
Н. Ф. КОВАЛЕВ

К РАСЧЕТАМ ВЕРХНЕГО СТРОЕНИЯ ПУТИ ЛЕСОВОЗНЫХ УЗКОКОЛЕЙНЫХ ЖЕЛЕЗНЫХ ДОРОГ

О КОЭФФИЦИЕНТЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ ОСНОВАНИЯ И РЕЛЬСА УЗКОКОЛЕЙНОЙ ЖЕЛЕЗНОЙ ДОРОГИ

При расчете рельса, как балки бесконечной длины, лежащей на сплошном упругом основании, используются величины модуля упругости пути и коэффициента относительной жесткости основания и рельса, определяемые опытом. По методике, принятой в ЦНИИ МПС, опытное определение модуля упругости пути производится при статических испытаниях под одиночной нагрузкой. В 1955 г. Б. И. Кувалдин опубликовал разработанную им методику определения величины K (коэффициента относительной жесткости основания и рельса) по кривым записи напряжений или кривым записи просадок рельса под колесной нагрузкой с любым числом колес в схеме и при любых скоростях движения. При графическом решении задачи по определению K используется расстояние от позиции крайнего колеса на осциллограмме до места с первым нулевым прогибом или с первым нулевым напряжением. Это расстояние при разных заездах одних и тех же единиц подвижного состава колеблется, так как при перераспределении нагрузки в движении кривая прогибов смещается относительно положения крайнего колеса. Смещение кривой прогибов происходит как по оси абсцисс, так и по оси ординат. Желательно для определения величины K использовать более стабильные точки кривой записи напряжений или осадок. Такими точками с большей надежностью следует считать точки максимумов или минимумов кривых напряжений или осадок, так как при колебаниях кривых (при разных заездах) по вертикали при сохранении общих контуров кривых абсциссы максимумов или минимумов кривых не смещаются.

Следовательно, не изменяется расстояние от позиции оси колесной схемы до абсциссы максимума или минимума кривой. В настоящей статье рассматривается возможность применения для определения динамического коэффициента относительной жесткости основания и рельса K методики, разработанной автором, основанной на замере расстояния от крайней оси колесной схемы до максимумов или минимумов кривых записей напряжений или осадок рельса.

а) Определение K по осциллограммам просадок при замере расстояния от позиции крайней оси колесной схемы до минимума кривой прогибов, находящегося вне колесной схемы.

Рассмотрим воздействие на путь колесной нагрузки, состоящей из 4 колес (рис. 1).

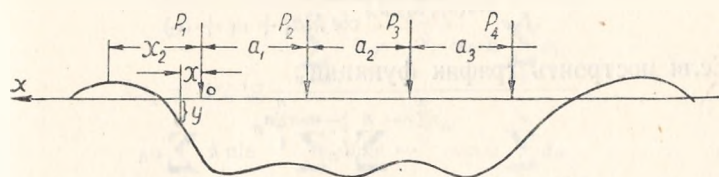


Рис. 1. Схема нагрузки.

Как известно, уравнение линии прогиба рельса под воздействием четырехосной единицы подвижного состава (в развернутом виде) имеет вид:

$$y = \frac{P_1 K}{2U} l^{-\kappa x} [\cos kx + \sin kx] + \frac{P_2 K}{2U} e^{-\kappa(a_1 + x)} [\cos k(a_1 + x) + \sin k(a_1 + x)] + \frac{P_3 K}{2U} e^{-\kappa(a_1 + a_2 + x)} [\cos k(a_1 + a_2 + x) + \sin k(a_1 + a_2 + x)] + \frac{P_4 K}{2U} e^{-\kappa(a_1 + a_2 + a_3 + x)} [\cos k(a_1 + a_2 + a_3 + x) + \sin k(a_1 + a_2 + a_3 + x)];$$

где: P_1, P_2, P_3, P_4 — колесные нагрузки на рельс в кг;

a_1, a_2, a_3 — расстояния между осями в см;

$U = 4EJk^4$ — модуль упругости пути в кг/см²;

k — коэффициент относительной жесткости основания и рельса в см⁻⁴;

y — текущая ордината кривой прогибов в см;

x — текущая абсцисса кривой прогибов в см.

