

А. О. ПУШКЕВИЧ,
старший преподаватель

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛИТРОПИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

1. ВВЕДЕНИЕ

Политропические процессы, как известно, связаны одним простым уравнением:

$$pv^m = \text{const.}$$

Исследование политропических процессов ограничивается рассмотрением в координатах $p-v$ группы основных процессов в зависимости от показателя политропы m , а затем дается анализ характера процесса в отношении подведенного тепла и изменения внутренней энергии.

Обычно в координатах $p-v$ наносятся четыре основных процесса: изохорический, изобарический, изотермический и адиабатический. Таким образом, основными показателями процессов являются:

$$\begin{aligned} m &= \pm \infty && \text{для изохоры,} \\ m &= 0 && \text{для изобары,} \\ m &= 1 && \text{для изотермы,} \\ m &= k && \text{для адиабаты.} \end{aligned}$$

Остальные кривые других показателей обычно не наносятся, так как сетка кривых загромождается и теряет свою наглядность.

Исключение лишь получает процесс с показателем $m = -1$, который определяется наклонной линией, проходящей через начало координат.

График общепринятой системы основных процессов в координатах $p-v$ помещается на рис. 1.

Для промежуточных состояний обычно дается пояснение, что если $m < 1$ в процессе расширения, то тепло q подводится и Δu — внутренняя энергия газа положительна.

Здесь уже наглядность изменения q и Δu в зависимости от при разной направленности процессов в расширении и сжатии значительно падает.

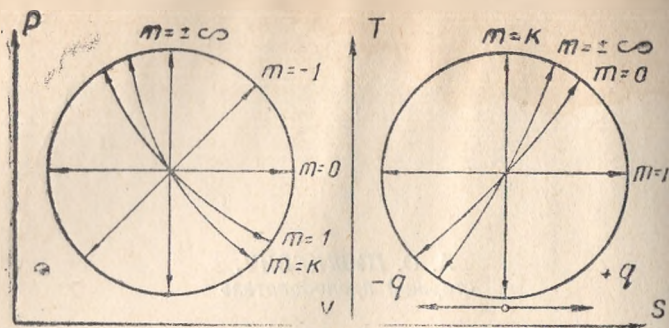


Рис. 1

Все выводы относительно q и Δu базируются на относительном положении предполагаемых процессов в отношении главных. В таком же положении находится и вторая диаграмма $T-S$. Здесь в координатах T и S также даются 4 основных процесса, по которым можно установить расход тепла q на процесс в целом, но расчленив этот расход на слагающие элементы Δu и Δl без предварительной подготовки нельзя. В промежуточные процессы надо вычислять, а определение q требует решения криволинейных трапеций, исключая изотерму и адиабату.

Однако есть возможность показать зависимость между q и Δu для любого процесса, сохраняя наглядность не только в отношении взаимного изменения абсолютных значений этих величин, но и их знаков.

Этот метод построен на следующем выводе.

Согласно I закону термодинамики, подведенное тепло связано уравнением:

$$q = \Delta u + \Delta l.$$

Обобщенная теплоемкость политропических процессов, как это принято, определяется так:

$$c_0 = \frac{k-1}{1-m} \cdot c_v.$$

И здесь, и в дальнейшем эта теплоемкость обозначена через c_0 , так как до сих пор в литературе она оставалась без индекса, что приводило к некоторым затруднениям в чтении.

Общее уравнение теплового равновесия для политропических процессов выразится так:

$$c_v \cdot \frac{k-m}{1-m} (T_2 - T_1) = c_v \cdot (T_2 - T_1) + \frac{AR}{m-1} (T_1 - T_2). \quad (1)$$

Последний член, выражающий тепловой эквивалент работы, можно взять в таком виде:

$$\frac{Ak}{1-m} \cdot (T_1 - T_0) = c_v \cdot \frac{k-1}{m-1} \cdot (T_1 - T_0) = c_v \cdot \frac{k-1}{1-m} \cdot (T_2 - T_1).$$

Подставляя это выражение эквивалента работы в основное уравнение (1), получим:

$$c_v \cdot \frac{k-m}{1-m} \cdot (T_2 - T_1) = c_v (T_2 - T_1) + c_v \cdot \frac{k-1}{1-m} \cdot (T_2 - T_1). \quad (2)$$

Если умножить обе части этого уравнения на $1-m$ и сократить на $c_v(T_2 - T_1)$, то получится следующее простое соотношение:

$$(k-m) = (1-m) + (k-1).$$

Двучлены, стоящие в скобках, эквивалентны соответственно членам теплового баланса $q : \Delta u : Al$.

