

УДК 621.926

П. Е. Вайтехович, доцент (БГТУ); Д. В. Семененко, ассистент (БГТУ); Г. М. Хвесько, доцент (БГТУ)

АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МЕЛЮЩИХ ТЕЛ В ПЛАНЕТАРНОЙ МЕЛЬНИЦЕ

В работе проведен анализ моделей относительного движения измельчающих тел в горизонтальной планетарной мельнице. Получено уравнение для расчета нормальной реакции связи на любое мелющее тело в сегменте загрузки с учетом действия силы радиального давления столба шаров. Определен оптимальный способ построения границ помольных зон.

The analysis of models of relative movement of grinding bodies in a horizontal planetary mill is carried out. The equation for calculation of normal reaction of communication for any grinding body in a segment of charging with account of action a force of radial pressure of a column of balls is received. The optimum way of construction of borders grinding zones is defined.

Введение. Планетарные мельницы являются одним из перспективных помольных агрегатов, поэтому их разработкой и исследованием занимаются во многих странах [1–5]. Особенность этих агрегатов состоит в том, что основным силовым фактором разрушения материалов становятся инерционные силы, величину которых можно изменять. Так, изменение геометрических соотношений планетарных мельниц, приводных элементов позволяет регулировать значение инерционных сил, а соответственно, и кинетики измельчения в широком диапазоне. Причем ускорение, приобретаемое мелющими телами, может превышать 100g, что подтверждает преобладающее влияние инерционных сил.

В работах [6–9] установлены режимы планетарных мельниц, характер изменения силовых факторов, границы помольных зон в сегменте загрузки. Однако ввиду сложности аналитического описания движения на первом этапе рассматривалось преимущественно одиночное мелющее тело. Авторы считают, что в инженерных расчетах это вполне оправдано и подтверждено экспериментально для конструктивно подобных агрегатов, таких как барабанные мельницы [10]. Вместе с тем любая физическая или математическая модель требует уточнения и совершенствования. В этом плане возникло естественное желание учесть влияние взаимного контакта мелющих тел в сегменте загрузки на их движение относительно барабана.

Основная часть. Относительное движение мелющих тел во вращающемся барабане планетарной мельницы рассмотрим в подвижной системе координат AXY , которая вращается с угловой скоростью ω , равной скорости вращения барабана (рис. 1).

Уравнение относительного движения мелющего тела при этом будет иметь вид

$$m\vec{a}_d = \vec{G} + \vec{F}_T + \vec{F}_{1e} + \vec{F}_{2e} + \vec{F}_c + \vec{F}_p, \quad (1)$$

где m – масса мелющего тела, кг; a_d – относительное ускорение, m/c^2 ; G – сила тяжести, Н; F_T – сила трения, Н; F_{1e} и F_{2e} – инерционные

силы, связанные с поворотом барабана и водила соответственно, Н; F_c – кориолисова сила инерции, Н; F_p – сила давления, Н.

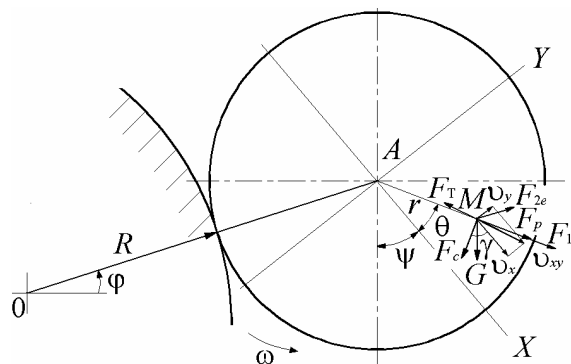


Рис. 1. Расчетная схема планетарной мельницы

Инерционные силы F_{1e} и F_{2e} определены нами ранее [11]. Кориолисова сила инерции рассчитывается как удвоенное произведение переносной угловой скорости и относительной скорости мелющего тела. При рассмотрении движения одиночного мелющего тела упомянутые инерционные силы вместе с силой тяжести и трения представляют полный набор силовых факторов, влияющих на его перемещение относительно барабана. Когда мелющее тело находится внутри сегмента загрузки, то на него оказывают воздействие другие тела. Именно это воздействие предлагается оценить дополнительной силой, условно названной нами силой давления F_p . Направление вектора и модуль этой силы определить довольно сложно, поскольку траектория относительного движения мелющего тела в сегменте загрузки постоянно изменяется. Задачу такого уровня, направленную на определение скорости движения мелющего тела как элементарной частицы, можно попытаться решить с использованием уравнений гидродинамики, представив загрузку в виде некоторого объема жидкости. Дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости (уравнения Навье – Стокса) для плоской задачи имеет вид [12]