Обозначив через x_2 расстояние в см от крайней оси до минимума кривой прогибов и $b_1 = \frac{P_2}{P_1}$; $b_2 = \frac{P_3}{P_1}$; $b_3 = \frac{P_4}{P_1}$, используем уравнение прогибов для отыскания абсциссы места минимального

прогиба вне колесной схемы. Приравняв для этого первую производную y'_x нулю, проделав преобразования, получим:

$$kx_2 = \text{arc tg} \frac{-\sum_1^{n-m-1} b_n e^{-\kappa \sum_1^n a_n} \sin k \sum_1^n a_n}{1 + \sum_1^{n-m-1} b_n e^{-\kappa \sum_1^n a_n} \cos k \sum_1^n a_n}, \quad \text{где } m \text{ — число осей;}$$

$$\text{или } kx_2 = \text{arc tg} \frac{-\left[b_1 e^{-\kappa a_1} \sin k a_1 + b_2 e^{-\kappa(a_1+a_2)} \sin k(a_1+a_2) + \dots \right.}{1 + b_1 e^{-\kappa a_1} \cos k a_1 + b_2 e^{-\kappa(a_1+a_2)} \cos k(a_1+a_2) + \dots} \dots \\ \left. \dots \frac{b_3 e^{-\kappa(a_1+a_2+a_3)} \sin k(a_1+a_2+a_3)}{b_3 e^{-\kappa(a_1+a_2+a_3)} \cos k(a_1+a_2+a_3)} \right].$$

Если построить график функции

$$f(k) = \text{arc tg} \frac{-\sum_1^n b_n e^{-\kappa \sum_1^n a_n} \sin k \sum_1^n a_n}{1 + \sum_1^n b_n e^{-\kappa \sum_1^n a_n} \cos k \sum_1^n a_n}$$

для различных значений K от $K=0$ до $K=0,020$ при заданной системе осей, то прямая kx_2 , построенная на том же графике по замеренному значению x_2 , пересечется с кривой $f(k)$ в точке, проекция которой на ось K даст искомое значение K . Как показал анализ цифрового материала, условие наличия минимума прогибов вне колесной схемы:

$$-A\mu(k, x) < B\eta(k, x)$$

в пределах обычных значений K всегда сохраняется.

Здесь

$$A = \sum_0^n b_1 e^{-\kappa \sum_1^n a_1} \cos k \sum_1^n a_1; \quad B = \sum_0^n b_1 e^{-\kappa \sum_1^n a_1} \sin k \sum_1^n a_1;$$

$$\mu(k, x) = e^{-\kappa x} (\cos kx - \sin kx)$$

и, соответственно,

$$\eta(k, x) = e^{-\kappa x} (\cos kx + \sin kx).$$

Если сравнить функцию $f(k)$ для метода Б. И. Кувалдина¹ и для изложенного выше метода, можно заметить, что число слагаемых и в числителе и в знаменателе при втором методе

¹ Московский лесотехнический институт. Научные труды. Выпуск 3. Гослесбумиздат, 1955 г.

двое меньше. Форма кривых функций $f(k)$ для обоих методов совершенно одинакова. На одном и том же графике кривая функции $f(k)$ для метода Б. И. Кувалдина располагается ниже кривой функции $f(k)$ для изложенного выше метода. Следовательно, имея табличные данные для одной из функций, достаточно исчислить только одно значение ординаты второй функции. Вторая кривая может быть получена за счет соответствующего смещения точек первой кривой на величину, определенную только по одной точке. При равном доверии к точности определения K обоими методами совместное их использование увеличивает выборочный ряд для статистической обработки.

При использовании предлагаемой методики для обработки в тех же целях кривых записей напряжений в рельсе расчетная формула получит вид:

$$kx_1 = \text{arc tg} \frac{\sum_{n=0}^{n=m-1} b_n e^{-\kappa \sum_{n=0}^n a_n} \cos k \sum_{n=0}^n a_n}{\sum_{n=0}^{n=m-1} b_n e^{-\kappa \sum_{n=0}^n a_n} \sin k \sum_{n=0}^n a_n},$$

где x_1 — расстояние в см от позиции крайней оси до минимума кривой напряжений, находящегося вне колесной схемы.

б) Определение K по осциллограммам просядок при замере расстояния x_2 от позиции крайней оси колесной схемы до максимума кривой просядок, находящегося между 1-й и 2-й осями.

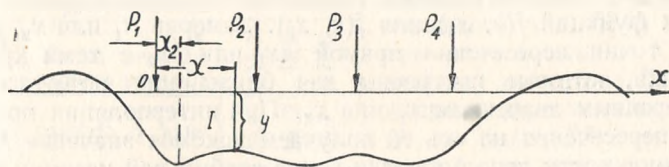


Рис. 2. Схема нагрузки.

