

П. Я. АРТЕМОВ

ТАБЛИЦЫ И ГРАФИКИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ УПРУГОЙ ЛИНИИ БАЛКИ

Общее уравнение упругой линии, выраженное через начальные параметры, имеет вид:

$$Eiy + Eiy_0 + Ei\theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2} + \frac{Q_0 x^3}{6} + \sum \frac{M(x-a)^2}{2} + \\ + \sum \frac{P(x-a)^3}{6} + \sum \frac{q(x-a)^4}{24}$$

где: y_0 , θ_0 , Q_0 и M соответственно прогиб, угол поворота, поперечная сила и изгибающий момент в начале отсчета;

a —сумма длин всех предыдущих участков; M , P и q —соответственно изгибающий момент, сила и распределенная нагрузка, находящаяся в пролете балки.

Прежде чем решать конкретную задачу по этому уравнению, необходимо определить начальные параметры. Они определяются из четырех условий по концам балки: два условия на одном конце балки и два—на другом. Таким образом, для отыскания y_0 , θ_0 , M_0 и Q_0 надо решить совместно не более двух уравнений. Составление и решение этих уравнений, когда имеется большое число участков, связано с большой затратой времени.

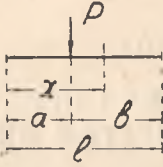
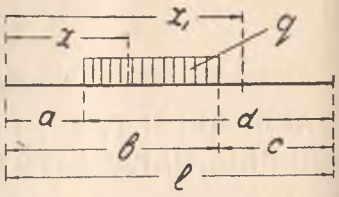
Предлагаемый метод написания уравнения изогнутой оси балки избавляет от составления и решения совместных уравнений.

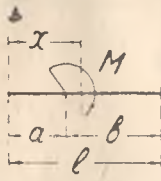
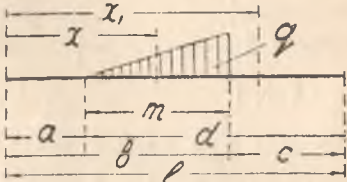
Обозначив влияние всех типов нагрузок, которые расположены правее начального сечения через $f(x)$ (рис. 1), получим:

$$Eiy = Eiy_0 + Ei\theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2} + \frac{Q_0 x^3}{6} + f(x) \quad (2)$$

В табл. 1 приводятся значения $f(x)$ и ее производных для различных случаев загрузки балки.

Таблица f (x)

		
$f(x)$	$-\frac{P(x-a)^3}{6}$	$-\frac{q(x-a)^4}{24}$
$f(x_1)$	—	$-\frac{q(x-a)^4}{24} + \frac{q(x-b)^4}{24}$
$f'(x)$	$-\frac{P(x-a)^2}{2}$	$-\frac{q(x-a)^3}{6}$
$f'(x_1)$	—	$-\frac{q(x-a)^3}{6} + \frac{q(x-b)^3}{6}$
$f''(x)$	$-P(x-a)$	$-\frac{q(x-a)^2}{2}$
$f''(x_1)$	—	$-\frac{q(x-a)^2}{2} + \frac{q(x-b)^2}{2}$
$f'''(x)$	$-P$	$-q(x-a)$
$f'''(x_1)$	—	$-q(x-a) + q(x-b)$

		
$f(x)$	$\frac{M(x-a)^2}{2}$	$-\frac{q(x-a)^5}{120m}$
$f(x_1)$	—	$-\frac{q(x-a)^5}{120m} + \frac{q(x-b)^4}{24} + \frac{q(x-b)^5}{120m}$
$f'(x)$	$M(x-a)$	$-\frac{q(x-a)^4}{24m}$
$f'(x_1)$	—	$-\frac{q(x-a)^4}{24m} + \frac{q(x-b)^3}{6} + \frac{q(x-b)^4}{24m}$
$f''(x)$	M	$-\frac{q(x-a)^3}{6m}$
$f''(x_1)$	—	$-\frac{q(x-a)^3}{6m} + \frac{q(x-b)^2}{2} + \frac{q(x-b)^3}{6m}$
$f'''(x)$	—	$-\frac{q(x-a)^2}{2m}$
$f'''(x_1)$	—	$-\frac{q(x-a)^2}{2m} + q(x-b) + \frac{q(x-b)^2}{2m}$

Предположим, что мы имеем балку, зашечленную с одной стороны, а с другой—опирающуюся на подвижную шарнирную опору (рис. 2)

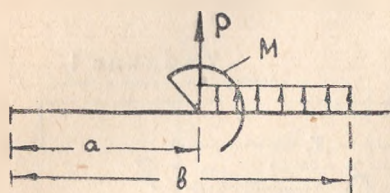


Рис. 1.