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \frac{dv_x}{dt} &= \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \\ \rho \frac{dv_y}{dt} &= \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = \\ &= -\rho g - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Трансформация этого уравнения для мелющей загрузки возможна при использовании вместо динамической вязкости коэффициента трения и представления силы F_p как силы статического давления на анализируемое тело со стороны других тел. Однако применение гидродинамической модели затруднено и практически невозможно по следующим причинам: шаровая загрузка не является сплошной средой, шар с его конкретными размерами нельзя считать элементарной частицей, движение шаров в планетарной мельнице нестационарное.

Второе возможное направление решения задачи о движении мелющих тел – использование моделей механики сыпучей среды. Но даже предварительный анализ поведения мелющих тел и их взаимодействия в планетарной мельнице показывает, что шаровая загрузка далека по своим свойствам от сыпучей среды. Это заключение подтверждается основным постулатом сыпучей среды [13], для которой $d_c/A \leq 10^{-3}$, где d_c – диаметр частиц, м; A – размер массива, м. В планетарных мельницах это соотношение может достигать 10^{-1} . Кроме того, в механике сыпучей среды успешно решаются только статические задачи, а в исследуемом агрегате она динамическая.

В связи с вышесказанным вернемся к исходному уравнению (1) относительного движения мелющего тела в сегменте загрузки. Для возможности учета воздействия других мелющих тел, выраженного силой давления F_p , обратимся к упрощенной модели. Рассмотрим послойное движение шаров по дуге окружности. Тангенциальное усилие в момент сдвига слоев будет зависеть от давления, оказываемого в радиальном направлении на каждый шар анализируемого слоя. Силу давления на шар, находящийся на радиусе r_i , определим по расчетной схеме, представленной на рис. 2.

На произвольном радиусе r выделим элементарный участок dr по ширине столбика шаров. Силу давления для этого элементарного участка можно определить следующим образом:

$$dF_p = dm \tilde{F}_p, \quad (3)$$

где dm – масса элементарного участка, кг; \tilde{F}_p – относительная сила давления для этого участка, Н.

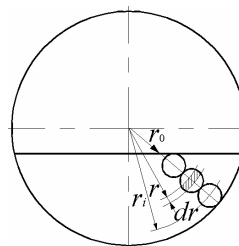


Рис. 2. Расчетная схема для определения силы давления

Масса элементарного участка

$$dm = \varepsilon \rho dV = \varepsilon \rho \delta dr dl, \quad (4)$$

где ε – коэффициент заполнения столбика шарами; ρ – плотность материала шаров, кг/м³. Толщина одного слоя шаров $\delta = 2r_{ш}$, длина дуги $dl = 2r_{ш}$.

Коэффициент заполнения можно определить как соотношение объемов шара и куба с одинаковым определяющим размером $\varepsilon = V_{ш} / V_k = 0,52$. Для дальнейших расчетов принимаем $\varepsilon = 0,5$. Тогда окончательно

$$dm = 2r_{ш}^2 \rho dr. \quad (5)$$

Удельная сила давления противоположно направлена и равна по модулю относительной нормальной реакции, которая определена нами ранее [14, 15] для элементарной точки (участка), т. е. $\tilde{F}_p = \tilde{N}$

$$\tilde{N} = \omega^2 k R \left(b + \frac{k}{1+k} \cos(\psi - \phi) \right) - g \sin \psi, \quad (6)$$

где ω – угловая скорость барабана, рад/с; R – радиус обкатки, м; k и b – геометрические критерии; ψ и ϕ – углы поворота барабана и водила соответственно, рад.

