

УДК 536.244

М. Ф. Шнайдерман, А. И. Ершов

О ВЛИЯНИИ ЗАКРУТКИ ПОТОКА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И ТЕМПЕРАТУР В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

Приведены результаты численного исследования влияния закрутки потока на структуру ламинарного течения и теплообмен в круглой трубе.

В последние годы внимание исследователей привлекают вопросы, связанные с изучением влияния закрутки потока на интенсификацию процессов тепло- и массообмена [1].

В [2] исследовался характер затухания тангенциальной составляющей скорости ламинарного течения жидкости по радиусу и длине трубы посредством линеаризации полной системы уравнений Навье — Стокса. Автором экспериментально была найдена критическая кривая для возникновения неустойчивого вихревого движения в виде зависимости числа Рейнольдса от угловой скорости жидкости на входе в трубу.

Существующие в настоящее время численные методы расчета течения вязкой жидкости [3] дают возможность решить задачу в нелинейной постановке и более точно определить влияние закрутки потока на гидродинамику и теплообмен.

Нами рассмотрена следующая задача. Жидкость, имеющая на входе в трубу постоянную по сечению осевую скорость V , закручивается по закону твердого тела. Требуется рассчитать профили скорости в различных сечениях по длине трубы.

Записываем систему уравнений Навье — Стокса для стационарного ламинарного течения несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} \rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} \right), \\ \rho \left(v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) &= \mu \left(\nabla^2 v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} \right), \\ \rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z, \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Граничные условия принимаются следующими:

$$v_r = v_\varphi = v_z = 0 \quad \text{при } r = R, \quad (2)$$

$$v_z = V, \quad v_r = 0, \quad v_\varphi = \Omega r \quad \text{при } z = 0, \quad (3)$$

$$v_r = v_\varphi = 0, \quad v_z = 2V(1 - r^2/R^2) \quad \text{при } z = Z. \quad (4)$$

Условие (4) означает, что на достаточно большом расстоянии от входа течение считается гидродинамически стабилизированным и тангенциальная составляющая скорости отсутствует.

Вводим функции тока и напряженности вихря, определяемые из следующих выражений:

$$v_z = \frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_r = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{1}{\rho r}, \quad \omega = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}. \quad (5)$$

Выражая составляющие скорости v_z и v_r в системе (1) через ψ и ω и приводя ее к безразмерному виду, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{\text{Re } r^2}{4} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\bar{\omega}}{r} \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{\omega}}{r} \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{z}} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[r^3 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\bar{\omega}}{r} \right) \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial r} \left[r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{\omega}}{r} \right) \right] - \text{Re } r \frac{\partial (\bar{v}_\varphi)^2}{\partial \bar{z}} = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{z}} \right) + \bar{\omega} = 0, \\ & \frac{\text{Re}}{4} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(r \bar{v}_\varphi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \bar{v}_\varphi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{z}} \right) \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[r^3 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\bar{v}_\varphi}{r} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left[r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{v}_\varphi}{r} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\bar{z} = \frac{z}{R}, \quad \bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{\psi} = \frac{2\psi}{\rho V R^2}, \quad \bar{\omega} = \frac{2R\omega}{V},$$

$$\bar{v}_\varphi = v_\varphi/V, \quad \text{Re} = 2R\rho V/\mu.$$

Кроме этого, вводим следующие безразмерные величины:

$$\bar{v}_z = v_z/V, \quad \bar{v}_r = v_r/V, \quad K = \Omega R/V.$$

Для упрощения записи в дальнейшем верхние черточки над выражениями опускаются.

Граничные условия принимают следующий вид:

$$\psi = 1, \quad v_\varphi = 0 \quad \text{при } r = 1;$$

$$\psi = v_\varphi = 0 \quad \text{при } r = 0;$$

$$\psi = r^2, \quad \omega = 0, \quad v_\varphi = Kr \quad \text{при } z = 0;$$

$$\psi = 2r^2 - r^4, \quad \omega = 8r, \quad v_\varphi = 0 \quad \text{при } z = Z. \quad (7)$$

Для решения системы (6) используется разностный метод, предложенный авторами [4], обладающий достаточной простотой, экономичностью, универсальностью.

Каждое из уравнений системы (6) можно представить в виде:

$$a_{\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[b_{\varphi} r \frac{\partial (c_{\varphi} \varphi)}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left[b_{\varphi} \frac{\partial (c_{\varphi} \varphi)}{\partial r} \right] + r d_{\varphi} = 0, \quad (8)$$

где φ принимает значения $\frac{\omega}{r}$, ψ , $r v_{\varphi}$;

$$a_{\varphi} = \frac{Re r^2}{4}, 0, \frac{Re}{4}; \quad b_{\varphi} = r^2, 1/r^2, r^2;$$

$$c_{\varphi} = 1, 1, 1/r^2; \quad d_{\varphi} = Re \frac{\partial (v_{\varphi}^2)}{\partial z}, -\frac{\omega}{r}, 0.$$

Граничные условия для напряженности вихря аналогично [4] находятся из выражений:

$$\frac{n^3}{6} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial n} + \frac{n^2 \omega}{2} = 1 - \psi \quad \text{при } r \rightarrow 1; \quad (9)$$

$$\omega = 8br, \quad \psi = ar^2 + br^4 \quad \text{при } r \rightarrow 0,$$

где n — расстояние по нормали к граничной поверхности. Конечно-разностной аппроксимацией (8) является система нелинейных алгебраических уравнений, которая решалась численно методом Зейделя.