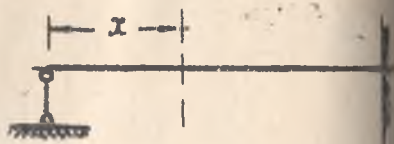


Рис. 2.

Определим для данной задачи начальные параметры, раскрывая значение $f(x)$ в общем виде. Для данной задачи имеем при $x=0$, $y_0=0$ и $M_0=0$, при $x=l$, $y'_1=0$ и $y_1=0$. Поэтому уравнение упругой линии для данного случая напишется так:

$$Ely = E\theta_0 x + Q_0 \frac{x^3}{6} + f(x). \quad (3)$$

Возьмем первую производную от этого уравнения по

$$Ely = E\theta_0 + Q_0 \frac{x^2}{2} + f(x). \quad (4)$$

Подставляя в уравнения 3 и 4 l вместо x , согласно условию закрепления, получим:

$$E\theta_0 l + Q_0 \frac{l^3}{6} + f(l) = 0, \quad (5)$$

$$E\theta_0 + Q_0 \frac{l^2}{2} + f(l) = 0. \quad (6)$$

Решая уравнения 5 и 6 совместно относительно θ_0 и Q_0 получим:

$$E\theta_0 = \frac{3}{2l} \left[\frac{1}{3} f'(l) - f(l) \right]. \quad (7)$$

$$Q_0 = \frac{3}{l^3} \left[f(l) - lf'(l) \right]. \quad (8)$$

Полученные указанным способом начальные параметры для других случаев закрепления собраны в табл. 2.

Предположим теперь, что в нашем пролете находится момент, расположенный на расстоянии a от начального сечения, тогда, согласно табл. 1.

$$f(x) = M \frac{(x-a)^2}{2} \quad \text{и} \quad f'(x) = M(x-a).$$

Поставив в $f(x)$ и ее производную 1 вместо x , получим:

$$f(1) = M \frac{(1-a)^2}{2} = \frac{Mb^2}{2} \quad \text{и} \quad f'(1) = M(1-a) = Mb.$$

Подставив эти значения в уравнения 7 и 8, будем иметь:

$$Ei\theta_0 = \frac{Ml}{4} (2\alpha - 3\alpha^2), \quad (9)$$

$$Q_0 = - \frac{3M}{2l} (2\alpha - \alpha^2), \quad (10)$$

где $\alpha = \frac{b}{l}$.

Этим способом мы определили начальные параметры для ряда схем и балок и различного характера загрузки, которые занесены в табл. 3.

Для всех функций влияния были составлены таблицы и по ним построены графики. Графики приводятся на рис. 3—16.

Имея начальные параметры для простейших схем загрузки и пользуясь принципом независимости действия сил, можно легко написать общее уравнение упругой линии. За начальное сечение рекомендуем принимать сечение, где значение $y = 0$. Для отыскания углов поворота, изгибающего момента и поперечной силы в сечении, надо продифференцировать уравнения упругой линии:

$$Eiy = \varphi(x); \quad Eiy' = Ei\theta = \varphi'(x);$$

$$Eiy'' = M = \varphi''(x); \quad Eiy''' = Q = \varphi'''(x).$$

Решение задач при помощи этих графиков значительно облегчается, что видно из приведенного ниже примера.

ПРИМЕР. Для балки, изображенной на рис. 17, требуется написать уравнение упругой линии, изгибающего момента и поперечной силы по всей длине балки.

РЕШЕНИЕ. Из графиков (рис. 7, 8, 9) по значениям α найдем величину θ_{0p} для каждого силового фактора:

$$Ei\theta_{0p} = -0,116 \frac{Pl_2}{4} = - \frac{0,116 \cdot 2 \cdot 6^2}{4} = -2,08 \text{ мм}^2,$$

$$\theta_{0q} = - \frac{ql^3}{48} (0,593 - 0,111) = - \frac{2 \cdot 6^3}{48} 0,482 = -4,32 \text{ мм}^2,$$

$$\theta_{0M} = 0,25 \frac{Ml}{4} = 1,5 \text{ мм}^2.$$

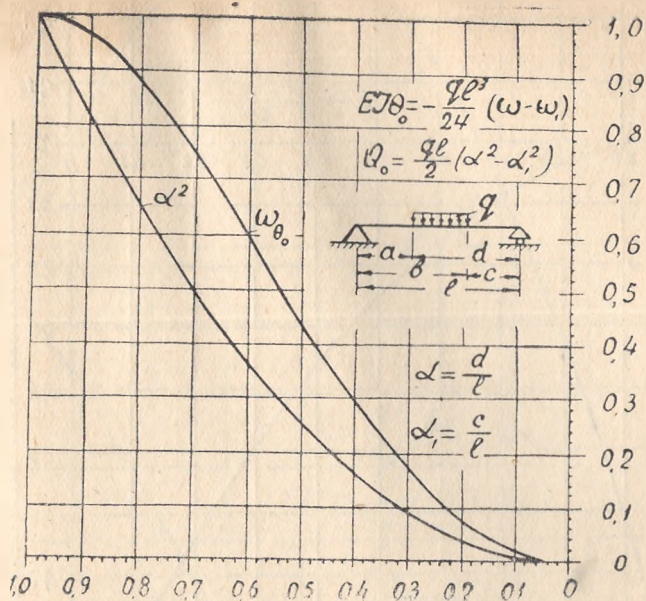


Рис. 5.

