С. Е. БАРШАЙ

УРАВНИВАНИЕ УГЛОВ СПОСОБОМ ПОСРЕДСТВЕННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Как известно, способ посредственных наблюдений применяется главным образом при уравнивании заполняющих тригонометрических сетей. Наличие в таких сетях пунктов высших классов, которые следует считать жесткими, создает большое число условных уравнений.

В геодезическом производстве уравнивание методом посредственных наблюдений делают обычно при условии минимума суммы квадратов поправок к измеренным направлениям.

Проделанные нами опыты, а также работа Hausbrandt [1] показали, что применение способа посредственных наблюдений к уравниванию углов заполняющих сетей в значительной степени ускоряет и упрощает вычисления.

Такой метод может быть применен и к уравниванию сети, в которой независимо измеренными величинами являются не углы, а направления, так как понижение точности результатов оказывается при этом небольшим.

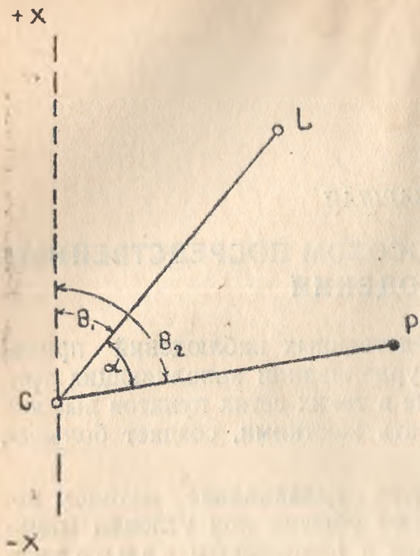
Пусть в точке C измерен угол α между направлениями на пункты P и L (рис. 1).

Угол α можно рассматривать как разность двух дирекционных углов Θ_2 и Θ_1, которые можно вычислить по координатам точек P, L и C по формулам:

$$\operatorname{tg}\Theta_2 = \frac{y_p - y_c}{x_p - x_c} = \frac{\Delta y_p}{\Delta x_p}, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}\Theta_1 = \frac{y_L - y_c}{x_L - x_c} = \frac{\Delta y_L}{\Delta x_L}. \tag{2}$$

Если прологарифмировать формулу (1), а затем продифференцировать полученное выражение, то придем к известной формуле, связывающей приращение дирекционного угла $d\Theta$ с приращениями координат dx_p, dy_p, dx_c и dy_c точек P и C



Рис, 1.

$$d\Theta_L = \frac{\sin\Theta_2 \cos\Theta_2}{y_p - y_c}\, dy_p - \frac{\sin\Theta_2 \cos\Theta_2}{y_p - y_c}\, dy_c - \frac{\sin\Theta_2 \cos\Theta_2}{x_p - x_c}\, dx_p + \frac{\sin\Theta_2 \cos\Theta_2}{x_p - x_c}\, dx_c$$

или

$$d\Theta''_2 = a_p\, dx_c - a_p\, dx_p - b_p\, dy_c + b_p\, dy_p\,, \tag{3}$$

где:

$$a_p = \frac{\rho \sin\Theta_2 \cos\Theta_2}{x_p - x_c}\,,$$

$$b_p = \frac{\rho \sin\Theta_2 \cos\Theta_2}{y_p - y_c}\,.$$

Аналогичным путем можно из формулы (2) получить:

$$d\Theta_1'' = a_L\, dx_c - a_L\, dx_L - b_L\, dy_c + b_L\, dy_L\,. \tag{4}$$

Вычтя почленно (4) из (3), пишем

$$d\Theta_2'' - d\Theta_1'' = a_L\, dx_L - a_p\, dx_p - b_L\, dy_L + b_p\, dy_p + (a_p - a_L)\, dx_c - (b_p - b_L)\, dy_c\,. \tag{5}$$

Коэффициенты a_L и b_L вычисляются так же, как a_p и b_p, только в знаменателях вместо x_p и y_p войдут, конечно x_L и y_L.

Левая часть выражения (5) есть не что иное, как приращение угла α, соответствующее изменению координат точек P, L и C на величины dx_p, dy_p, dx_L, dy_L, dx_c и dy_c.