Таким образом, пропорция между этими величинами определится следующим уравнением:

$$q : \Delta u : Al = (k-m) : (1-m) : (k-1). \quad (3)$$

В этой пропорции можно взять любые соотношения для q , Δu и Al и определить их в зависимости от k и m . Например:

$$\frac{q}{\Delta u} = \frac{k-m}{1-m}; \quad \frac{q}{Al} = \frac{k-m}{k-1}; \quad \frac{\Delta u}{Al} = \frac{1-m}{k-1}.$$

В уравнении (3) работе процесса соответствует всегда положительная величина $k-1$, следовательно, это уравнение относится к расширению.

Для процессов сжатия уравнения (3) переписывается с обратными знаками:

$$q : \Delta u : Al = (m-k) : (m-1) : (1-k), \quad (4)$$

так как там работа всегда отрицательна.

2. ПОСТРОЕНИЕ КРУГОВЫХ БАЛАНСОВ ТЕПЛА

Для графической иллюстрации тепловых балансов политропических процессов взят метод двух квадрантов, полученных в результате деления полуокружности на равные части.

Левый квадрант соответствует положительному q , правый — распределению подведенного тепла на Δu и Al .

По аналогии с денежным балансом левый квадрант представляет актив процесса, правый — пассив процесса, куда помещаются Δu и Al , т. е. расходы положительного актива.

Все соотношения между активом и пассивом определяются лишь показателями политропы m , а численные величины q .

Δu , Al находятся подстановкой значения m в уравнение (3) или (4).

При отрицательных q и Δu подведенное тепло q занимает место в правом квадранте, а Δu —в левом.

Здесь q и Δu меняются местами и отрицательное q делается пассивом, уступая место отрицательному Δu , которое здесь берет на себя роль актива процесса.

Тепловой эквивалент работы Al в процессе расширения всегда положителен и занимает место в правом квадранте как поглотитель тепла; при сжатии этот эквивалент Al в тепловом балансе отрицательный, так как получается за счет силы, приложенной извне, и помещается в левом квадранте. По абсолютному же значению работа сжатия дает повышение температуры и является как бы источником подведенного к процессу тепла.

В порядке пояснения в дальнейшем приводится ряд иллюстраций для процессов расширения и сжатия с различными m

1. Тепловой баланс политропы с показателем

а) Расширение (рис. 2).

Для $K = \frac{c_p}{c_v}$ возьмем и здесь в дальнейшем значение 1

4, как для двухатомных газов.

Из основного соотношения имеем (см. уравнение 3):

$$q : \Delta u : Al = (k - m) : (1 - m) : (k - 1).$$

После подстановки $m = -1$, имеем:

$$q : \Delta u : Al = [k - (-1)] : [1 - (-1)] : [k - 1]$$

или

$$q : \Delta u : Al = 2,4 : 2 : 0,4.$$

Для удобства расчетов и вычерчивания диаграмм здесь и в дальнейшем изложении соотношения количеств тепла увеличиваются в 10 раз, и тогда получается:

$$q : \Delta u : Al = 24 : 20 : 4 \text{ в единицах тепла.}$$

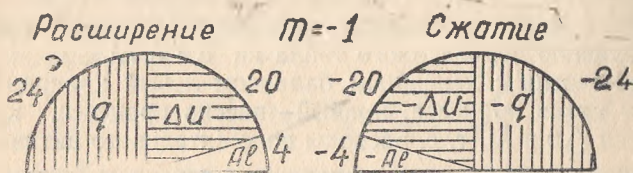


Рис. 2.

Рис. 3.

Из графика (рис. 2) получается, что приток тепла в 24 единицы расходуется на увеличение Δu , то есть на увеличение температуры, и лишь $1/6$ часть идет в работу расширения.