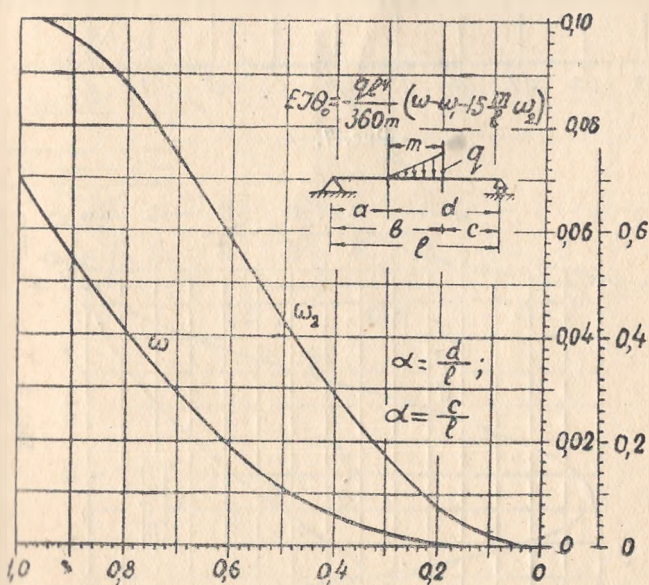


Рис. 6.

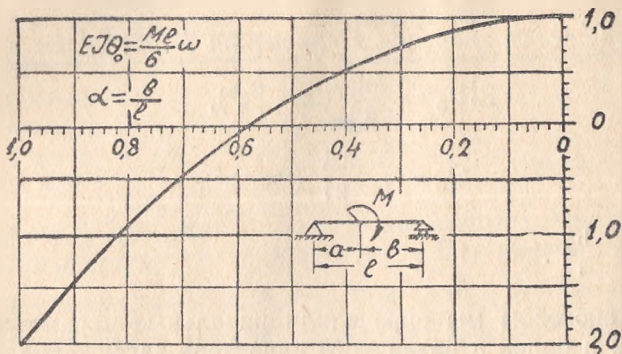


Рис. 3.

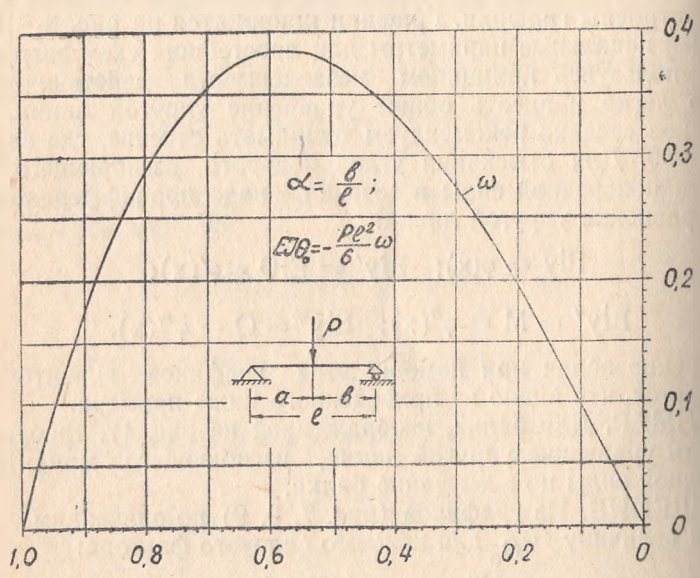


Рис. 4.