Обозначив его через v, уравнение погрешностей для угла PCL будет иметь следующий вид:

$$v = a_L\,\delta x_L - a_p\,\delta x_p - b_L\,\delta y_L + b_p\,\delta y_p +$$
$$+ (a_p - a_L)\delta x_c - (b_p - b_L)\delta y_c + \alpha_0 - \alpha$$

или

$$v = \begin{vmatrix} \delta x_L, \delta y_L \\ b_L, \; a_L \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta x_p, \delta y_p \\ -b_p, \; -a_p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta x_c, \delta y_c \\ (b_p - b_L), \; (a_p - a_L) \end{vmatrix} +$$
$$+ \begin{vmatrix} \alpha_0, \; \alpha \\ 1, \; 1 \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Дифференциалы dx и dy мы заменили здесь поправками δx и δy. Свободный член $\alpha_0 - \alpha$ представляет собой разность значений угла, вычисленного по приближенным координатам и измеренного непосредственно. Величины δx и δy с индексами нужно рассматривать как искомые поправки к приближенным значениям координат соответствующих пунктов.

Так как Θ_2 и Θ_1 вычисляются по приближенным координатам пунктов P, L и C, то разность этих дирекционных углов даст приближенное значение угла L, которое обозначаем через α_0.

Формулы для вычисления коэффициентов a и b, приведенные выше:

$$a = \frac{\rho \sin\Theta \cos\Theta}{\Delta x},$$

$$b = \frac{\rho \sin\Theta \cos\Theta}{\Delta y},$$

напишем в таком виде:

$$a = \frac{\rho \sin 2\Theta}{2\Delta x},$$

$$b = \frac{\rho \sin 2\Theta}{2\Delta y}.$$

В работе приводим номограмму для определения этих коэффициентов по аргументам Θ и Δx или Δy, которая составлена автором по этим преобразованным формулам. Индексы при коэффициентах a и b одинаковы с индексами приращений координат и зависят от того, правой или левой стороной является линия, для которой определяются эти коэффициенты.

Определив коэффициенты a и b, а также приближенный угол α_0, можно написать уравнение (6) для каждого измеренного угла. Таких уравнений будет столько, сколько измерено углов в сети. В том случае, когда один или два из трех пунктов твердые, поправки δx и δy с соответствующими индексами будут равны нулю.

В качестве примера уравновесим сеть, приведенную в «Руководстве по высшей геодезии» проф. Ф. Н. Красовского и В. В. Данилова [2].

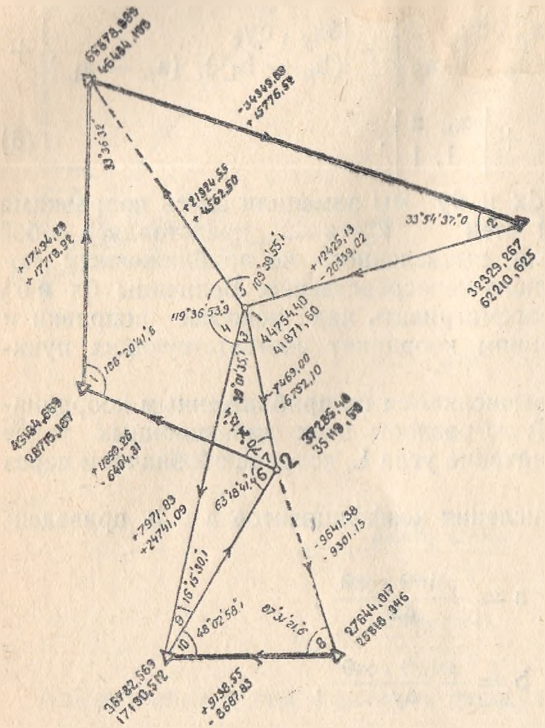


Рис. 2.

Порядок уравнивания:

1. Составляем схему сети. Определяемые пункты нумеруем по порядку арабскими, а твердые—римскими цифрами или начальными буквами названий. Нумеруем все углы, которые включаются в уравнивание.

2. Вычисляем приближенные координаты определяемых пунктов. Решать все треугольники для этого нет надобности. Можно решить только те треугольники, которые необходимы для однократного определения длины линий хода, выбираемого от одного твердого пункта к другому через определяемые пункты. Этот ход уравниваем как разомкнутый распределением угловой невязки, а также невязки в приращениях координат обычным нестрогим путем.

