

О ЗАТУХАНИИ ТАНГЕНЦИАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ТУРБУЛЕНТНОГО ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА В ТРУБАХ

Закрутка потоков жидкости и газа позволяет интенсифицировать процессы тепло- и массообмена. При этом степень интенсификации определяется абсолютным значением и характером распределения тангенциальной скорости по радиусу и длине трубы. Величина тангенциальной скорости также сильно влияет на сепарацию жидкой фазы в двухфазном потоке, что является существенным для массообменных аппаратов. В связи с этим вопрос затухания тангенциальной скорости в потоке при закручивании его только на начальном участке приобретает важное теоретическое и практическое значение.

Затухание крутки тесно связано с турбулентной структурой самого закрученного потока, и вид уравнений движения зависит от привлекаемых гипотез о связи осредненных составляющих скоростей с пульсационными. В зависимости от принятых связей уравнения могут между собой несколько различаться. В настоящей работе пульсационные составляющие скорости исключены с помощью введения турбулентной вязкости. Согласно [1], в результате применения модифицированной теории переноса завихренности Тейлора и допущения об изотропности турбулентных коэффициентов переноса уравнение движения в тангенциальном направлении без учета радиальной составляющей скорости ввиду ее малости имеет вид:

$$u \frac{\partial w}{\partial x} = (\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} \right), \quad (1)$$

где u, w — соответственно осевая и тангенциальная составляющие скорости; x, r — продольная и поперечная координаты; ν, ν_T — коэффициенты молекулярной и турбулентной вязкости.

С помощью уравнения (1) при известном распределении ν_T возможен расчет затухания тангенциальной скорости.

В литературе известно несколько точек зрения относительно распределения ν_T по радиусу. Если принять ν_T , не зависящим от r [2,3], то для области внепограничного слоя уравнение (1) допускает аналитическое решение.

Переходя в (1) к безразмерным переменным

$$u^* = \frac{u}{u_{cp}}; \quad w^* = \frac{w}{u_{cp}}; \quad Re = \frac{u_{cp} R}{\nu}; \quad r^* = \frac{r}{R}; \quad x^* = \frac{x}{R}; \quad \nu_T^* = \frac{\nu_T}{\nu}$$

и пренебрегая молекулярной вязкостью по сравнению с турбулентной, получим

$$u \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\nu_T}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} \right) \quad (2)$$

Здесь в безразмерных переменных опущены звездочки, а в качестве масштаба для скоростей принята средняя осевая скорость u_{cp} и для координат — радиус трубы R .

Решение ищем при следующих граничных условиях:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad r = 0 ; \quad (3)$$

$$w = w_0 \quad \text{при} \quad r = 1 - \delta ;$$

$$w = f(r) \quad \text{при} \quad x = 0 , \quad (4)$$

где w_0 — значение w на границе пограничного слоя; δ — безразмерная толщина пограничного слоя.

Учитывая малую толщину пограничного слоя на начальных участках трубы, будем приближенно считать, что $w = w_0$ при $r = 1$, а u не зависит от x и r и равно u_{cp} . Условие $u = u_{cp}$ довольно строго выполняется при закручивании тока спиральной лентой. При надобности решение можно уточнить, имея действительное распределение u .

Для решения уравнения (2) при условиях (3) и (4) используем конечное интегральное преобразование Ханкеля [4], которое определяется выражением

$$\bar{V}(p) = \int_0^1 r J_n(pr) V(r) dr , \quad (5)$$

где $J_n(p, r)$ — функция Бесселя первого рода порядка n ; p — положительный корень уравнения;

$$J_n(p) = 0 . \quad (6)$$

Формулой обращения для преобразования Ханкеля служит ряд

$$V(r) = 2 \sum_p \frac{J_n(pr)}{J_{n+1}^2(p)} \bar{V}(p) , \quad (7)$$

в котором суммирование происходит по всем положительным корням уравнения (6).