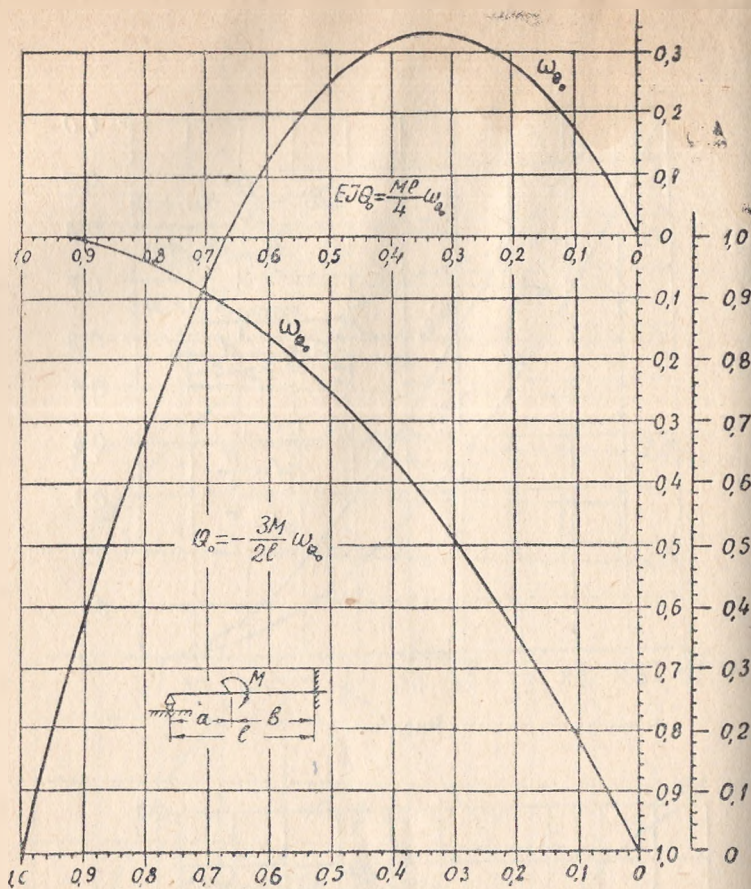


Рис. 7.

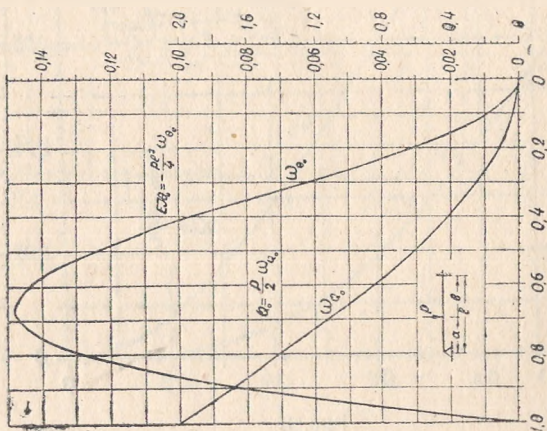


Рис. 8.

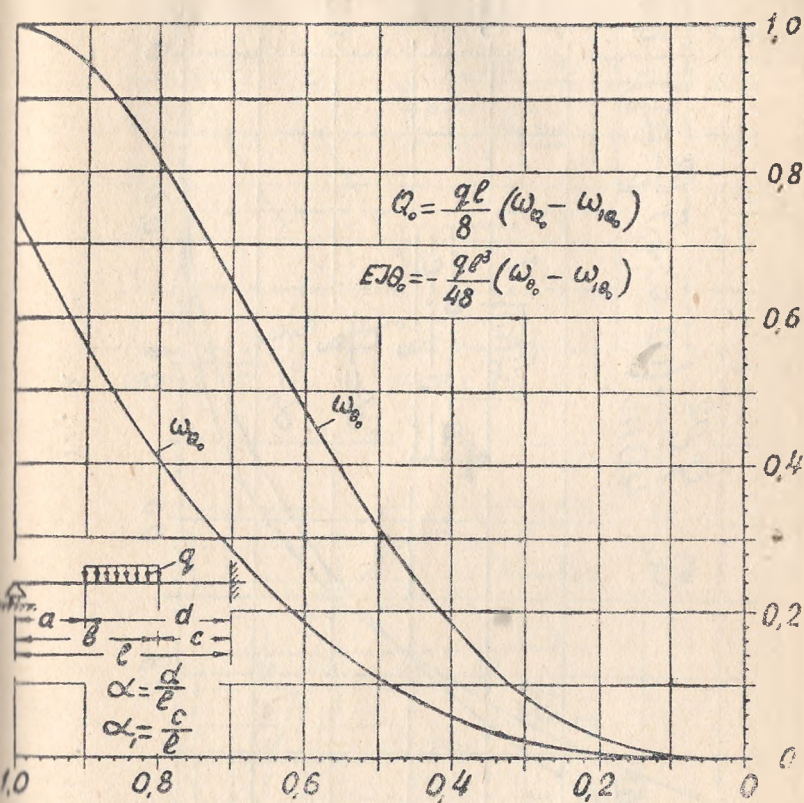


Рис. 9.