Опыт показал, что координаты, вычисленные таким образом, можно вполне принять за приближенные значения искомых.

В нашем примере эта часть вычислений не приводится. Приближенные координаты искомых пунктов возьмем готовыми из указанного «Руководства» и выпишем их на схему (рис. 2).

3. Вычисляем разности координат концов линий (сплошных и несплошных) и вписываем их посредине линий. На линии по

казывается стрелкой направление, для которого выписаны знаки приращений координат. Правильность вычислений, записей и направлений стрелок контролируем суммированием Δx и Δy по треугольникам или другим замкнутым фигурам. Эти суммы с учетом направлений стрелок должны, конечно, равняться нулю.

4. Вычисляем тангенсы дирекционных углов по формуле

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Значения их записываем во вторую графу табл. 1. В третью графу вписываем сами дирекционные углы.

Номограмма коэффициентов a и b

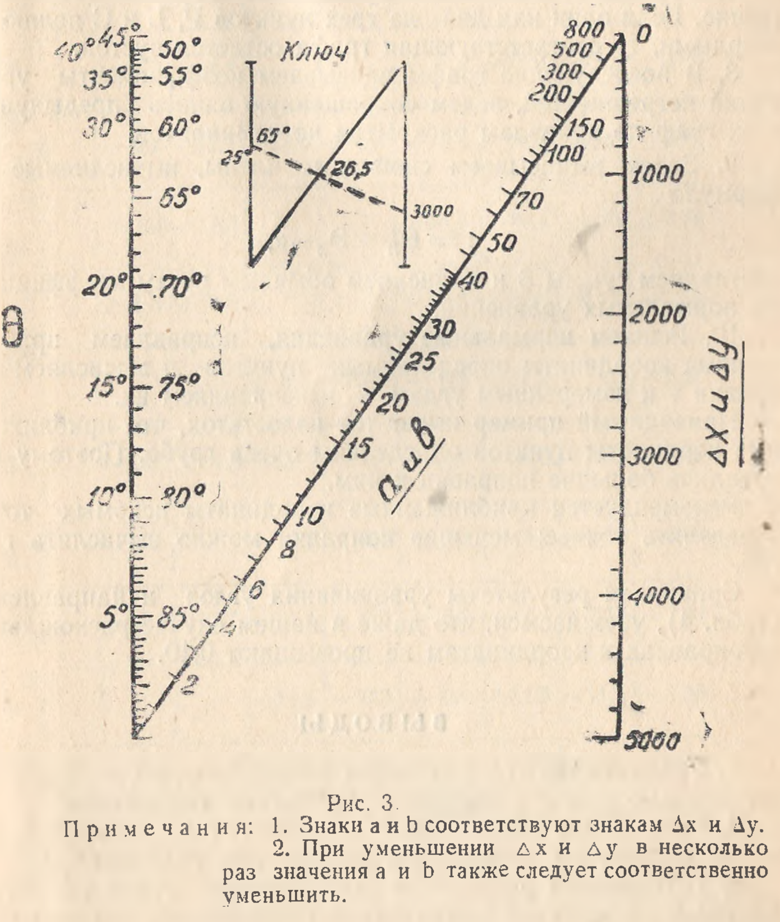


Рис. 3.

Примечания: 1. Знаки a и b соответствуют знакам Δx и Δy.
2. При уменьшении Δx и Δy в несколько раз значения a и b также следует соответственно уменьшить.

5. Вычисляем приближенные значения углов α_0, как разность соответствующих дирекционных углов, и записываем их

в четвертую графу. В эту же графу под α_0 выписываем измеренные значения угла L.

6. Находим коффициенты a и b по номограмме. Аргументами служат Θ и Δx или Θ Δy. Следует иметь в виду, что номограмма составлена из расчета, что поправки δx и δy к приближенным координатам x^1 и y^1 будут выражены в метрах, а не в дециметрах, как это делают обычно.

Для пользования номограммой дирекционный угол Θ нужно привести к острому углу. Если для пользования номограммой Δx или Δy увеличивают или уменьшают в несколько раз, то полученные по номограмме коэффициенты a и b нужно во столько же раз увеличить или уменьшить.