Преобразование (5) позволяет исключить из заданного дифференциального уравнения совокупность членов вида

$$F(V) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{n^2 V}{r^2} .$$

В случае $n=1$, чтобы исключить переменную r из уравнения (2), воспользуемся преобразованием

$$\bar{w} = \int_0^1 r J_1(pr) w dr, \quad (8)$$

где $J_1(pr)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка; p — положительный корень уравнения

$$J_1(p) = 0. \quad (9)$$

Умножая правую и левую части (2) на $r J_1(pr)$ и интегрируя по r от 0 до 1 с учетом (3), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{\nu_T}{u Re} \left[p w_0 J_1'(p) + p^2 \bar{w} \right]. \quad (10)$$

Поскольку важно выяснить характер затухания тангенциальной скорости по длине в ядре потока, то примем для начальных участков труб в первом приближении $w_0 = \text{const}$, что, впрочем, не изменит закона затухания. Дальше вниз по потоку с хорошим приближением можно положить $w_0 = 0$.

Тогда уравнение (10) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dx} \left[\bar{w} + \frac{w_0 J_1'(p)}{p} \right] = -\frac{\nu_T}{u Re} p^2 \left[\bar{w} + \frac{w_0 J_1'(p)}{p} \right],$$

решением которого будет

$$\bar{w} + \frac{w_0 J_1'(p)}{p} = C \exp\left(-\frac{\nu_T}{u Re} p^2 x\right). \quad (11)$$

Для определения C воспользуемся условием (4). Из выражения (11) при $x=0$ получим

$$\bar{w}(p,0) + \frac{w_0 J_1'(p)}{p} = C. \quad (12)$$

С другой стороны граничное условие (4) можно записать

$$\bar{w}(p,0) = \int_0^1 f(r) r J_1(pr) dr. \quad (13)$$

Следовательно, выражение (12) с учетом (13) примет вид

$$C = \int_0^1 f(r) r J_1(pr) dr + \frac{w_0 J_1'(p)}{p}. \quad (14)$$

Подставив (14) в (11), будем иметь

$$\bar{w} = \left[\int_0^1 f(r) r J_1(pr) dr \right] \exp\left(-\frac{\nu_T}{u Re} p^2 x\right) + \frac{w_0 J_1'(p)}{p} \left[\exp\left(-\frac{\nu_T}{u Re} p^2 x\right) - 1 \right]. \quad (15)$$

Применяя формулу обращения (7) и имея ввиду, что

$$J_1'(p) = -J_2(p) + \frac{J_1(p)}{p} = -J_2(p), \quad (5)$$

окончательно получим

$$w = 2 \sum_p \frac{J_1(pr)}{J_2^2(p)} \left\{ \left[\int_0^1 f(r) r J_1(pr) dr \right] \exp\left(-\frac{\nu_T}{u Re} p^2 x\right) - \frac{w_0 J_2(p)}{p} \left[\exp\left(-\frac{\nu_T}{u Re} p^2 x\right) - 1 \right] \right\}, \quad (16)$$

где суммирование происходит по всем положительным корням уравнения (9), из которых первые три равны [6]: 3,83; 7,02; 10,17. Ряд (16) быстро сходится, и для расчетов достаточно провести суммирование по двум корням.

При $w = 0$ в уравнении (16) исчезнет второе слагаемое.

Во втором приближении положим $w_0 = A - Bx$, тогда после соответствующих преобразований будем иметь

$$w = 2 \sum_p \frac{J_1(pr)}{J_2^2(p)} \left\{ \left[\int_0^1 f(r) r J_1(pr) dr \right] \exp\left(-\frac{\nu_T}{u Re} p^2 x\right) - \frac{J_2(p)B}{p} x + \left[\frac{J_2(p)A}{p} + \frac{J_2(p)B}{\frac{\nu_T}{u Re} p^3} \right] \left[1 - \exp\left(-\frac{\nu_T}{u Re} p^2 x\right) \right] \right\}. \quad (17)$$

Более точное условие для w_0 может быть получено при совместном решении уравнений для ядра и пограничного слоя.

Значения ν_T и $f(r)$ определяются из эксперимента.