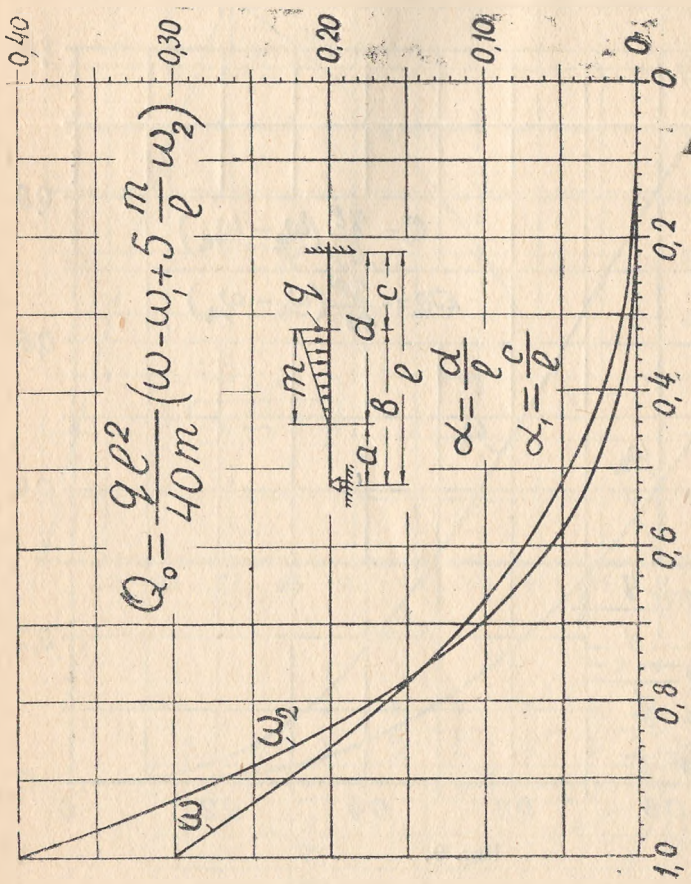


Рис. 10.

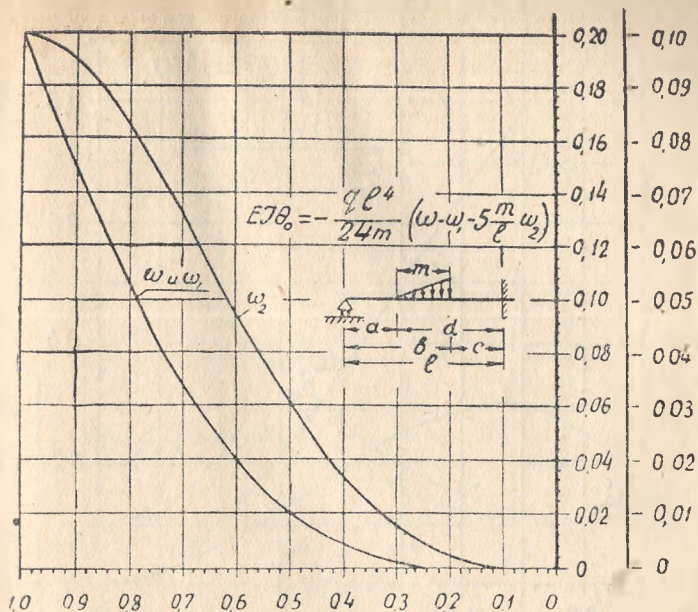


Рис. 11.

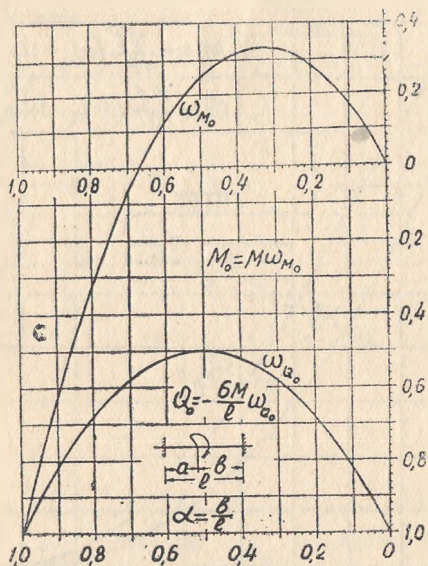


Рис. 12.

