользящая частица материала (рисунок 4).

Поскольку при измельчении необходим контакт материала и мелющих тел, то максимальный радиус кольца на данном этапе ограничивается радиальным перемещением  $r_{max}$  частиц материала.

В процессе измельчения на кольце одновременно находится некоторое количество мелющих тел и материала, которые влияют на движение и скорость каждого в отдельности мелющего тела и, как следствие, затормаживают его на подъеме и при спуске, уменьшая скорость движения практически до нуля. Это влияние очень трудно учесть. Поэтому с целью полного использования поверхности кольца необходимо, чтобы площадь его поверхности была приблизительно равна площади внутренней поверхности ротора. При этом мелющие тела, соприкасающиеся непосредственно со стенками ротора (первый слой), вытесняются на поверхность кольца, а остальные займут их место и обеспечат соударения между телами, скатывающимися с кольца и находящимися на роторе.

Также необходимо отметить, что диаметр кольца равен диаметру корпуса мельницы, стенки которого должны обеспечить ограничение траектории движения мелющих тел таким образом, чтобы после свободного полета их соприкосновение с ротором было как можно ближе к его оси вращения. В этом случае будет достигаться наиболее равномерное распределение мелющих тел как по поверхности ротора, так и по всему объему мельницы, и, соответственно, максимально возможный их контакт с материалом, что способствует повышению эффективности измельчения.

В качестве примера вышесказанному, исходя из равенства площадей поверхностей, для ротора диаметром  $d_p = 185$  мм и высотой 55 мм диаметр кольца примерно составит  $D_k = 310$  мм. Тогда с учетом этих геометрических ограничений построим траекторию движения частицы материала ( $d_c = 3$  мм,  $f = 0,3$ ) и мелющего тела ( $d_t = 3$  мм,  $f = 0,0001$ ) по кольцу при угловой скорости ротора мельницы  $\omega = 60$  рад/с.

Подъем по кольцу частицы материала (мелющего тела) осуществляется по прямолинейной траектории, отклоненной от радиуса кольца примерно на  $30^\circ$  (рисунок 5). Отличие в наклоне траектории движения материала и тела незначительное и составляет всего  $3 - 6^\circ$ . Оно обусловлено разностью

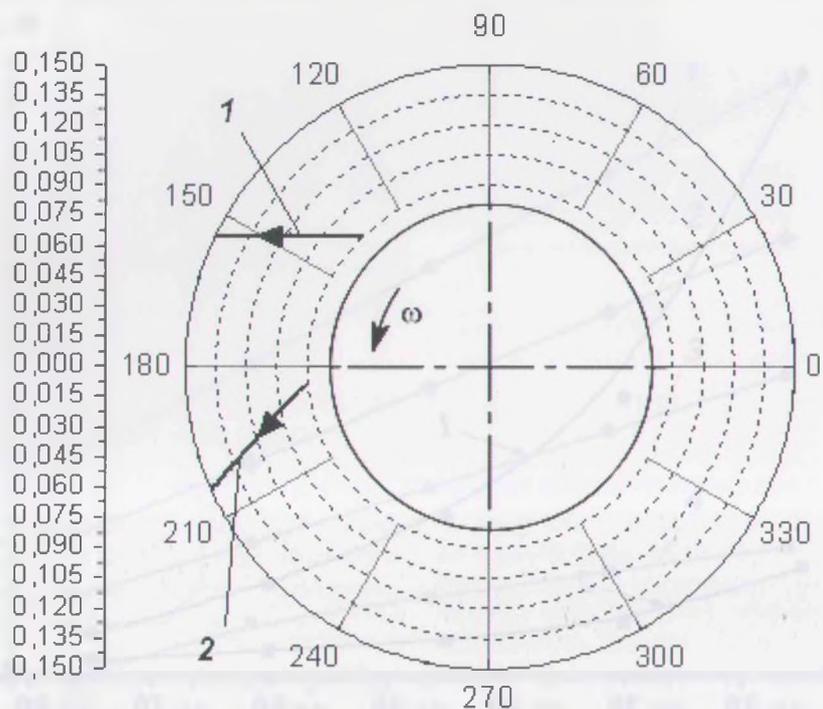


Рис. 5. Траектория движения тела при подъеме по кольцу  
1 – частица материала; 2 – мелющее тело (шар)

