

УДК 531.132.2

С. А. Борисевич, ассистент (БГТУ)

ЧИСЛЕННАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ГИБКОГО СТВОЛА ДЕРЕВА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И АЛГОРИТМ ЕЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Для исследования динамики падения гибкого ствола дерева в трехмерном пространстве была использована модель в виде цепи жестких стержней, соединенных упругими связями. Разработана методика составления и интегрирования уравнений движения модели дерева. Конфигурация стержня описывается с помощью вектора смещения оси стержня и подвижной системой координат, жестко связанной с поперечным сечением стержня. Положение подвижной системы координат по отношению к неподвижной определяется матрицей поворотов, параметризованной с помощью кватернионов.

A rod-chain model was used to study the three-dimensional dynamics of a tree stem. A numerical method is developed for simulating the mechanical behavior of a flexible tree stem. The motion of the flexible tree stem is determined under the resistance forces exerting on the tree crown. The modeling strategy of this approach employed the exact nonlinear kinematic relationships in the sense of Cosserat theory, and adopted Bernoulli hypothesis. A deformed configuration of the rod is described by the displacement vector centroid curves and an orthonormal moving frame, rigidly attached to the cross-section of the rod. The position of the moving frame relative to the inertial frame is specified by the rotation matrix, parameterized by rotational quaternions.

Введение Тонкие стержни, находящиеся в трехмерном пространстве и подверженные большим деформациям и перемещениям, часто встречаются в различных инженерных задачах. Анализ операций технологического процесса лесосечных работ показывает, что все они связаны с перемещением дерева [1]. После срезания и сталкивания дерева при свободном его падении происходит вращение ствола под действием силы тяжести. Теоретическое рассмотрение этого процесса предполагает вращение ствола в плоскости, и в большинстве случаев это приемлемо. Однако на практике, ввиду действия сил ветровой нагрузки, сопротивления кроны и влияния некоторых других факторов, осевая линия дерева может принять пространственную конфигурацию. Характерным является случай переноса дерева манипулятором при управляемой валке. В этом случае плоскость падения дерева изменяется в нужном направлении, и технологическое оборудование испытывает определенное силовое воздействие со стороны дерева. Таким образом, как правило, при валке и пакетировании перемещение деревьев происходит в трехмерном пространстве. Этот случай является общим для процесса перемещения дерева, при операциях лесосечных работ. Изучение данного процесса необходимо при решении задач по взаимодействию машины, ее рабочих органов и деревьев. Учет гибкости ствола дерева может существенно улучшить понимание его механического поведения и увеличить точность расчетов.

Точное решение задач о движении деформируемых систем в рамках классической теории упругости удастся получить в замкнутой

форме лишь в немногих относительно простых случаях. В общем случае это сделать невозможно, и поэтому приходится упрощать расчетную модель, в частности, путем уменьшения числа степеней свободы. Можно рассматривать ствол дерева в виде дискретной модели, состоящей из конечного числа сегментов, и это приведет к численному решению для любых операций, связанных с перемещением дерева. Моделирование гибких стержней в виде жестких тел, связанных упругими связями, широко используется и имеет преимущества по сравнению с конечно-элементным способом, который представляет собой моделирование гибкого тела конечным числом гибких элементов, соединенных жестко.

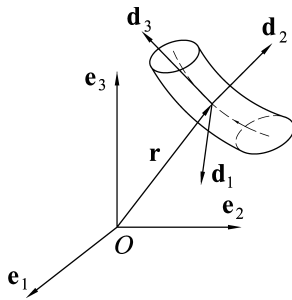
В данной статье рассмотрена численная модель механического поведения ствола дерева при движении его в трехмерном пространстве. Модель представляет собой некоторое число цилиндров, соединенных между собой пружинами. Цилиндры могут поворачиваться друг относительно друга в двух плоскостях и совершать крутильные движения. Уравнения движения записаны на основании уравнения Лагранжа второго рода.