Величину геометрических критериев можно рассчитать следующим образом:

$$k = \frac{r_b}{R}, \quad b = \frac{r}{r_b}, \quad (7)$$

где r_b – внутренний радиус помольного барабана, м; r – текущий радиус, м.

Тогда

$$\tilde{F}_p = \tilde{N} = \omega^2 k R \left(\frac{r}{kR} + \frac{k}{1+k} \cos(\psi - \phi) \right) - g \sin \psi. \quad (8)$$

С учетом выражений (4)–(8) сила давления на шар, находящийся на радиусе r_i ,

$$F_{ip} = 2r_{ш}^2 \rho \int_{r_0}^{r_i - r_{ш}} \tilde{F}_{1p} dr. \quad (9)$$

В результате интегрирования получаем уравнение для расчета силы давления столбика шаров на плоскость их смещения

$$\tilde{F}_{ip} = 2r_{ш}^2 \rho \left(\omega^2 \frac{(r_i - r_{ш})^2 - r_0^2}{2} + (r_i - r_{ш} - r_0) \times \left(\frac{\omega^2 k^2 R^2}{1+k} \cos(\psi - \phi) - g \sin \psi \right) \right) \quad (10)$$

Расчет силы давления по уравнению (10) и реакции связи по уравнению (8) позволил определить их величину при различных значениях критерия b (рис. 3) и угла расположения мелющего тела внутри сегмента загрузки (рис. 4). На рис. 3 и 4 показаны результаты расчетов для $k = 0,5$, $r_b = 0,1$ м и $r_{ш} = 0,01$ м. Сравнение силы давления с нормальной реакцией для одиночного мелющего тела указывают на необходимость ее учета в уравнении (1) относительного движения.

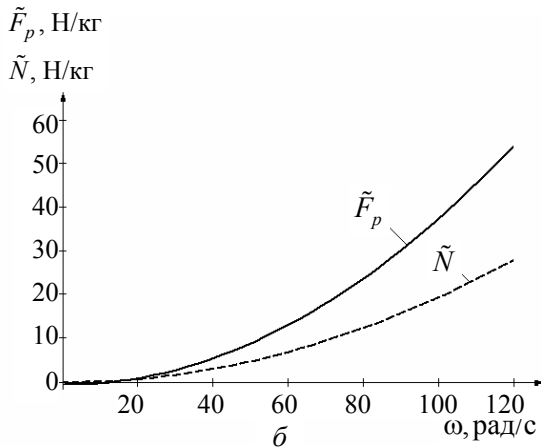
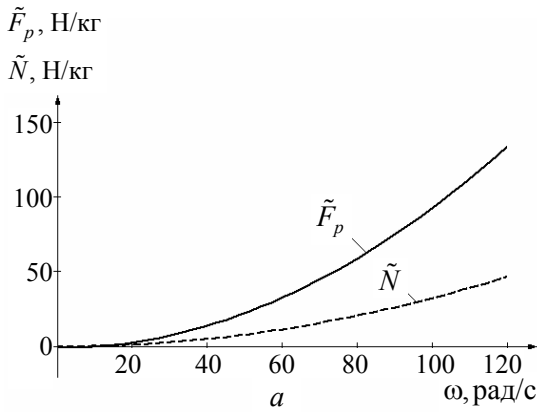


Рис. 3. Влияние взаимного воздействия мелющих тел на величину реакции связи одиночного тела: $a - b = 1,0$; $\bar{b} - b = 0,6$

Поскольку инерционные силы F_{1e} и F_{2e} постоянно изменяют свое направление, то зависящая от них сила давления может существенно изменяться не только от радиуса, но и от угла даже в пределах диаметра шара. Поэтому для более точного определения силы давления расчетную схему необходимо дополнить (рис. 5) и