Теплоемкость политропического процесса

$$c_0 = c_v \cdot \frac{k-m}{1-m} = c_v \cdot \frac{24}{20} = c_v \cdot \frac{6}{5}.$$

В конечном итоге c_0 всегда будет равняться c_v исправленному на отношение $\frac{q}{\Delta u}$, что дает в общем виде:

$$c_0 = c_v \frac{q}{\Delta u}.$$

Проверка баланса:

$$q = \Delta u + A_l \text{ или } 24 = 20 + 4 \text{ ед. тепла.}$$

б) С ж а т и е (рис. 3)

Тот же процесс при сжатии даст аналогичный график, но только повернутый на 180° относительно вертикальной линии раздела квадрантов.

Из основной пропорции соотношения элементов баланса для процессов сжатия получаем:

$$q : \Delta u : A_l = (m-k) : (m-1) : (1-k) \text{ (см. уравнение 4).}$$

После подстановки значения m имеем:

$$q : \Delta u : A_l = (-2,4 : -2 : -0,4) \times 10$$

$$\text{или } q : \Delta u : A_l = -24 : -20 : -4.$$

На графике (рис. 3) приводится диаграмма сжатия.

Тепло в процессе сжатия отводится в количестве 24 ед.; потому отводу тепла отвечает понижение Δu на 20 ед., а — 4 ед. соответствуют отведенной теплоте сжатия.

Левый сектор A_l , хотя в тепловом балансе и является отрицательной величиной, но по существу всякое сжатие газа есть явление положительное, выделяющее тепло, что и компенсирует тепловой баланс:

$$-24 = -20 - 4.$$

Теплоемкость политропического процесса сжатия остается без изменения по сравнению с расширением, так как c_0 , зависящее от отношения q и Δu , при перемене знаков значения не изменяет; отсюда:

$$c_0 = c_v \cdot \frac{-24}{-20} = c_v \cdot \frac{6}{5}.$$

2. Тепловой баланс изотермического процесса; $m=1$.

а) Р а с ш и р е н и е (рис. 4)

Расширение $m=1$ Сжатие
Изотерма

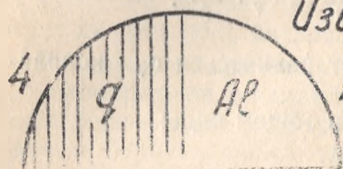


Рис. 4.

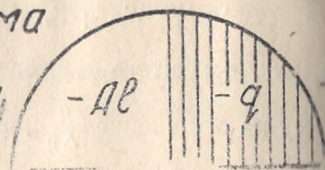


Рис. 5.

Подведенное тепло целиком обращается в работу, эквивалентную ΔA , которая теперь занимает весь правый квадрат. Так как процесс проходит при $T = \text{const}$, то $\Delta u = 0$ и на графике отсутствует.

Проверка баланса дает: $4=0+4$, теплоемкость $c_0 = c_v$.

Здесь c_0 получилось равным $\sim$, но это вовсе не определяет устойчивость процесса при любом изменении q .

Удерживать процесс в состоянии равновесия тепла и работы при $T=\text{const}$ вообще в практике трудно. Изменение q в сторону незначительного уменьшения дает увеличение m , наоборот, при увеличении q процесс сдвигается в сторону уменьшения m . В первом случае температура понижается, во втором случае вырастает Δu , и температура повышается.

б) С ж а т и е (рис. 5)

Для сжатия участники баланса меняют знаки на обратные, что дает:

$$q : \Delta u : \Delta A = -4 : 0 : -4.$$

Работа сжатия $-\Delta A$ равна отведенному теплу $-q$. Так же теплоемкость процесса оценивает соотношения q и Δu , то

данного случая при $\Delta u=0$ теплоемкость $c_0 = c_v \cdot \frac{q}{0}$.

Это обстоятельство и здесь несколько не определяет бесконечное количество отводимого тепла, а лишь констатирует отсутствие повышения температуры.

Начиная с изотермы $m=1$ и до адиабаты при $m=\infty$ теплоемкости c_0 дают отрицательные величины.