1. Общие сведения. Рассмотрим общую задачу движения гибкого ствола дерева в трехмерном пространстве и будем следовать так называемой *геометрически точной нелинейной трехмерной теории стержней* [2, 3]. Введем декартову систему координат (x, y, z) в некотором инерциальном базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ (рисунок). Ориентацию поперечного сечения в произвольном сечении s будем задавать ортогональным базисом $\mathbf{d}_i(s, t)$ ($i = 1, 2, 3$), называемым подвижным,

причем единичный вектор \mathbf{d}_3 – нормальный к поперечному сечению, а \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 лежат в плоскости сечения. Тогда движение участка стержня описывается его нейтральной линией $\mathbf{r}(s, t)$ и тремя ортогональными единичными векторами $\mathbf{d}_i(s, t)$ ($i = 1, 2, 3$). В инерциальном декартовом базисе ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) можно записать:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s, t) &= r_i(s, t)\mathbf{e}_i = \\ &= x(s, t)\mathbf{e}_1 + y(s, t)\mathbf{e}_2 + z(s, t)\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Движение стержня включает скорость осевой линии $\partial\mathbf{r}(s, t)/\partial t$ и угловую скорость поперечного сечения $\mathbf{w}(s, t)$.



Модель стержня

Рассмотрим производную единичного вектора подвижного базиса по времени и представим ее в виде разложения по базису ($\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$):

$$\frac{\partial \mathbf{d}_i}{\partial t} = \mathbf{w} \times \mathbf{d}_i.$$

Так как

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_i \times \frac{\partial \mathbf{d}_i}{\partial t} &= \mathbf{d}_i \times (\mathbf{w} \times \mathbf{d}_i) = \\ &= \mathbf{w}(\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_i) - \mathbf{d}_i(\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{w}) = 2\mathbf{w}, \end{aligned}$$

то вектор угловой скорости

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \mathbf{d}_i \times \frac{\partial \mathbf{d}_i}{\partial t}. \quad (1)$$

Аналогично рассмотрим производную единичного вектора подвижного базиса по дуговой координате и представим ее в виде разложения по базису ($\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$):

$$\frac{\partial \mathbf{d}_i}{\partial s} = \mathbf{u} \times \mathbf{d}_i.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_i \times \frac{\partial \mathbf{d}_i}{\partial s} &= \mathbf{d}_i \times (\mathbf{u} \times \mathbf{d}_i) = \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_i) - \mathbf{d}_i(\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}) = 2\mathbf{u}, \end{aligned}$$

вектор деформации

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{d}_i \times \frac{\partial \mathbf{d}_i}{\partial s}. \quad (2)$$

2. Параметризация матрицы поворота.

Среди пригодных математических инструментов для описания пространственных поворотов являются алгебра Ли, алгебра Клиффорда и алгебра кватернионов. Математическое моделирование пространственных поворотов, их параметризация и линеаризация рассматриваются в ряде публикаций последних лет [2, 3]. Эти работы являются развитием предыдущих работ, рассматривающих движение гибких стержней и нитей в плоскости. Ранее было доказано, что свободные от сингулярности уравнения поворота не могут быть получены при использовании трех независимых переменных, и поэтому было предложено (см. [4]) использовать четыре компоненты кватерниона в качестве обобщенных координат. Для параметризации матрицы поворота применим компоненты кватернионов $\mathbf{q} = \mathbf{q}(s) = (q_1, q_2, q_3, q_4)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1(\mathbf{q}) &= (q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2, \\ &2q_1q_2 + 2q_3q_4, 2q_1q_3 - 2q_2q_4); \\ \mathbf{d}_2(\mathbf{q}) &= (2q_1q_2 - 2q_3q_4, \\ &-q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2, 2q_2q_3 - 2q_1q_4); \\ \mathbf{d}_3(\mathbf{q}) &= (2q_1q_3 + 2q_2q_4, \\ &2q_2q_3 - 2q_1q_4, -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2). \end{aligned} \quad (3)$$

Использование кватернионов для данной задачи позволило создать численно стабильный и эффективный компьютерный алгоритм, избежать сингулярностей и существенно ускорить вычисления.

Подставляя выражения для единичных векторов из (3) в (1) и учитывая выражение для нормы кватернионов $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1$, получим проекции угловой скорости в связанной системе координат:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2(q_1\dot{q}_4 + q_2\dot{q}_3 - q_3\dot{q}_2 + q_4\dot{q}_1); \\ \omega_2 &= 2(-q_1\dot{q}_3 - q_2\dot{q}_4 + q_3\dot{q}_1 + q_4\dot{q}_2); \\ \omega_3 &= 2(q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1 - q_3\dot{q}_4 + q_4\dot{q}_3). \end{aligned}$$

Аналогично компоненты деформации в связанной системе координат из (2):

$$\begin{aligned} u_1 &= 2(q_1q_4' + q_2q_3' - q_3q_2' + q_4q_1'); \\ u_2 &= 2(-q_1q_3' - q_2q_4' + q_3q_1' + q_4q_2'); \\ u_3 &= 2(q_1q_2' - q_2q_1' - q_3q_4' + q_4q_3'). \end{aligned}$$

3. Уравнения движения ствола дерева.