Уравнение линии прогибов для 1 зоны имеет вид (рис. 2):

$$y = \frac{P_1 k}{2U} e^{-\kappa x} [\cos kx + \sin kx] + \frac{P_2 k}{2U} e^{+\kappa(x-a_1)} [\cos k(x-a_1) - \sin k(x-a_1)] + \frac{P_3 k}{2U} e^{+\kappa(x-a_1-a_2)} [\cos k(x-a_1-a_2) - \sin k(x-a_1-a_2)] + \frac{P_4 k}{2U} e^{+\kappa(x-a_1-a_2-a_3)} [\cos k(x-a_1-a_2-a_3) - \sin k(x-a_1-a_2-a_3)].$$

Уравнение кривой напряжений имеет вид:

$$\sigma = \frac{P_1}{4kW} \{ e^{-\kappa x} (\cos kx - \sin kx) + b_1 e^{+\kappa(x-a_1)} [\cos k(x-a_1) + \sin k(x-a_1)] + b_2 e^{+\kappa(x-a_1-a_2)} [\cos k(x-a_1-a_2) + \sin k(x-a_1-a_2)] + b_3 e^{+\kappa(x-a_1-a_2-a_3)} [\cos k(x-a_1-a_2-a_3) + \sin k(x-a_1-a_2-a_3)] \}.$$

Приравняв первую производную y'_x и σ'_x нулю, получим:

$$kx_2 = \text{arc tg} \frac{b_1 e^{-\kappa a_1} \sin ka_1 + b_2 e^{-\kappa(a_1+a_2)} \sin k(a_1+a_2) + \dots}{e^{-2\kappa x_2} + b_1 e^{-\kappa a_1} \cos ka_1 + b_2 e^{-\kappa(a_1+a_2)} \cos k(a_1+a_2) + \dots} + \frac{b_3 e^{-\kappa(a_1+a_2+a_3)} \sin k(a_1+a_2+a_3)}{+ b_3 e^{-\kappa(a_1+a_2+a_3)} \cos k(a_1+a_2+a_3)}$$

и

$$kx_1 = \text{arc tg} \frac{e^{-2\kappa x_1} - \sum_{n=0}^{n=m-1} b_n e^{-\kappa \sum_0^n a_n} \cos k \sum_0^n a_n}{\sum_{n=0}^{n=m-1} b_n e^{-\kappa \sum_0^n a_n} \sin k \sum_0^n a_n}$$

Здесь x_1 — расстояние от крайней оси до минимума кривой напряжений, находящегося между 1-й и 2-й колесными осями.

При графическом решении трансцендентных уравнений необходимо для каждой единицы подвижного состава строить пучок кривых функций $f(k, x_1)$ или $f(k, x_2)$. Замерив x_1 или x_2 , нужно найти точки пересечения прямой kx_1 или kx_2 с теми кривыми из пучка, которые построены для ближайших по отношению к измеренным значениям x_1 или x_2 . При интерполяции проекций точек пересечения на ось K получаем искомое значение K .

Возможность использования более стабильной позиции максимумов прогибов или минимумов напряжений на участке между 1-м и 2-м колесами, в пределах которого наиболее близко совпадают расчетные данные прогибов или напряжений с фактическими, может оправдать затрату труда. Необходимо получение записей просадок или напряжений с как можно большими масштабами по оси ординат, при которых положение максимумов или минимумов кривых четко выделяется.

в) Результаты опытной проверки предлагаемой методики определения K .

Коллективом сотрудников лаборатории пути и путевого хозяйства ЦНИИМЭ с участием автора статьи в 1955 году для определения модуля упругости пути участка УЖД Крестецкого ЛПХ была использована разработанная автором и изложенная

Место замера	K определено по методу Б. И. Кувалдина				K определено по минимуму просадок вне котесной схемы				K определено по максимуму просадок между IV и III осями			
	знач.	K среднее	знач. U среднее	средняя ошибка отгльн. измер. K в %	средняя ошибка отгльн. измер. U в %	знач. K среднее	средняя ошибка отгльн. измер. K в %	знач. U среднее	средняя ошибка отгльн. измер. U в %	знач. K среднее	средняя ошибка отгльн. измер. K в %	знач. U среднее
Ближняя шпала	0,01133	39,2	16,7	54,8	28,6	0,01142	6,399	35,65	28,6	0,01234	55,7	83,2%
Дальняя шпала	0,00888	16,72	12,2	40,7	34,6	0,010155	8,54	22,8	34,6	0,007267	6,78	95,5%
Межшпальный пролет	0,011083	38,1	17,58	64,1%	57,8	0,01085	15,958	34	57,8	0,006615	4,32	76,8%