3. Тепловой баланс при $m=1,2$

а) Расширение (рис. 6)

На основании уравнения (3) получаем:

$$q : \Delta u : A l = [(k-m) : (1-m) : (k-1)] \cdot 10$$

$$q : \Delta u : A l = 2 : -2 : 4.$$

Расширение

$m=1,2$

Сжатие

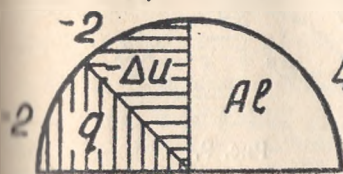


Рис. 6.

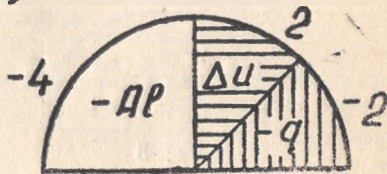


Рис. 7.

Подведено тепла 2 ед., недостающее тепло в количестве двух единиц покрывается за счет «внутреннего займа»; Δu , участвуя в займе, становится отрицательной величиной и переходит в левый квадрант. Работа $A l$ занимает весь правый квадрант, как в случае изотермы.

Проверка баланса: $2 = -2 + 4$.

Теплоемкость $c_0 = c_v \cdot \frac{2}{-2} = -c_v$. Здесь подведенное тепло и изменение Δu по абсолютной величине равны, но по знаку противоположны. Работа расширения l , занимая весь квадрант, покрывается наличной теплотой в половинной доле и остальное за счет займа, т. е. за счет понижения температуры в такой же доле.

б) Сжатие (рис. 7)

В процессе сжатия с показателем $m=1,2$ тепловой баланс выполняется в порядке зеркальной симметрии.

На основании уравнения (4) имеем:

$$q : \Delta u : A l = -2 : 2 : -4.$$

Работа сжатия и выделенное при этом тепло повышает Δu покрывает в той же мере охлаждение— q . Теплоемкость процесса остается та же: $c_0 = c_v \cdot \frac{-2}{2} = -c_v$.

4. Баланс адиабатического процесса с показателем

$$m = 1,4$$

а) Р а с ш и р е н и е (рис. 8)

$$q : \Delta u : A_l = [(k-m) : (1-m) : (k-1)] \times 10,$$

после подстановки $m=k$ имеем:

$$q : \Delta u : A_l = 0 : -4 : 4 \text{ ед. тепла}$$

Следовательно, при исчезающем q внутренняя энергия убывает и температура понижается.

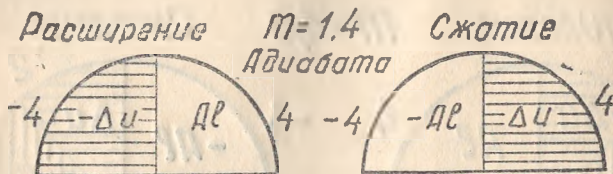


Рис. 8.

Рис. 9.

Весь тепловой эквивалент работы A_l получится за счет внутреннего займа.

В пределах изменения показателя политропы от 1 до 1,4, то есть от изотермы до адиабаты, работа расширения занимает весь правый квадрант, что указывает на выгодность этого участка в отношении получения наибольшей работы.

Тепловой баланс $q = \Delta u + A_l$ получает вид: $0 = -4 + 4$ ед.

Теплоемкость $c_0 = c_v \frac{q}{-\Delta u} = 0$, так как q обращается в 0.

б) С ж а т и е (рис. 9)

При сжатии тепловая диаграмма принимает вид по рис. 9. Тепловой баланс запишется так:

$$0 = +4 \text{ ед.} - 4 \text{ ед.}; \quad c_0 = c_v \cdot \frac{q}{\Delta u} = 0.$$

Затраченная работа извне на сжатие дает увеличение Δu . Подведенное тепло $q=0$.

Если произвести анализ политропических процессов при $m > k$, то картина меняется. Поступления тепла больше нет. Наоборот, тепло отводится, и q делается отрицательным. Зная внутреннюю энергию за счет понижения температуры идет глубже. Здесь Δu должна покрывать не только работу A_l , но и охлаждение, то есть $-q$.

Значит, заем тепла должен по абсолютной величине быть больше q , так как излишек должен питать A_l . Так бывает при процессе расширения. При сжатии при том же показателе m элементы меняются местами.