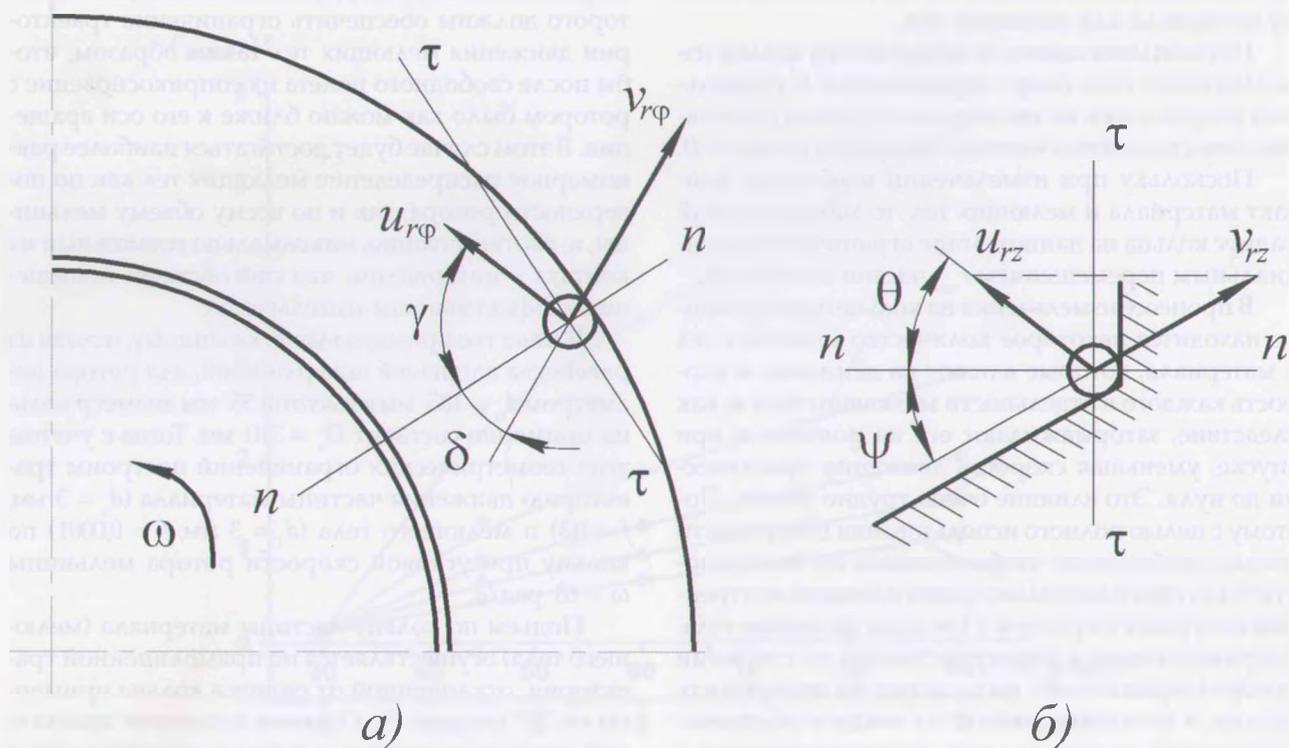


Рис. 6. Расчетная схема для соударения тела со стенками корпуса:  
а) – соударение в плоскости  $Or\phi$ ; б) – соударение в плоскости  $Orz$

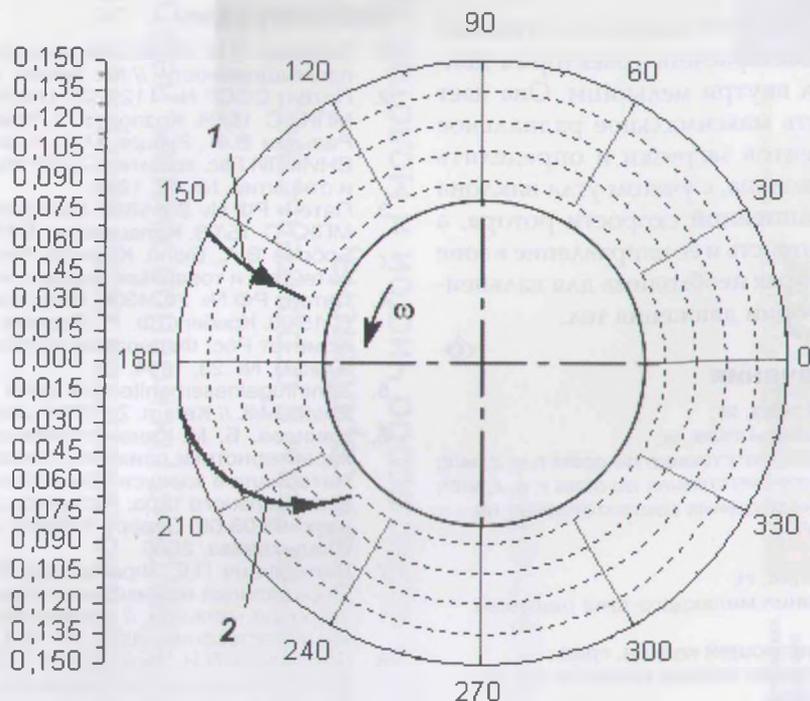


Рис. 7. Траектория движения тела при спуске с кольца  
1 – частица материала; 2 – мелющее тело (шар)