выше методика. Статистической обработке при сравнении величин K , полученных разными методами, подвергались одни и те же осциллограммы просадок рельса. Результаты сравнения показаны в таблице. Как видно из таблицы, при сравнении средних ошибок отдельных измерений K (даже без учета влияния скорости движения на величину K), метод определения K по внешнему минимуму кривых просадок дает лучшую сходимость результатов и не уступает в точности методу, предложенному Б. И. Кувалдиным. Худшая сходимость при определении K по методу, используемому положение минимума просадок между 1 и 2 осями, объясняется малым вертикальным масштабом записи кривых прогибов. Сравнение расчетных осадок с фактическими при использовании в расчетах K и U , полученных тремя разными методами, показывает, что 50% замеров при использовании K , полученному по методу Б. И. Кувалдина, дали ошибку в осадке не более 77% от фактической; при использовании величин K , полученных по внешнему минимуму просадок, 50% замеров дали ошибку в осадке не более 52% от фактической и при использовании величин K , полученных по положению максимума между I и II колесами, 50% замеров дали ошибку не более 195% от фактической. Отсюда следует, что метод определения K по внешнему минимуму просадок не усту-

пает методу Б. И. Кувалдина, и его использование дает некоторые преимущества: дисперсия значений, K относительно средней меньшая, вычислительная работа менее трудоемка. Весьма выгодным является совместное использование обоих методов, так как переход от одного метода к другому совсем прост.

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ ДАВЛЕНИЙ ВДОЛЬ ПОДОШВЫ ШПАЛЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, ПРИ ДЕЙСТВИИ НА ШПАЛУ ДВУХ СИММЕТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫХ, НО НЕ РАВНЫХ СИЛ

Задача о распределении давлений вдоль подошвы шпалы при действии на нее симметрично расположенных и равных сил решена многими исследователями. Для лесовозных железных и лежневых дорог неравномерность загрузки подвижного состава значительна, в связи с чем важное значение имеет ограничение неравномерности в загрузке в пределах прочности балластного слоя и земляного полотна. По данным отчета по теме № 10 в 1956 г. ЦНИИМЭ, неравномерность давлений от колес одних и тех же осей платформ «Лесосудмашстроя» в сцепе составила величины от 1,03 до 2,94.

У сцепов ЭМ-51 с двойным рессорным подвешиванием она составила от 1,03 до 2,52 при средней неравномерности 1,64.

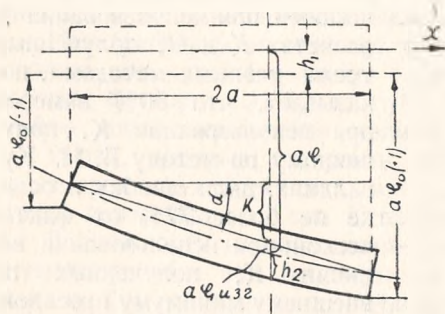


Рис. 3. Схема перемещения балки и основания.

Отсюда следует, что симметричное загрузку шпалы равными силами может рассматриваться только как частный случай более общей задачи о действии на гибкий штамп-шпалу двух симметрично расположенных, но не равных сил. Исследование нормальных напряжений под шпалой может дать ответы на многие вопросы практики строительства и эксплуатации дороги и должно приниматься во внимание при конструировании нового подвижного состава. В настоящей работе дается решение изложенной выше общей задачи, как развитие метода решения, предложенного В. И. Кузнецовым для симметричной нагрузки равными силами.

Введем обозначения:

$\omega(x) = \omega(\xi) = a\zeta$ — перемещение оси балки по нормали к поверхности полупространства в см;

$\zeta_0(\xi)$ — относительная осадка основания;

ξ — относительная абсцисса сечения;

$\zeta(\xi)$ — относительная осадка центра тяжести поперечного сечения балки;

$\zeta_{изг}(\xi)$ — относительный прогиб балки в сечении с абсциссой ξ от изгиба;

$\zeta_0(-1)$ — относительная осадка основания в левом торцовом сечении (при $\xi = -1$);

$\zeta_0(+1)$ — относительная осадка основания в правом торцовом сечении (при $\xi = +1$).