5. Тепловые балансы изохорических процессов

Всех изохорических процессов четыре.

Решаются процессы тем же методом двух уравнений 3 и 4.

Для расширительного ряда балансов при $m = -\infty \sim$ получаем:

$$[(k-m):(1-m):(k-1)] \times 10 = +\infty : +\infty : 4$$

$$\text{и } [(k-m):(1-m):(k-1)] \times 10 = -\infty : -\infty : 4 \text{ при } m = +\infty.$$

Опуская конечную величину $Al=4$ ед., получаем первое уравнение для начала: $q:\Delta u = +\infty : +\infty$ и для $m = +\infty$, а второе уравнение $q:\Delta u = -\infty : -\infty$ для $m = -\infty$.

На основе этих уравнений получены два балансовых графика—левый положительный, как начало, и правый, отрицательный, как завершение ряда политропических процессов расширения (см. рис. 10).

Изохорические процессы, как пределы процессов расширения

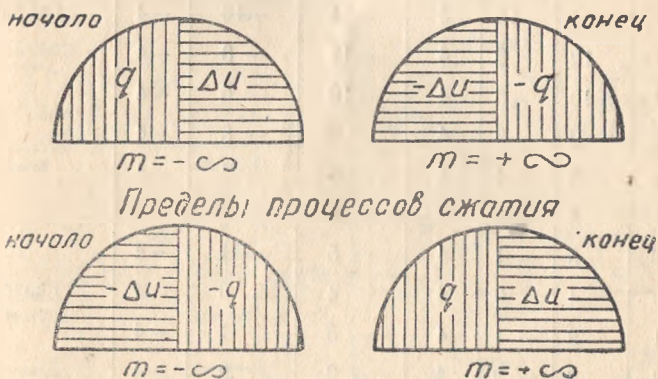


Рис. 10.

В таком же порядке построены графики изохор, как пределы процессов сжатия. Левый в нижнем ряду определяет начало процессов сжатия, здесь балансовое уравнение отрицательное при $m = -\infty$, и правый—завершающий, здесь баланс положительный при $m = +\infty$.

Практически различают только положительные и отрицательные балансы, как балансы с подводом или отнятием тепла, но при строгой оценке показателя бесконечности следует отмечать $m = \pm \infty$.

РАСЧЕТНАЯ ТАБЛИЦА

для определения q , Δu и A в условных тепловых единицах для политропических процессов при $k=1,4$ в пределах показателей m от $- \sim$ до $m = + \sim$

Основная зависимость	$q : \Delta u : A = (k-m) : (1-m) : (k-1)$ для расширения			$q : \Delta u : A = (m-k) : (m-1) : (1-k)$ для сжатия			Примечания
	q	Δu	A	q	Δu	A	
m	$(k-m) \times 10$	$(1-m) \times 10$	$(k-1) \times 10$	$(m-k) \times 10$	$(m-1) \times 10$	$(1-k) \times 10$	
$- \sim$	$\sim$	$\sim$	0	$- \sim$	$- \sim$	0	изохора
-1	24	20	4	-24	-20	-4	
-0,8	22	18	4	-22	-18	-4	
-0,6	20	16	4	-20	-16	-4	
-0,4	18	14	4	-18	-14	-4	
-0,2	16	12	4	-16	-12	-4	
0	14	10	4	-14	-10	-4	изобара
0,2	12	8	4	-12	-8	-4	
0,4	10	6	4	-10	-6	-4	
0,5	9	5	4	-9	-5	-4	
0,6	8	4	4	-8	-4	-4	
0,8	6	2	4	-6	-2	-4	
0,9	5	1	4	-5	-1	-4	
1,0	4	0	4	-4	0	-4	изотерма
1,1	3	-1	4	-3	1	-4	
1,2	2	-2	4	-2	2	-4	
1,3	1	-3	4	-1	3	-4	
1,4	0	-4	4	0	4	-4	адиабата
1,5	-1	-5	4	1	5	-4	
1,6	-2	-6	4	2	6	-4	
1,8	-4	-8	4	4	8	-4	
2,0	-6	-10	4	6	10	-4	
3,0	-16	-20	4	16	20	-4	
$+ \sim$	$- \sim$	$- \sim$	0	$+ \sim$	$+ \sim$	0	изохора