7. В графы 7—9 вписываем уравнение погрешностей сокращенно. Если один или два из трех пунктов P, L и C являются твердыми, то соответствующая графа остается пустой.

8. В последующие графы вписываем коэффициенты уравнений погрешностей, ведем сокращенную запись предыдущих трех граф по правилам раскрытия детерминантов.

9. Затем выписываем свободные члены, вычисляемые по формуле

$$l = \Theta_п - \Theta_л - \alpha,$$

составляем суммы S и вычисляем обычным путем коэффициенты нормальных уравнений.

10. Решаем нормальные уравнения, исправляем приближенные координаты определяемых пунктов и вычисляем поправки v к измеренным углам α и исправляем их.

Приводимый пример имеет тот недостаток, что приближенные кординаты пунктов определены очень грубо. Поэтому получились большие поправки к ним.

Рекомендуется приближенные координаты искомых точек определять точнее: меньшие поправки можно вычислять грубее.

Сравнивая результаты уравнивания углов и направлений (табл. 4), убеждаемся, что даже в нашем случае расхождения в поправках к координатам не превышают 0,10.

ВЫВОДЫ

1. Уравнивание углов методом посредственных наблюдений значительно проще и быстрее уравнивания направлений.

2. Вычисления имеют много промежуточных контролей, которые уменьшают вероятность ошибок при уравнивании.

3. Получаемые результаты уравнивания углов настолько близки к результатам уравнивания направлений, что этот способ можно рекомендовать и в случае измерения независимых направлений

Таблица 1

Составление уравнений погрешностей

Разности координат Δx_p Δy_p Δx_L Δy_L	$tg\,\Theta_2$ $tg\,\Theta_1$	Θ_2 Θ_1	Угол, вычисленный $\alpha_0=\Theta_2-\Theta_1$, измеренный α	Коэффициенты a	Коэффициенты b	Уравнение погрешностей: bx_L by_L a_L b_L	Уравнение погрешностей: bx_p by_p a_p b_p	Уравнение погрешностей: bx_c by_c $-(a_L-a_p)-(b_L-b_p)$	Коэффициент уравнений погрешностей: bx_1	by_1	bx_2	by_2	$l=\alpha_0-\alpha$	S	v	v^1
−11899,26 + 6404,31 +17494,29 +17718,92	0,5382108 1,0128402	151°42′37,″3 45 21 55,8	106°20′41,″5 47,5	−13,0 + 5,7	+7,1 +5,8		bx_2 by_2 +13,0 −7,1				− 7,1	−13,0	− 6,″0	−26,1	+1,82	+2,10
+34349,69 −15776,52 +12425,13 −20339,02	0,4592915 1,6369261	335 19 51,9 301 25 14,9	33 54 37,0 42,3	+ 4,9 + 4,4	− 2,2 − 7,3	bx_1 by_1 +4,4 −7,3			− 7,3	− 4,4			− 5,3	−17,0	−0,88	−0,33
− 7971,83 −24741,09 − 7469,00 − 6752,10	3,1035647 0,9040166	252 08 25,9 222 06 50,8	30 01 35,1 49,2	− 2,4 −14,9	− 7,5 −13,6	$бx_2$ $бy_2$ −14,9 −13,6		bx_1 by_1 +12,5 +6,1	+ 6,1	−12,5	−13,6	+14,9	−14,1	−19,2	+1,08	+1,31
+21924,55 + 4562,50 − 7971,83 −24741,09	0,2081001 3,1035647	11 45 19,8 252 08 25,9	119 36 53,9 37 12,2	+ 8,9 − 2,4	+ 1,8 − 7,5			$бx_1$ $бy_1$ +11,3 +9.3	+ 9,3	−11,3			−18,3	−20,3	+1,76	+0,35
−12425,13 +20339,02 +21924,55 + 4562,50	1,6369261 0,2081001	121 25 14,9 11 45 19,8	109 39 55,1 37,3	− 4,4 + 8,9	+ 7,3 + 1,8			$бx_1$ $бx_1$ −13,3 +5.5	+ 5,5	+13,3			+17,8	+36,6	−0,71	−0,75
+11899,26 − 6404,31 − 502,83 −17988,99	0,5382108 35,7754907	331 42 37,3 268 23 56,0	63 18 41,3 49,5	+13,0 − 0,3	− 7,1 −11,4			bx_2 by_2 +13,3 +4,3			+ 4,3	−13,3	− 8,2	−17,2	−1,93	−2,27
+ 7469,00 + 6752,10 +11899,26 − 6404,31	0,9040166 0,5382108	42 06 50,8 331 42 37,3	70 24 13,5 23 41,6	+14,9 +13,0	+13,6 − 7,1		bx_1 by_1 −14,9 −13,6	bx_2 by_2 +1,9 +20,7	−13,6	+14,9	+20,7	− 1,9	+31,9	+52,0	+2,92	+3,37
+ 9641,38 + 9301,15 + 9138,55 − 8687,88	0,9647115 0,9506847	43 58 15,6 316 26 53,5	87 31 22,1 19,0	+10,9 +11,7	+10,7 −11,0		bx_2 by_2 −10,9 −10,7				−10,7	+10,9	+ 3,1	+ 3,3	−0,96	−0,66
+ 502,83 +17988,99 +7971,83 +24741,09	35,7754907 3,1035647	88 23 56,0 72 08 25,9	16 15 30,1 35,5	+ 0,3 + 2,4	+11,4 + 7,5	bx_1 by_1 +2,4 + 7,5	bx_2 by_2 −0,3 −11,3		+ 7,5	− 2,4	−11,4	+ 0,3	− 5,4	−11,4	+2,13	+1,84
− 9138,55 + 8687,83 + 502,83 +17988,99	0,9506847 35,7754907	136 26 53,5 88 23 56,0	48 02 57,5 57,1	−11,7 + 0,3	+11,0 +11,4	bx_2 by_2 +0,3 +11,4					+11,4	− 0,3	+ 0,4	+11,5	−11,5	−1,18
									+ 7,5	− 2,4	− 6,4	− 2,4	− 4,1	− 7,8		