В работе использована неравномерная сетка 21×15 ; $Z = 100$.

Критерием сходимости служила величина

$$\lambda = \left[\frac{\varphi^{(N)} - \varphi^{(N-1)}}{\varphi^{(N)}} \right]_{\max} < 0,005, \quad (10)$$

где N — номер итерации.

Осевая и радиальная составляющие скорости находились из выражений:

$$v_z = \frac{1}{2r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_r = -\frac{1}{2r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (11)$$

Чтобы выявить влияние степени закрутки потока на поле скоростей, проведено сравнение данных при числе Рейнольдса $Re = 160$, для других Re картина качественно не меняется, хотя экстремумы функций смещаются как по длине, так и по радиусу трубы.

Для контроля была использована та же сетка 21×15 при $Re = 160$, $Z = 50$ и $K = 4$. Максимальное расхождение оказалось на входе, при $z = R$ оно составляло 4% для осевой и 1,5% для тангенциальной скорости. Для $z > R$ погрешность уменьшается.

На рис. 1, а представлена зависимость $v_z = f(z, K)$ на оси трубы. При отсутствии закрутки потока ($K = 0$) мы получаем известный профиль скорости [5]. При $K = 1$ влияние закрутки незначительно. При $K = 2$ кривая имеет два экстремума, что объясняется сложным характером взаимодействия сил трения и центробежных сил. При $K > 3$ на входе благодаря центробежным силам линии тока смещаются к стенкам и

скорость на оси уменьшается. Дальше по длине канала силы трения преобладают и скорость начинает увеличиваться. При $K=4$ и $z=2$ скорость на оси уменьшается до 0, а при $K>4$ появляются обратные токи. Следует отметить, что минимальное значение скорости для различных закруток при $Re = \text{const}$ находится приблизительно на одном расстоянии от входа, и длина нестабилизированного участка незначительно меняется с возрастанием K .

Радиальная компонента скорости v_r составляет несколько процентов от V со всей области, за исключением входного участка ($0 < z < 0,6$),

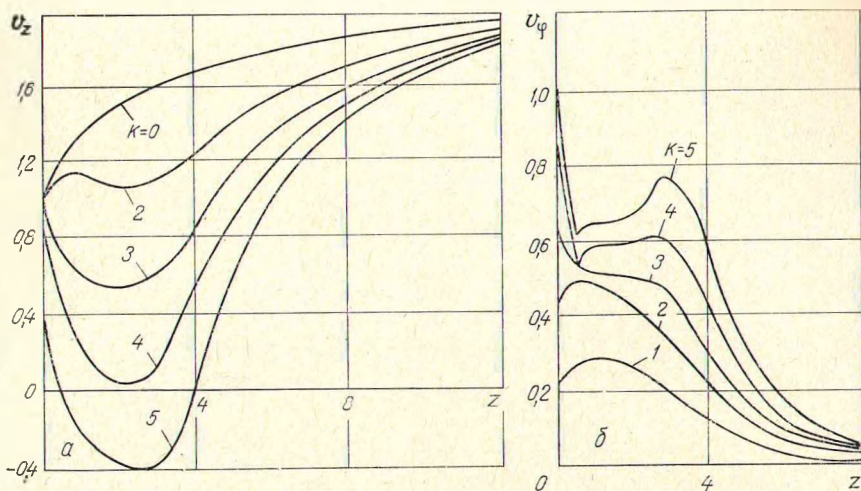


Рис. 1. Распределение скорости по оси трубы (а) и тангенциальной составляющей скорости на начальном участке трубы при $r=0,21$ (б)

причем в области значительного влияния центробежных сил $v_r > 0$, а дальше вниз по потоку $v_r < 0$.

Для тангенциальной составляющей скорости характерно смещение максимума к оси, причем если в окрестности стенки v_ϕ затухает сразу для всех K , то ближе к оси распределение тангенциальной скорости по длине трубы (рис. 1, б) заметно различается с изменением K .

На рис. 2 представлена зависимость полного касательного напряжения на стенке

$$\tau'_f = \frac{4}{Re} \sqrt{\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r}\right)^2}$$

как функция z и K (штрих), а также осевая составляющая касательного напряжения

$$\tau''_f = \frac{4}{Re} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right).$$

Видно, что чистый вклад тангенциальной составляющей напряжения заметен лишь на входе $z < 1,5$, в то же время перераспределение осевой скорости по радиусу существенно увеличивает касательное напряжение.

Представляет интерес исследование влияния закрутки потока на теплообмен. Полагая, что на входе в трубу жидкость имеет температуру T_1 , температура стенок T_2 , число Прандтля равно 1 и, пренебрегая

нагреванием жидкости за счет трения, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{Re}{4} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(T \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0. \quad (12)$$

Граничные условия:

$$T = 1 \text{ при } r = 1; \quad T = 0 \text{ при } z = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0; \quad T = 1 \text{ при } z = Z, \quad (13)$$

где $T = \frac{\bar{T} - T_1}{T_2 - T_1}$, \bar{T} — текущее значение температуры в размерном виде.