растяжение $[(k-m) - (1-m) + (k-1)] \times 10$

сжатие $[(m-k) - (m-1) + (1-k)] \times 10$

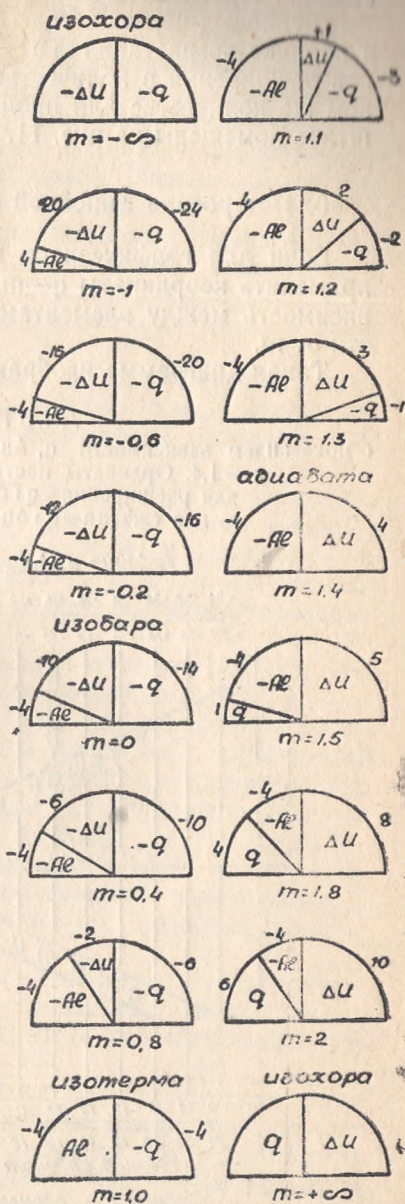
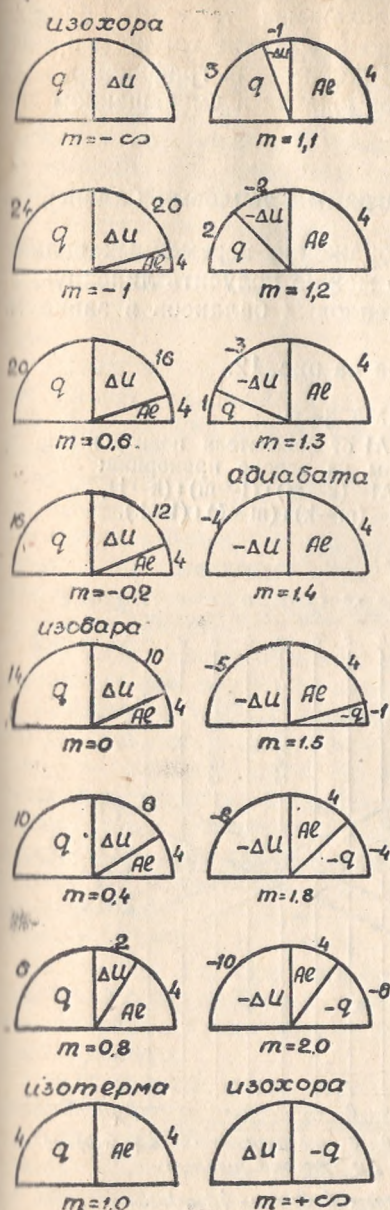


Рис. 11.

Рассмотренные выше случаи тепловых балансов дают возможность на каждый показатель дать свой индивидуальный график. Проследить непрерывность изменений можно только на групповых чертежах, где расположены тепловые балансы в порядке возрастания m от $-$ до $+$. Такие таблицы процессов расширения в количестве 16 балансовых графиков и в том же количестве для процессов сжатия в уменьшенном масштабе помещены на рис. 11.