величин коэффициентов трения, а следовательно, и сил трения, входящих в уравнения движения.

После того как мелющее тело (частица материала) достигло периферии кольца, оно соударяется со стенками корпуса (рисунком 6). Причем удар является косым как в плоскости  $O\varphi\psi$  (рисунком 5), так и в плоскости  $O\varphi z$ . Поэтому необходимо найти величины и направления скоростей  $u_{\varphi\psi}$  и  $u_{\varphi z}$  тела (частицы) после удара о стенки корпуса мельницы.

Величины скоростей до удара  $v_{\varphi\psi}$  и  $v_{\varphi z}$  равны

$$v_{\varphi\psi} = \sqrt{(\dot{r})^2 + (\dot{\varphi})^2}; \quad v_{\varphi z} = \sqrt{(\dot{r})^2 + (\dot{z})^2}. \quad (7)$$

Для определения направлений и величин скоростей  $u_{\varphi\psi}$  и  $u_{\varphi z}$  при косом ударе используем следующие соотношения для определения коэффициента восстановления [9]:

$$k_1 = \frac{|(u_{\varphi\psi})_n|}{|(v_{\varphi\psi})_n|} = \frac{\tan(\delta)}{\tan(\gamma)}; \quad k_2 = \frac{|(u_{\varphi z})_n|}{|(v_{\varphi z})_n|} = \frac{\tan(\psi)}{\tan(\theta)}. \quad (8)$$

Значения  $k_1$  и  $k_2$  также можно найти в зависимости от скоростей тела до удара  $v_{\varphi\psi}$  и  $v_{\varphi z}$  [10, 11].

Согласно расчетной схеме (рисунком 6, а) и соотношения (8) скорость движения тела после удара  $u_{\varphi\psi}$  в плоскости  $O\varphi\psi$  находится по формуле:

$$u_{\varphi\psi} = k_1 \left| v_{\varphi\psi} \cdot \frac{\cos(\delta)}{\cos(\gamma)} \right|. \quad (9)$$

Тангенс угла  $\delta$  находится из следующего равенства  $\tan(\delta) = \dot{r} / \dot{\varphi}$ .

Тогда с учетом равенства (8) и соотношения для тангенса угла  $\delta$  можно найти угол  $\gamma$ :

$$\gamma = \arctan\left(\frac{\tan(\delta)}{k}\right). \quad (10)$$

Аналогичным образом находятся скорость  $u_{\varphi z}$  и угол  $\theta$ :

$$u_{\varphi z} = k_2 \left| v_{\varphi z} \cdot \frac{\cos(\psi)}{\cos(\theta)} \right|, \quad \theta = \arctan\left(\frac{\tan(\psi)}{k}\right). \quad (11)$$

При соударении кинетическая энергия тела (частицы) уменьшается, в результате чего, оно под действием силы тяжести скатывается с наклонного кольца вниз (рисунком 7). Причем для рассматриваемого случая с введенными выше ограничениями траектория движения мелющего тела будет иметь вид закручивающейся во внутрь спирали, а у частицы материала она практически прямая.

Аналогичным образом можно получить траекторию движения по статическому кольцу для тел с различными диаметром и коэффициентом трения, при иных геометрических размерах мельницы и частотах вращения ее ротора.

**Заключение.** Предложенная методика расчета, базирующаяся на решении системы дифференци-

альных уравнений, является одной из составных частей общей методики расчета траектории движения мелющих тел внутри мельницы. Она дает возможность оценить максимальное радиальное перемещение элементов загрузки и определить возможный радиус кольца, с учетом угла наклона его образующей и линейной скорости ротора, а также определить скорость и ее направление в зоне «кольцо-ротор», которая необходима для дальнейшего расчета траектории движения тел.