Располагая локальную ортогональную систему единичных векторов ($\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$) в конечном числе точек, получим модель дерева в виде цепочки жестких стержней, соединенных упругими шарнирами. Свяжем с каждым стержнем

модели локальную ортогональную систему единичных векторов $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$. Положение каждого стержня в некоторой неподвижной системе координат $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ будем задавать радиус-вектором центра масс стержня:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_C(s, t) &= r_{Ci}(s, t)\mathbf{e}_i = \\ &= x_C(s, t)\mathbf{e}_1 + y_C(s, t)\mathbf{e}_2 + z_C(s, t)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

и ориентацию каждой локальной системы координат $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$, относительно неподвижной системы координат $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ будем определять с помощью выражения (3) для компонентов кватерниона $\mathbf{q} = \mathbf{q}(s) = (q_1, q_2, q_3, q_4)$.

Координаты центров тяжести стержней в неподвижной системе координат найдем следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{Ck} &= \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{d}_3(\mathbf{q})_i)_x \Delta s = \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} l_i (2q_1^i q_3^i + 2q_2^i q_4^i) + \frac{1}{2} l_k (2q_1^k q_3^k + 2q_2^k q_4^k); \\ y_{Ck} &= \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{d}_3(\mathbf{q})_i)_y \Delta s = \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} l_i (2q_2^i q_3^i - 2q_1^i q_4^i) + \frac{1}{2} l_k (2q_2^k q_3^k - 2q_1^k q_4^k); \\ z_{Ck} &= \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{d}_3(\mathbf{q})_i)_z \Delta s = \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} l_i (-(q_1^i)^2 - (q_2^i)^2 + (q_3^i)^2 + (q_4^i)^2) + \\ &+ \frac{1}{2} l_k (-(q_1^k)^2 - (q_2^k)^2 + (q_3^k)^2 + (q_4^k)^2), \end{aligned}$$

где l_i – длина i -го стержня.

Скорость центров масс стержней

$$v_{Ck}^2 = \dot{x}_{Ck}^2 + \dot{y}_{Ck}^2 + \dot{z}_{Ck}^2.$$

Кинетическая энергия рассматриваемой системы находится по формуле

$$T = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} m_k v_{Ck}^2 + \frac{1}{2} (J_{1k}^C \omega_{1k}^2 + J_{2k}^C \omega_{2k}^2 + J_{3k}^C \omega_{3k}^2) \right),$$

где $\omega_{xk}, \omega_{yk}, \omega_{zk}$ – проекции угловой скорости на оси подвижной системы координат, связанной с телом.

Так как каждый стержень представляет собой тело вращения, кинетическая энергия принимает вид

$$T = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} m_k v_{Ck}^2 + \frac{1}{2} (J_{1k}^C (\omega_{xk}^2 + \omega_{yk}^2) + J_{3k}^C \omega_{zk}^2) \right).$$

Потенциальная энергия системы состоит из энергии в поле сил тяжести и энергии упругих связей между стержнями. Потенциальная энергия упругих связей имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=2}^n c_{jk} u_{jk}^2.$$

Производные от кватернионов по дуговой координате в выражениях для деформаций заменены конечными разностями.

Потенциальная энергия жестких цилиндров в поле сил тяжести:

$$\Pi = \sum_{k=1}^n g m_k z_k.$$

Примем, что сила сопротивления воздуха, действующая на каждый элемент, пропорциональна первой степени скорости $\mathbf{F}_k = -\beta \mathbf{v}_{Ck}$ его центра масс. При линейной зависимости силы сопротивления от скорости для вычисления обобщенной силы сопротивления удобно ввести диссипативную функцию Релея Φ :