$[vv]=27,89$; $[v^1v^1]=28,64$.

Примечание: v^1—поправки к углам, полученные при уравнении направлений.

Таблица 2

Коэффициенты нормальных уравнений

бx_1	бy_1	бx_2	бy_2	l	S	Контроль
+448,45	−296,71	−449,98	+118,98	−593,95	−773,21	−773,21
	+707,96	+505,79	−215,28	+1131,37	+1833,13	+1833,13
		+1056,76	−330,33	+892,38	+1674,62	+1674,62
			+690,50	−51,59	+212,28	+212,28

Таблица 3

Решение нормальных уравнений

бx_1	бy_1	бx_2	бy_2	l	S	Контроль
−44,845	−29,671	−44,998	+11,898	−59,395	−77,321	−77,321
−1,00000	+0,66163	+1,00341	−0,26531	+1,32445	+1,72418	+1,72418
−0,30669	+70,796	+50,579	−21,528	+113,137	+183,313	
	−19,631	−29,772	+7,872	−39,298	−51,158	
	+51,165	+20,807	−13,656	+73,839	+132,155	+132,155
	−1,00000	−0,40667	+0,26691	−1,44318	−2,58297	−2,58294
	−1,52247	+105,676	−33,033	+89,238	+167,462	
		−45,151	+11,939	−59,598	−77,585	
		−8,462	+5,553	−30,028	−53,743	
		+52,063	−15,541	−0,388	+36,134	+36,134
		−1,00000	+0,29850	+0,00745	−0,69403	−0,69405
		−0,14898	+69,050	−5,159	+21,228	
			−3,157	+15,758	+20,514	
			−3,645	+19,708	+35,273	
			−4,639	−0,116	+10,786	
			+57,609	+30,191	+87,801	+87,800
			−1,00000	−0,52406	−1,52405	−1,52406
			−0,52406			

Таблица 4

Поправки к приближенным значениям координат

Способ уравнивания	бx_1	бy_1	бx_2	бy_2
Уравнивание направлений (по данным Красовского) . .	+0,21	−1,46	−0,20	−0,48
Уравнивание углов (табл. 3) .	+0,31	−1,52	−0,15	−0,52