В действительности ν_T не является постоянной величиной [7] даже в области внепограничного слоя, а является, по меньшей мере, функцией градиента скорости и r . На основе гипотезы пути перемешивания Прандтля примем следующую связь между ν_T и градиентом скорости:

$$\nu_T = l^2 r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w}{r} \right), \quad (18)$$

где l - путь перемешивания, являющийся функцией r .

Тогда уравнение (1) примет вид

$$u \frac{\partial w}{\partial x} = l^2 \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} \right). \quad (19)$$

При кинематическом подобии тангенциальной скорости в различных сечениях по длине (3,8), ее можно представить в виде

$$w = W_m(x) \varphi(r) \quad (20)$$

Подставляя (20) в (19), будем иметь

$$u \varphi \frac{dW_m}{dx} = l^2 W_m^2 \left(\frac{df}{dr} - \frac{f}{r} \right) \left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{f}{r^2} \right), \quad (21)$$

где W_m — максимальная тангенциальная скорость в сечении.

При этом переменные разделяются

$$W_m^{-2} \frac{dW_m}{dx} = l^2 \left(\frac{df}{dr} - \frac{f}{r} \right) \left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{f}{r^2} \right) \Big|_{uf} = -\lambda^2. \quad (22)$$

Отсюда для W_m имеем:

$$W_m = \frac{1}{\lambda^2 x + C_1}. \quad (23)$$

Из (23) видно, что затухание тангенциальной скорости происходит по гиперболе, в то время как в (16) и (17) затухание определяется экспонентой. Из выражения (16) следует зависимость

$$W_m = W_{m0} \exp(-C_2 x), \quad (24)$$

где W_{m0} — максимальная тангенциальная скорость в сечении при $x = 0$.

Значения постоянных λ, C_1 в (23) и W_{m0}, C_2 в (24) проще всего установить из экспериментальных данных. Нами получены опытные данные [8], позволяющие выразить в явном виде зависимости (23) и (24), и тем самым определить скорость затухания крутки потока по длине, а также оценить применимость изложенных выше двух выражений для турбулентной вязкости. При формировании потока тангенциальными каналами для степени закрутки $n = 1,0$, равной отношению площади тангенциальных каналов к площади сечения трубы, получены зависимости:

$$W_m = 2,14 \exp(-0,016 x), \quad (25)$$

$$W_m = \frac{1}{0,0135 x + 0,45}. \quad (26)$$

Постоянные в (25) и (26) найдены для труб относительной длиной $L/d = 4$. Оказалось, что обе зависимости хорошо описывают характер затухания тангенциальной скорости, поскольку максимальные отклонения не превосходят 3—4%. Представляло интерес сравнение с экспериментами Фейджа, Лэвена и Волфа, приведенными в [1] для длинных труб. Так, по (25) затухание тангенциальной скорости до 20% от первоначального значения произойдет на длине трубы, равной $100 R$, а по (26) — на $132 R$. Эксперименты в длинных трубах лучше согласуются с (26), что и следовало ожидать. Зависимость (25) получена в предположении постоянства турбулентной вязкости по сечению и длине трубы. На самом деле по мере затухания крутки ν_T уменьшается, что и приводит к более быстрому затуханию. Для начальных же участков труб (16) и (25) дают вполне приемлемые результаты.

Литература

1. Рочино, Лэвен. Тр. амер. об. инж.-мех. Прикладная механика, 3 (1969).
2. R. Deissler, M. Perlmutter. Jnt. Heat Mass Transfer, 1, (1960).
3. Ю. А. Гостинцев, В. М. Зайцев. ИФЖ, 20, 3 (1971).
4. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. М., 1969.
5. Д. С. Кузнецов. Специальные функции. М., 1962.
6. Е. Янке, Ф. Эмде. Таблицы функций. М., 1959.
7. В. М. Собин, А. И. Ершов. Тепло- и массоперенос, т. 1. Конвективный тепло- и массоперенос, ч. 1. Минск, 1972.
8. В. М. Собин, А. И. Ершов. Изв. АН БССР, сер. физ.-энерг. наук, 3 (1972).