интегрирование проводить по двум переменным. Переход к угловой координате проведем по соотношению $dl = r d\alpha$. Тогда уравнение (4) для массы элементарного участка примет вид

$$dm = \varepsilon \rho \delta r dr d\alpha. \quad (11)$$

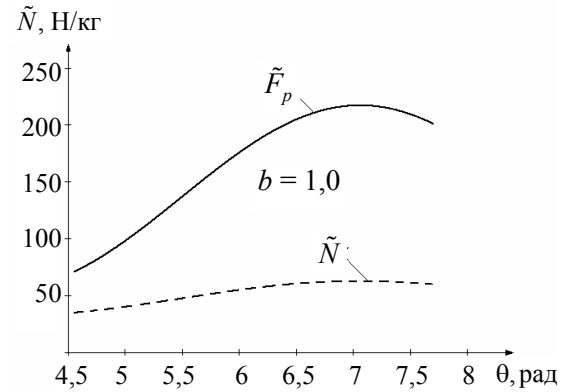


Рис. 4. Влияние расположения мелющего тела в сегменте загрузки на величину реакции связи и силы давления

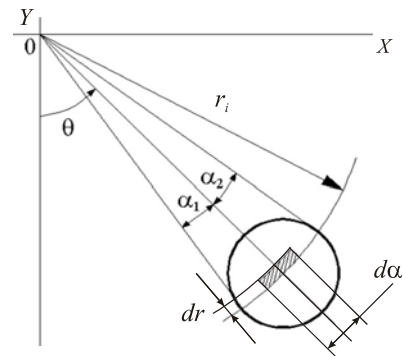


Рис. 5. Расчетная схема для определения силы давления мелющего тела с учетом его размеров

Силу давления столбика шаров на плоскость их смещения можно вычислить с помощью двойного интеграла

$$F_{ip} = 2r_{ш} \rho \int_{r_0}^{r_i - r_{ш}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \tilde{F}_{1p} d\alpha dr, \quad (12)$$

где пределы интегрирования составляют

$$\alpha_1 = \theta - \arctg \frac{r_{ш}}{r_i}, \quad \alpha_2 = \theta + \arctg \frac{r_{ш}}{r_i}. \quad (13)$$

Интегрирование в указанных пределах дает расчетную зависимость (14) для определения силы давления.

Расчет силы давления по уравнениям (10) и (14) показал, что разница в ее величине не превышает 5%. Таким образом, в инженерных вычислениях изменение силы давления по дуге окружности в пределах диаметра шара можно не учитывать.

$$F_{ip} = r_{ш}\rho \times \left(\begin{array}{l} \left(2\omega^2 \arctg \frac{r_{ш}(r_i + r_{ш})^3 - r_0^3}{3r_i} \right) + \\ + \frac{\omega^2 k^2 R^2}{1+k} \left((r_i + r_{ш})^3 - r_0^3 \right) \times \\ \cos \varphi \left(\begin{array}{l} \sin \left(\theta + \arctg \frac{r_{ш}}{r_i} \right) - \\ - \sin \left(\theta - \arctg \frac{r_{ш}}{r_i} \right) \end{array} \right) - \\ - \sin \varphi \left(\begin{array}{l} \cos \left(\theta + \arctg \frac{r_{ш}}{r_i} \right) - \\ - \cos \left(\theta - \arctg \frac{r_{ш}}{r_i} \right) \end{array} \right) \\ + \frac{g}{2} \left(\begin{array}{l} \cos \left(\theta + \arctg \frac{r_{ш}}{r_i} \right) - \\ - \cos \left(\theta - \arctg \frac{r_{ш}}{r_i} \right) \end{array} \right) \times \\ \times \left((r_i + r_{ш})^2 - r_0^2 \right) \end{array} \right) + \quad (14)$$

Дальнейшие действия были направлены на уточнение границ помольных зон (безотрывного движения, скольжения, отрыва), определенных ранее [8]. Причем нормальная реакция в каждой анализируемой точке загрузки рассчитывалась с учетом силы давления, вычисленной по уравнению (10). Результаты расчетов с учетом силы давления нижерасположенных шаров (для $\varphi = 45^\circ$, $\omega = 120 \text{ с}^{-1}$, $k = 0,5$ и $r_{ш} = 0,005 \text{ м}$) представлены на рис. 6, а, а без учета – на рис. 6, б.