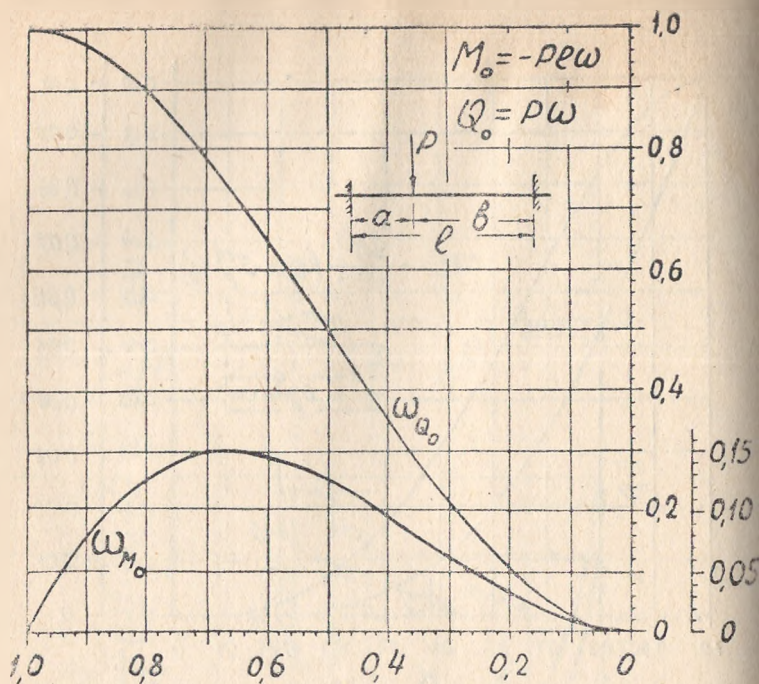


Рис. 13.

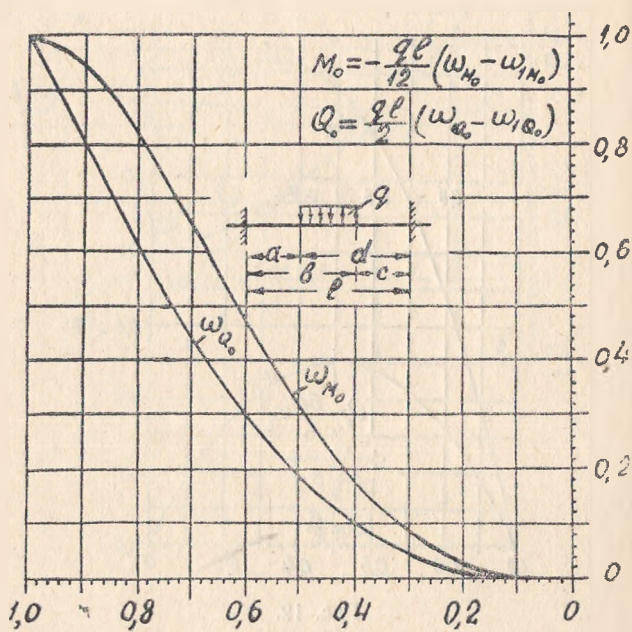


Рис. 14.

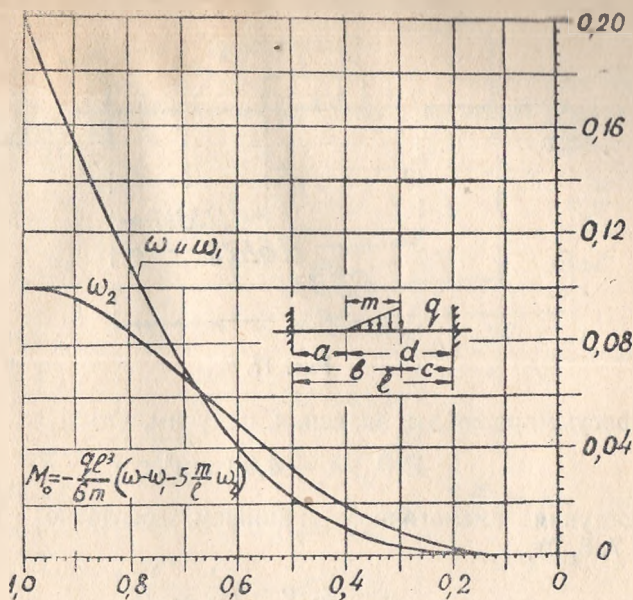


Рис. 15.

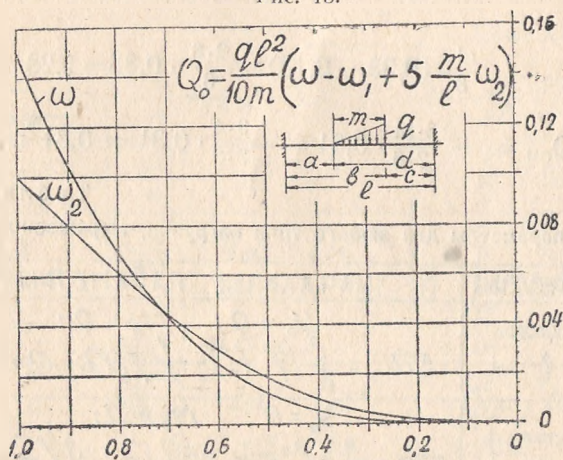


Рис. 16.