Относительные осадки, деформации и перемещения равны значениям деформаций, осадок и перемещений, деленным на половину длины балки, равную a .

Как видно из рис. 3,

$$a \zeta = h_1 + a \zeta_0(-1) - h_2 + k + a \zeta_{изг},$$

так как

$$k = (a + a \xi) \operatorname{tg} \alpha = (a + a \xi) \frac{\zeta_0(+1) - \zeta_0(-1)}{2}, \quad a \zeta = h_1 + a \zeta_0 - h_2,$$

то

$$2 \zeta_0 - (\xi + 1) \zeta_0(+1) + (\xi - 1) \zeta_0(-1) - 2 \zeta_{изг} = 0. \quad (1)$$

Если нагрузки равны и симметричны, то $\operatorname{tg} \alpha = 0$; $\zeta_0(+1) = \zeta_0(-1)$. Тогда $\zeta_0 - \zeta_0(-1) - \xi_{изг} = 0$. (У В. И. Кузнецова для любого вида нагрузки принято соотношение деформаций $\zeta_0 + \zeta_{см} - \zeta_1 = 0$. Как следует из изложенного выше, соотношение деформаций и осадок при равномерном смятии не зависит от величины смятия. Величина ζ у В. И. Кузнецова принята за относительный прогиб. За относительный прогиб следует принять величину $\zeta_{изг}$, что и сделано нами).

Если $\omega_1(x)$ — прогиб от действия изгибающего момента,

$\omega_2(x)$ — прогиб от действия поперечной силы, то полный прогиб $\omega_{изг}(x) = \omega_1(x) + \omega_2(x)$, а полная кривизна $\omega''_{изг}(x) = \omega''_1(x) + \omega''_2(x)$, где $\omega''_1(x) = \frac{M(x)}{EJ}$ — кривизна, вызванная изгибающим моментом, $\omega''_2(x) = -\gamma'(x) = -\frac{m_1}{gF} M''(x)$ — кривизна, вызванная сдвигами (γ — относительный сдвиг). Уравнение изогнутой оси балки примет вид:

$$EJ \omega''_{изг}(x) = M(x) - m_1 \frac{EJ}{gF} M''(x) = M(x) - m_1 \frac{EJ}{gF} p(x).$$

Здесь m_1 — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения;

g — модуль сдвига;

F — площадь поперечного сечения балки;

EJ — жесткость балки;

$p(x)$ — реактивное давление в сечении x .

В относительных координатах будем иметь:

$$\zeta''_{\text{изг}} = \frac{a}{EJ} M(\xi) - \frac{m_1 a}{gF} p(\xi).$$

Примем $P_2 = mP_1$. Тогда уравнение равновесия будет:

$$P_1 + P_2 = \int_{-a}^{+a} p(u) du, \text{ или } (m + 1) P_1 = \int_{-a}^{+a} p(u) du$$

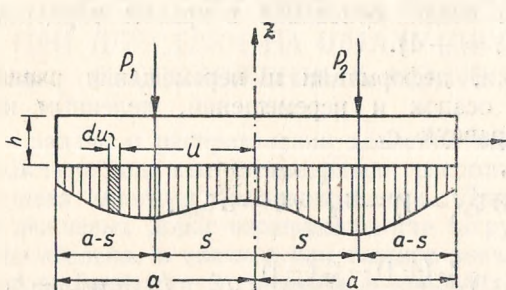


Рис. 4. Деформации балки.

$$P_1 = \frac{\int_{-a}^{+a} p(u) du}{m + 1};$$

$$P_2 = \frac{m \int_{-a}^{+a} p(u) du}{m + 1}.$$

Рассматриваем 3 участка балки: 1-й участок $-a < x < -s$; 2-й участок $-s < x < +s$; 3-й участок $+s < x < a$.