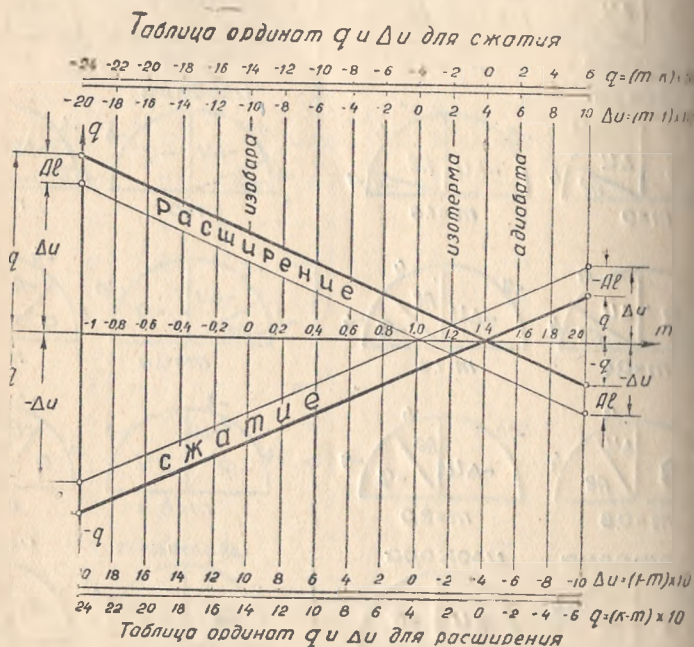
6. Построение линейной диаграммы тепловых балансов

Если для графического изображения переменных величин применить координаты $q-m$, то можно получить линейную зависимость между элементами тепловых балансов в зависимости от m .

Такая диаграмма изображена на рис. 12.

ДИАГРАММА $q-m$

с показанием зависимости q , Δu и Al от показателя политропы m $k=1,4$. Ординаты построены на основе пропорции:
для расширения $-q : \Delta u : Al = (k-m) : (1-m) : (k-1)$,
для сжатия $-q : \Delta u : Al = (m-k) : (m-1) : (1-k)$.



Масштаб горизонтальный для m — 45 мм/един
вертикальный для q и Δu — 2 мм/едт

Рис. 12.

Сущность этой линейной диаграммы заключается в следующем.

На оси абсцисс откладываются значения m в пределах от -1 до $+2$.

Из расчетной таблицы, берутся значения q и откладываются по вертикалям соответственно значению m . Получаются две наклонных линии—ниспадающая слева направо с пересечением оси абсцисс в точке $k=1,4$ и вторая наклонная, но поднимающаяся, симметричная с первой. Первая служит для процессов расширения, вторая—для сжатия.

На этих же ординатах $\pm q$ откладываются величины Δu . Так как расчетная таблица дает для каждого показателя m три значения q , Δu , Al , то наряду с линиями q получают две параллельных линии Δu с пересечением оси m — m в точке $m=1$.

Разность $(q-\Delta u)$ дает Al , что и получается в виде постоянной величины между каждой парой параллельных линий. Для расширения Al всегда положительно, для сжатия Al отрицательно.

В отличие от кругловых диаграмм тепловых балансов, где все компоненты баланса дают в сумме заполнение площади полукруга, в линейной диаграмме Al служит постоянной величиной, не зависящей от m ; в свою очередь q и Δu следуют закону переменных величин и измеряются в масштабе соответствующих ординат.

Правило знаков обычное: превышение линии абсцисс дает положительное значение, понижение—отрицательное.

Масштаб оси абсцисс позволяет вместить лишь часть значений m ; сущность изохорических процессов для показателей $m=\pm\infty$ остается ясной. На этой линейной диаграмме можно проследить свойство бесконечностей. Если линейную диаграмму свернуть в бесконечно большой цилиндр так, чтобы ось цилиндра была параллельна оси ординат, то $-\infty$ и $+\infty$ сливаются. На этом основании изохорический положительный тепловой баланс при $m=-\infty$ сливается с таким же положительным балансом, но при $m=+\infty$.

Вот почему изохора как предел изменений политропических процессов требует у своего показателя бесконечности двойного знака $\pm\infty$, независимо от баланса—положительного или отрицательного.

Предлагаемый метод исследования политропических процессов в порядке рассмотрения отдельных тепловых балансов или в порядке обобщения в одной линейной диаграмме не отличается сложностью и может служить наглядным пособием для изучения этого важного раздела термодинамики.