Примечание. На рис. 6, 10 и 16 значение ω уменьшено в 10 раз; на рис. 9 значение ω_{Q_0} уменьшено в 4 раза; на рис. 12 значение ω_{Q_0} увеличено в 2 раза.

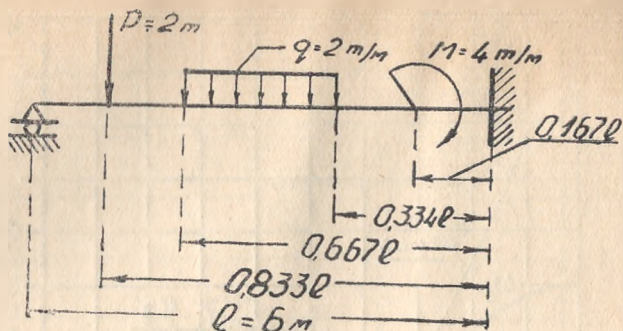


Рис. 17.

Просуммировав эти значения, получим, что

$$Ei\theta_0 = -4,90 \text{ мм}^2.$$

Поступая аналогично, напишем, согласно графики (рис. 7, 8, 9),

$$Q_{op} = 1,51 \frac{P}{2} = 1,51 \text{ м},$$

$$Q_{oq} = \frac{ql}{8} (0,98 - 0,13) = \frac{2 \cdot 6}{8} \cdot 0,85 = 1,28 \text{ м},$$

$$Q_{om} = -\frac{3 \cdot M}{2 \cdot 6} \cdot 0,31 = -\frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 6} \cdot 0,31 = -0,31 \text{ м}.$$

Таблица 2

Начальные параметры для любого типа нагрузки, выраженной через $f(x)$

	ТИП ЗАКРЕПЛЕНИЯ	НАЧАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ
I		$y_0 = 0; M_0 = 0;$ $EJ\theta_0 = \frac{l}{6} f''(l) - \frac{1}{l} f(l); Q_0 = -\frac{f'(l)}{l}$
II		$y_0 = 0; M_0 = 0;$ $EJ\theta_0 = \frac{3}{2l} \left[\frac{l}{3} f'(l) - f(l) \right]; Q_0 = \frac{3}{l^2} \left[f(l) - l f'(l) \right]$
III		$y_0 = 0; \theta_0 = 0;$ $M_0 = \frac{6}{l^2} \left[\frac{l}{3} f'(l) - f(l) \right]; Q_0 = \frac{12}{l^3} \left[f(l) - \frac{l}{2} f'(l) \right]$
IV		$y_0 = 0; \theta_0 = 0;$ $M_0 = \sum M; Q_0 = \sum Y$

Просуммировав эти значения, получим, что

$$Q_0 = -2,48 \text{ т.}$$

Таблица 3а

Начальные параметры при различных схемах закрепления и загрузки

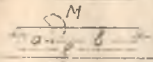
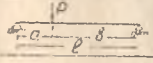
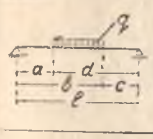
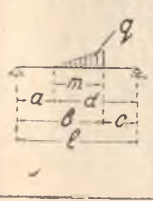
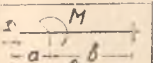
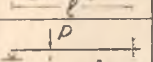
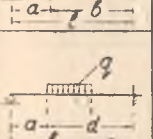
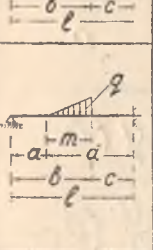
СХЕМА ЗАГРУЗКИ	U_0	$EJ\theta_0$	M_0	Q_0
	0	$\frac{M^2}{6} (1 - 3\alpha^2)$	0	$-\frac{M}{l}$
	0	$-\frac{Pl^2}{6} (\alpha - \alpha^3)$	0	$P\alpha$
	0	$-\frac{ql^3}{24} [(2\alpha^2 - \alpha^4) - (2\alpha_1^2 - \alpha_1^4)] - \frac{ql^3}{24} (\omega - \omega_1)$	0	$\frac{ql}{2} (\alpha^2 - \alpha_1^2)$
	0	$\frac{ql^4}{360m} [(-10\alpha^3 + 3\alpha^5) - (-10\alpha_1^3 + 3\alpha_1^5) + 15\frac{m}{l} (2\alpha_1^2 - \alpha_1^4)] - \frac{ql^4}{360m} (\omega - \omega_1 + 15\frac{m}{l} \omega_2)$	0	$\frac{ql^2}{6m} [(\alpha^3 - \alpha_1^3) - 3\frac{m}{l} \alpha_1^2]$