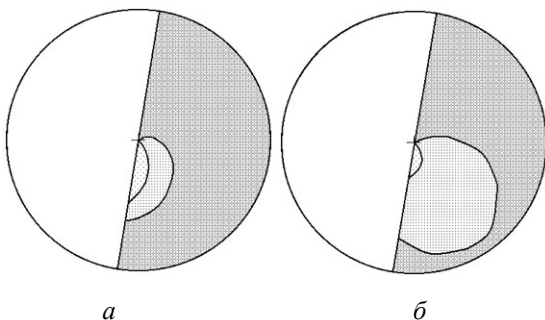


Рис. 6. Распределение мелющих тел в помольной загрузке: а – с учетом силы давления; б – без учета силы давления

Видно, что сила давления оказывает влияние на площадь отдельных зон, но характер изменения этих зон остается идентичным.

После установления границ помольных зон можно приступить к определению параметров относительного движения мелющего

тела, в частности, для зоны скольжения. Уравнение относительного движения во вращающейся системе координат AXY (рис. 1) будет иметь вид

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = (F_{1e} + F_p) \cos \theta + F_{2e} \cos(\psi - \varphi) + \\ + F_c \cos \gamma - F_{TX} + G \cos \psi, \\ m \frac{dv_y}{dt} = (F_{1e} + F_p) \sin \theta + F_{2e} \sin(\psi - \varphi) - \\ - F_c \sin \gamma - F_{TY} - G \sin \psi. \end{cases} \quad (15)$$

Нормальная реакция, необходимая для нахождения силы трения, перпендикулярна направлению движения измельчающего тела и рассчитывается следующим образом [16]:

$$\begin{aligned} N = m\omega^2 y \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} + m\omega^2 R \left(\frac{k}{1+k} \right) \times \\ \times \cos(\psi - \varphi) \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} - \\ - mg \cos \psi \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} - 2m\omega \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \end{aligned} \quad (16)$$

где y – текущая координата по оси Y .

С учетом того что все силы массовые, уравнения (15) преобразуются к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \left(\omega^2 + \frac{F_p}{m} \right) x + \omega^2 R \left(\frac{k}{1+k} \right) \cos(\psi - \varphi) + \\ + 2\omega v_x - f\tilde{N} \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} + g \cos \psi, \\ \frac{dv_y}{dt} = \left(\omega^2 + \frac{F_p}{m} \right) y + \omega^2 R \left(\frac{k}{1+k} \right) \sin(\psi - \varphi) - \\ - 2\omega v_y - f\tilde{N} \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} - g \sin \psi, \end{cases} \quad (17)$$

где x – текущая координата по оси X .

Решая систему уравнений (17), можно определить координаты, скорости и ускорения измельчающего тела в любой точке загрузки с учетом силы давления, рассчитанной по уравнению (10).

Конечно, модель движения измельчающего тела, описанная уравнениями (17), несколько упрощена. В ней не учитывается влияние соседних измельчающих тел, находящихся на одной дуге окружности. Более адекватной была бы так называемая ячеечная модель [17], представленная на рис. 7.

Каждая ячейка состоит из анализируемого тела, окруженного со всех сторон четырьмя другими (рис. 7). Алгоритм расчета при этом

будет включать сначала определение всех силовых факторов путем решения уравнений (17) для каждого окружающего тела. Затем необходимо найти и просуммировать проекции всех сил окружающих тел на оси координат и учесть их в качестве дополнительных силовых факторов при решении системы уравнений для анализируемого тела. Такие ячеечные модели надлежит реализовать для каждого измельчающего тела из сегмента загрузки. И даже в таком виде модель движения не будет являться абсолютно идеальной. Она учитывает влияние только соседних тел, а не всех, находящихся в сегменте. Таким образом, последняя модель усложнена настолько, что она не имеет перспектив практической реализации. Для инженерных расчетов достаточно ограничиться учетом радиальной силы давления столбика шаров.

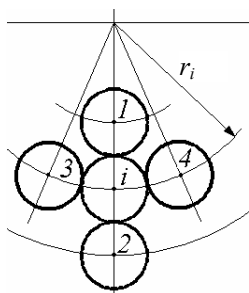


Рис. 7. Расчетная схема движения мелющего тела с учетом взаимного воздействия соседних мелющих тел

Заключение. В работе дан анализ моделей горизонтального движения измельчающих тел в горизонтальной планетарной мельнице. Причем эти модели отличаются подходом к учету сил взаимодействия измельчающих тел в сегменте загрузки. Желание максимально приблизить модель движения к реальной приводит к значительному усложнению расчетных зависимостей и алгоритмов расчета. В связи с этим авторы считают, что в уравнениях относительного движения достаточно учесть дополнительно только силу радиального давления столбика шаров. При таком упрощении получены уравнения для расчета этой силы в любой точке загрузки планетарной мельницы.