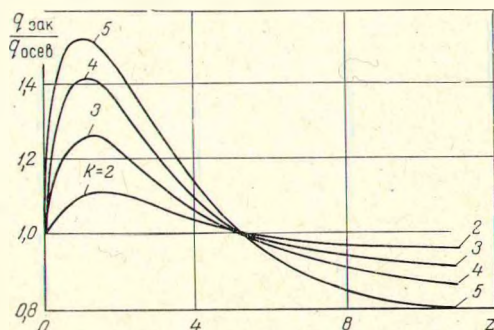
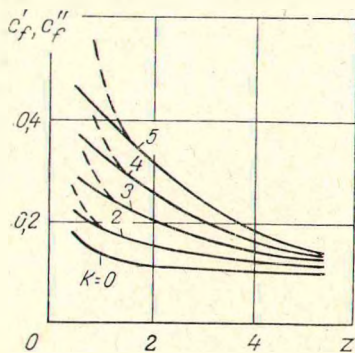


Рис. 2. Изменение касательного напряжения на стенке по длине трубы (штрихом отмечено полное касательное напряжение, сплошной линией — осевая составляющая касательного напряжения)

Рис. 3. Отношение тепловых потоков на стенке для закрученного и осевого течения по длине трубы

Уравнение (12) решено аналогично (6), при этом использовались вычисленные ранее значения для функции тока, поскольку в данной постановке функция тока не зависит от температуры.

Граничное условие на выходе из трубы фактически не выполняется, однако, как показали расчеты, поле температур мало чувствительно к этому граничному условию.

Сравнение тепловых потоков для различных степеней закрутки показано на рис. 3. Видно, что в области значительного влияния центробежных сил с возрастанием K тепловой поток в жидкость возрастает, а дальше вниз по течению происходит обратное явление.

В случае образования обратных токов (кривая при $K=5$, рис. 1) минимальная температура по сечению трубы оказывается не в районе оси, а при $r=0,4$, причем это явление наблюдается в области $0 < z < 4$. Для сравнения с теоретическими и экспериментальными результатами [2] для осевой составляющей скорости на входе был задан профиль Пуазейля. При одинаковых числах Re и K наблюдаемая в [2] вихревая неустойчивость была обнаружена численными методами, причем первые признаки такой неустойчивости в виде отдельных пульсаций скоростей при одинаковых Re обнаружены при меньших K . С появлением обратных токов условие (10) не выполняется, однако с увеличением

количества итераций процесс не расходится, а λ изменяется периодически. В [2] профиль тангенциальной скорости рассчитывался по формуле

$$v_{\varphi}(r, z) = v_{\varphi}(r, 0) \exp(-\beta z). \quad (14)$$

Из рис. 1, б видно, что для $z < 4$ эта формула не соответствует действительности, однако для $z > 4$ (14) имеет место и β , рассчитанные для нашего поля тангенциальной скорости, хорошо совпадают с данными [2].

Обозначения

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$; r, z — радиальная и осевая координаты; v_r, v_{φ}, v_z — компоненты скорости в радиальном, тангенциальном и осевом направлении; R — радиус трубы; Ω — угловая скорость жидкости на входе; Z — длина трубы; V — средняя осевая скорость; ρ — плотность; μ — динамический коэффициент вязкости.

Nomenclature

r, z , radial and axial coordinates, respectively; v_r, v_{φ}, v_z , velocity components in radial, tangential and axial directions, respectively; R , tube radius; Ω , angular liquid velocity at inlet; Z , tube length; V , mean flow rate; ρ , density; μ , dynamic viscosity coefficient.

Figure Captions

Fig. 1. Velocity distribution along tube axis (a) and tangential velocity component at starting length of tube at $r=0.21$ (б).

Fig. 2. Change in shearing wall stress along tube length (dash line refers to complete shearing stress, solid line refers to axial component of tangential stress).

Fig. 3. Ratio of thermal wall fluxes for swirled and axial flow along tube length.

Summary

The system of the Navier—Stokes equations for steady laminar flow of incompressible liquid swirled at the tube inlet was numerically solved by the finite-difference method. Study was made of the effect of flow swirl on the field of velocities and temperatures. The results are presented graphically.

Литература

1. Щукин В. К. Теплообмен и гидродинамика внутренних потоков в полях массовых сил. М., «Машиностроение», 1970.
2. Talbot L. Laminar swirling pipe flow. Journ. Appl. Mech., 21, 1, 1954.
3. Брайловская И. Ю., Кускова Т. В., Чудов Л. А. Сб. «Вычислительные методы и программирование», т. XI, МГУ, 1968.
4. Госмен А. Д., Пан В. М., Ранчел А. К., Сполдинг Д. В., Вольфштейн М. Численные методы исследования течений вязкой жидкости. М., «Мир», 1972.
5. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. Гостехиздат, 1951.