## Условные обозначения

- $m$  масса мелющего тела, кг;  
 $r, \varphi, z$  текущие координаты тела, м;  
 $\dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}$  скорости тела соответственно по осям  $r, \varphi, z$ , м/с;  
 $\ddot{r}, \ddot{\varphi}, \ddot{z}$  ускорения тела соответственно по осям  $r, \varphi, z$ , м/с<sup>2</sup>;  
 $F_{Tr}, F_{T\varphi}, F_{Tz}$  – проекции сил трения соответственно на оси  $r, \varphi, z$ , Н;  
 $G$  сила тяжести, Н;  
 $N$  нормальная реакция, Н;  
 $f$  коэффициент трения мелющего тела (частицы материала);  
 $\alpha$  угол наклона образующей кольца, град.;  
 $\beta$  угол между векторами полной скорости  $\vec{v}$  и ее проекцией  $\vec{v}_{rz}$ , град.;  
 $g$  ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;  
 $k_1$  и  $k_2$  коэффициенты восстановления соответственно в плоскостях  $O\varphi$  и  $Orz$ ;  
 $v_{rp}, v_{rz}, u_{rp}, u_{rz}$  – скорости до и после удара соответственно в плоскостях  $O\varphi$  и  $Orz$ , м/с;  
 $(v_{rp})_n, (v_{rz})_n, (u_{rp})_n, (u_{rz})_n$  – проекции скоростей до и после удара соответственно в плоскостях  $O\varphi$  и  $Orz$  на нормаль, м/с;  
 $\delta$  и  $\gamma$  углы между нормалью и направлением векторов скоростей  $\vec{v}_{rp}$  и  $\vec{u}_{rp}$  соответственно, град.;  
 $\psi$  и  $\theta$  углы между нормалью и направлением векторов скоростей  $\vec{v}_{rz}$  и  $\vec{u}_{rz}$  соответственно, град.

## Библиография

1. Сиденко П.М. Измельчение в химической промышленности. // М.: Химия, 1977.
2. Патент СССР № 1123723. Центробежная мельница. МПК7 С 15/08. Козлов В.И., Кребель Ф.Р., Редькин В.Ф., Рубцов Н.М., Козырев С.А., Бюлл. ВНИИПИ Гос. комитет СССР по делам изобретений и открытий, № 42, 1984.
3. Патент РФ № 2014892. Центробежная мельница. МПК7 С 15/08. Калашников В.Н., Саламатов М.А., Бобров В.А., Бюлл. Комитет Рос. Федерации по патентам и товарным знакам, № 12, 1994.
4. Патент РФ № 2024309. Шаровая мельница. МПК7 С 15/08. Кребель Ф. Р., Редькин В. Ф., Бюлл. Комитет Рос. Федерации по патентам и товарным знакам, № 23, 1994.
5. Zentrifugalnassmahltechnik bis in den Nanobereich mit Pestle-Mill. // Keram. Z., 2004, Jhrg. 56, № 5, S. 320.
6. Наниева, Б. М. Кинематические и динамические характеристики движения измельчаемого материала в корпусе центробежной мельницы вертикального типа: Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.05.06. Северо-Кавказ. гос. технологич. ун-т. Владикавказ, 2005.
7. Вайтехович П.Е., Францевич В.С., Хвесько Г.М. Определение важнейших параметров центробежно-шаровых мельниц. // Химическое и нефтегазовое машиностроение, 2007, № 10, С. 3 ? 5.
8. Боровский Д.Н., Вайтехович П.Е., Семенов Д.В. Математическое моделирование движения мелющих тел на роторе вертикальной центробежной мельницы. // Труды БГТУ., Сер. III, Химия и технология неорганич. в-в., 2009, Вып. XVII, С. 163 – 166.
9. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для вузов. // М.: Высш. шк., 2007.
10. Клейс И., Паппель Т., Хусаинова И., Щеглов И. Исследование процесса ударных взаимодействий частиц. // Трение и износ, 1997, Т. 18, № 6, С. 730 – 735.
11. Барсуков В., Крупич Б. Трибомеханика дисперсных материалов. // Гродно: ГрГУ, 2004.

## Авторы

### Боровский Денис Николаевич

аспирант кафедры машин и аппаратов химических и силикатных производств, УО «Белорусский государственный технологический университет», г. Минск  
 Тел. +375-29-776-00-46  
[Dzianis23@rambler.ru](mailto:Dzianis23@rambler.ru)

### Вайтехович Петр Евгеньевич

зав. кафедрой машин и аппаратов химических и силикатных производств, УО «Белорусский государственный технологический университет», г. Минск  
 Тел. +375-29-668-32-56