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \beta_k \frac{v_k^2}{2}.$$

Тогда обобщенная сила сопротивления

$$Q_k = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_k}.$$

Если теперь составить уравнения движения в форме уравнений Лагранжа второго рода, то получим $4n$ дифференциальных уравнений движения, содержащих только компоненты кватернионов и их производные по времени. Однако положение каждого из стержней модели определяется тремя независимыми обобщенными координатами. Следовательно, для каждого стержня имеется одна зависимая обобщенная координата. Будем полагать, что на обобщенные координаты, определяющие положение каждого стержня, наложена дополнительная голономная связь:

$$\begin{aligned} \Omega_\alpha &= (q_1(\alpha))^2 + (q_2(\alpha))^2 + (q_3(\alpha))^2 + \\ &+ (q_4(\alpha))^2 - 1 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

которая, фактически, является условием выполнения нормы кватерниона для каждого стержня модели. Составим систему уравнений Лагранжа второго рода с множителями (следуя методу неопределенных множителей Лагранжа):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_k} + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

которая, совместно с $s = n$ уравнениями связей, служит для определения $4n + s$ неизвестных величин:

$$\begin{aligned} q_1(1), q_2(1), \dots, q_4(1), q_1(2), \dots, q_4(2), \dots \\ q_1(1), q_2(1), \dots, q_4(1), q_1(2), \dots, q_4(2), \dots \end{aligned}$$

Множители Лагранжа здесь не имеют физического смысла, и их равенство нулю говорит о правильности вычислений.

4. Интегрирование уравнений движения.

Полученные уравнения решены численно, с помощью пакета *Maple 11*, при заданных начальных углах отклонения стержней и их начальных скоростях, пересчитанных в компонентах кватернионов. С учетом начальных условий получена система линейных дифференциальных уравнений. Из полученной системы уравнений находились старшие производные компонент кватернионов при помощи метода Ньютона – Рафсона [5]. Численное интегрирование уравнений движения производилось с помощью модификации базовой схемы Верле, так называемой полшаговой «*leap-frog*» схемы [4]:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_i(t + \Delta t/2) &= \dot{\mathbf{q}}_i(t - \Delta t/2) + \ddot{\mathbf{q}}_i(t)\Delta t; \\ \mathbf{q}_i(t + \Delta t) &= \mathbf{q}_i(t) + \dot{\mathbf{q}}_i(t + \Delta t/2)\Delta t,\end{aligned}$$

где \mathbf{q}_i – векторы компонентов кватернионов; $\dot{\mathbf{q}}_i$ – векторы первых производных компонентов кватернионов; $\ddot{\mathbf{q}}_i$ – векторы вторых производных компонентов кватернионов.

Текущие скорости вычислялись по формуле

$$\dot{\mathbf{q}}_i(t) = 0,5(\dot{\mathbf{q}}_i(t + \Delta t/2) + \dot{\mathbf{q}}_i(t - \Delta t/2)).$$

Динамические параметры стержней и характеристики пружин сочленения определялись аналогично тому, как это делалось в предыдущих работах [6].

Заключение. Для исследования динамики падения гибкого ствола дерева в трехмерном пространстве была использована модель в виде цепи жестких стержней, соединенных упруги-

ми связями. Разработана методика составления и интегрирования дифференциальных уравнений движения модели дерева. Конфигурация стержня описывается с помощью векторов смещения оси стержня и подвижных систем координат, жестко связанной с поперечными сечениями стержней. Положение подвижной системы координат по отношению к неподвижной определяется матрицей поворотов, параметризованной с помощью кватернионов.

Литература

1. Жуков, А. В. Теория лесных машин / А. В. Жуков. – Минск: БГТУ, 2001. – 640 с.
2. Cao, D. Q Three-dimensional nonlinear dynamics of slender structures: Cosserat rod element approach / D. Q. Cao, D. Liu, C.H.-T. Wang // International Journal of Solids and Structures. – 2006. – Vol. 43, № 3–4. – P. 760–783.
3. Zupan, E. The quaternion-based three-dimensional beam theory / E. Zupan, M. Saje, D. Zupan // Comput. Methods in Appl. Mech. Engrg. – 2009. – Vol. 198, № 49–52. – P. 3944–3956.
4. Allen, M. P. Computer Simulation of Liquids / M. P. Allen, D. J. Tildesley. – Oxford.: Clarendon press, 1999. – 385 p.
5. Денис, Дж. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / Дж. Дэннис, Р. Шнабель. – М.: Мир, – 1988. – 440 с.
6. Борисевич, С. А. Конечно-разностная схема для исследования падения ствола дерева / С. А. Борисевич // Труды БГТУ. Сер. II, Лесная и деревообраб. пром-сть. – 2008. – Вып. XVI. – С. 104–107.

Поступила 01.04.2010