Литература

1. John, G. Modellunter – Suchungen on einer Planeten kugelmuhlen / G. John, F. Vock // Chem. – Ing. Techn. – 1965. – Jhrg. 37, № 4. – S. 411–417.
2. Cieslinski, W. Mlyny Satelitowe / W. Cieslinski // Cement, Wapno, Gips. – 1971. – Rok. 26, № 4. – S. 97–100.
3. Kompakt angebaute Planetenmuhle zerkeinert kontamination frei // Maschinenmarkt. – 1997. – Jhrg. 103, № 26. – S. 41.
4. Planetary mills of periodic and continuous action / E. I. Fokina [et al.] // J. Mater. Sci. – 2004. – Vol. 39, № 16–17. – P. 5217–5221.
5. Planeten-Kugelmuhlen // CITplus. – 2003. – Jhrg. 6, № 7. – S. 33.
6. Вайтехович, П. Е. Определение критических скоростей вращения планетарных мельниц / П. Е. Вайтехович, А. В. Вавилов, Г. М. Хвесько // Вестник БНТУ. – 2003. – № 2. – С. 34–39.
7. Вайтехович, П. Е. Движение мелющих тел после отрыва от стенок барабана планетарной мельницы / П. Е. Вайтехович, Г. М. Хвесько, Д. В. Семененко // Теор. основы хим. технологии. – 2005. – Т. 39, № 3. – С. 334–336.
8. Вайтехович, П. Е. Особенности движения загрузки в планетарных мельницах с внутренней обкаткой / П. Е. Вайтехович, Д. В. Семененко // Теор. основы хим. технологии. – 2005. – Т. 39, № 5. – С. 568–572.
9. Вайтехович, П. Е. Интенсификация и моделирование процессов диспергирования в поле инерционных сил / П. Е. Вайтехович. – Минск: БГТУ, 2009. – 220 с.
10. Андреев, С. Е. Дробление, измельчение и грохочение полезных ископаемых / С. Е. Андреев, В. А. Перов, В. В. Зверевич. – М.: Недра, 1980. – 415 с.
11. Вайтехович, П. Е. Кинематика планетарных мельниц с внутренней обкаткой / П. Е. Вайтехович // Труды БГТУ. Сер. III, Химия и технология неорган. в-в. – 2002. – Вып. X. – С. 217–222.
12. Касаткин, А. Г. Основные процессы и аппараты химической технологии / А. Г. Касаткин. – М.: Альянс, 2004. – 751 с.
13. Клейн, Г. К. Строительная механика сыпучих тел / Г. К. Клейн. – М.: Стройиздат, 1977. – 256 с.
14. Вайтехович, П. Е. Условия отрыва шара от стенок барабана в планетарной мельнице с внутренней обкаткой / П. Е. Вайтехович, Д. В. Гапанюк, Д. В. Семененко // Труды БГТУ. Сер. III, Химия и технология неорган. в-в. – 2002. – Вып. X. – С. 223–225.
15. Вайтехович, П. Е. Отрыв мелющих тел от поверхности барабана в планетарной мельнице с внешней обкаткой / П. Е. Вайтехович, Г. М. Хвесько, Д. В. Семененко // Труды БГТУ. Сер. III, Химия и технология неорган. в-в. – 2003. – Вып. XI. – С. 188–194.
16. Вайтехович, П. Е. Специфика движения мелющих тел в вертикальной планетарной мельнице / П. Е. Вайтехович, Д. В. Семененко, Д. В. Юхневич // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2009. – С. 7–10.
17. Нигматулин, Р. И. Основы механики гетерогенных сред / Р. И. Нигматулин. – М.: Наука, 1978. – 336 с.

Поступила 31.03.2010