Таблица 3б

	0	$\frac{Mp}{4} (2\alpha - 3\alpha^2)$	0	$-\frac{3M}{2l} (2\alpha - \alpha^2)$
	0	$-\frac{Pl^2}{4} (\alpha^2 - \alpha^3)$	0	$\frac{P}{2} (3\alpha^2 - \alpha^3)$
	0	$\frac{ql^3}{48} [(4\alpha^3 - 3\alpha^4) - (4\alpha_1^3 - 3\alpha_1^4)] - \frac{ql^3}{48} (\omega - \omega_1)$	0	$\frac{ql}{8} [(4\alpha^3 - \alpha^4) - (4\alpha_1^3 - \alpha_1^4)] - \frac{ql}{8} (\omega - \omega_1)$
	0	$\frac{ql^4}{240m} [(-5\alpha^4 + 3\alpha^5) - (-5\alpha_1^4 + 3\alpha_1^5) + 5\frac{m}{l} (4\alpha_1^3 - 3\alpha_1^4)] - \frac{ql^4}{240m} (\omega - \omega_1 + 5\frac{m}{l} \omega_2)$	0	$\frac{ql^2}{40m} [(5\alpha^4 - \alpha^5) - (5\alpha_1^4 - \alpha_1^5) + 5\frac{m}{l} (\alpha_1^4 - 4\alpha_1^3)] - \frac{ql^2}{40m} (\omega - \omega_1 + 5\frac{m}{l} \omega_2)$

Уравнение упругой линии по всей длине балки принимает вид:

$$|y = 4,9x + 2,48 \frac{x^6}{6} - \frac{2(x-1)^3}{6} - \frac{2(x-2)^4}{24} + \frac{2(x-4)^4}{24} + \frac{M(x-5)^2}{2}$$

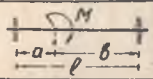
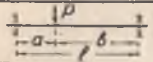

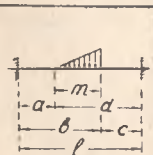
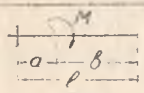
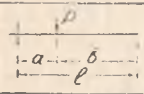
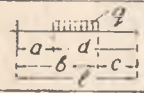
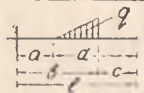
№	СХЕМА БАЛКИ	u_0	θ_0	M_0	Q_0
1		0	0	$\frac{M}{6} (2a - 3a^2)$	$-\frac{6M}{l} (a - a^2)$
2		0	0	$-Pl(a^2 - a^3)$	$P(3a^2 - 2a)$
3		0	0	$-\frac{ql^2}{12} [(4a^3 - 3a^4) - (4a_1^3 - 3a_1^4)];$ $-\frac{ql^2}{12} (w - w_1)$	$\frac{ql}{2} [(2a^3 - a^4) - (2a_1^3 - a_1^4) - (2a_1^3 - a_1^4)]$ $\frac{ql}{2} (w - w_1)$
4		0	0	$\frac{ql^3}{60m} [(3a^5 - 5a^4) - (3a_1^5 - 5a_1^4)] + 5\frac{m}{l} (4a_1^3 - 3a_1^4);$ $\frac{ql^3}{60m} (w - w_1 + 5\frac{m}{l} w_2)$	$\frac{ql^2}{10m} [(2.5a^4 - a^5) - (2.5a_1^4 - a_1^5) - (2.5a_1^4 - a_1^5)] + 5\frac{m}{l} (a_1^4 - 2a_1^5)$ $\frac{ql^2}{10m} (w - w_1 + 5\frac{m}{l} w_2)$

Таблица 31

1		0	0	$-M$	0
2		0	0	$-Pa$	0
3		0	0	$\frac{q}{2} (a^2 - b^2)$	$q(b - a)$
4		0	0	$\frac{q}{6} (b - a)(2b + a)$	$\frac{q}{2} (b - a)$

$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2} + \frac{Q_0 x^3}{6} + f(x)$$

Взяв вторую производную от этого уравнения по x , получим:

$$EIy'' = M(x) = 2,48x - 2(x-1) - (x-2)^2 + (x-4)^2 + 4.$$

Уравнение поперечной силы получим, если возьмем производную от $M(x)$ по x , то есть

$$Q(x) = 2,48 - 2 - 2(x-2) + 2(x-4) + 4.$$

Отметим, что, если в задаче требуется только составить уравнения изгибающего момента и поперечной силы, то не надо находить $EI\theta_0$, так как значение $EI\theta_0$ в уравнения M и Q не входит.

Автором составлены таблицы для расчета на прочность и жесткость балок на упругом основании, стержней на продольно-поперечный изгиб и расчета тонкостенных стержней при вращательном кручении. Графики составлены для расчета стержней на продольно-поперечный изгиб и для расчета тонкостенных стержней на стесненное кручение.