Выражения для изгибающих моментов (в относительных координатах) по участкам дадут:

$$\text{1-й участок } \zeta''_{\text{изг}} = \frac{a^2}{EJ} \int_{-1}^{\xi} p(t) (\xi - t) dt - \frac{m_1 a}{gF} p(\xi);$$

$$\text{2-й участок } \zeta''_{\text{изг}} = \frac{a^3}{EJ} \left\{ \int_{-1}^{\xi} p(t) (\xi - t) dt - \frac{\beta + \xi}{1 + m} \int_{-1}^{+1} p(t) dt \right\} - \frac{m_1 a}{gF} p(\xi);$$

$$\text{3-й участок } \zeta''_{\text{изг}} = \frac{a^3}{EJ} \left\{ \int_{\beta}^{+1} p(t) (\xi - t) dt - \frac{\beta + \xi}{1 + m} \int_{-1}^{+1} p(t) dt - \frac{m}{1 + m} (\xi - \beta) \int_{-1}^{+1} p(t) dt \right\} - \frac{m_1 a}{gF} p(\xi).$$

Здесь:

$$t = \frac{u}{a}; \beta = \frac{s}{a}; \xi = \frac{x}{a}; \zeta_{\text{изг}} = \frac{w_{\text{изг}}}{a}.$$

Произведя интегрирование этих уравнений, получим:

$$\text{1-й участок } \zeta'_{\text{изг}} = \frac{a^3}{2EJ} \int_{-1}^{\xi} p(t) (\xi - t)^2 dt - \frac{m_1 a}{gF} \int_{-1}^{\xi} p(t) dt + C_1;$$

$$\zeta_{\text{изг}} = \frac{a^3}{6EJ} \int_{-1}^{\xi} p(t) (\xi - t)^3 dt - \frac{m_1 a}{gF} \int_{-1}^{\xi} p(t) (\xi - t) dt + C_1 \xi + C_2;$$

$$\begin{aligned} \text{2-й участок } \zeta'_{\text{изг}} = & \frac{a^3}{2EJ} \left\{ \int_{-1}^{\xi} p(t) (\xi - t)^2 dt - \frac{(\beta + \xi)^2}{1+m} \int_{-1}^{+1} p(t) dt \right\} - \\ & - \frac{m_1 a}{gF} \int_{-1}^{\xi} p(t) dt + C_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{изг}} = & \frac{a^3}{6EJ} \left\{ \int_{-1}^{\xi} p(t) (\xi - t)^3 dt - \frac{(\beta + \xi)^3}{1+m} \int_{-1}^{+1} p(t) dt \right\} - \\ & - \frac{m_1 a}{gF} \int_{-1}^{\xi} p(t) (\xi - t) dt + C_3 \xi + C_4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{3-й участок } \zeta'_{\text{изг}} = & \frac{a^3}{2EJ} \left\{ \int_{-1}^{\xi} p(t) (\xi - t)^2 dt - \frac{(\beta + \xi)^2}{1+m} \int_{-1}^{+1} p(t) dt - \right. \\ & \left. - \frac{m}{1+m} (\xi - \beta)^2 \int_{-1}^{+1} p(t) dt \right\} - \frac{m_1 a}{gF} \int_{-1}^{\xi} p(t) dt + C_5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{изг}} = & \frac{a^3}{6EJ} \left\{ \int_{-1}^{\xi} p(t) (\xi - t)^3 dt - \frac{(\beta + \xi)^3}{1+m} \int_{-1}^{+1} p(t) dt - \right. \\ & \left. - \frac{m}{1+m} (\xi - \beta)^3 \int_{-1}^{+1} p(t) dt \right\} - \frac{m_1 a}{gF} \int_{-1}^{\xi} p(t) (\xi - t) dt + C_5 \xi + C_6. \end{aligned}$$

$$\text{Обозначив: } a_{\theta} = \frac{m_1 a}{gF}; \quad K_1 = \int_{-1}^{\xi} p(t) dt; \quad K_2 = \int_{-1}^{+1} p(t) dt; \quad a_u = \frac{a^3}{6EJ};$$

$$K_u(\xi) = \int_{-1}^{\xi} p(t) (\xi - t)^3 dt; \quad \alpha_1(\xi) = \xi - \beta; \quad \alpha_2(\xi) = \xi + \beta; \quad \alpha(\xi) = 1 + \xi,$$

будем иметь:

$$\text{1-й участок } \zeta'_{\text{изг}} = a_u K'_u(\xi) - a_{\theta} K_1 + C_1;$$

$$\zeta_{\text{изг}} = a_u K_u(\xi) - a_{\theta} \frac{1}{6} K''_u(\xi) + C_1 \xi + C_2;$$

$$\text{2-й участок } \zeta'_{\text{изг}} = a_u K'_u(\xi) - \frac{3a_u}{1+m} \alpha_2^2(\xi) K_2 - a_{\theta} K_1 + C_3;$$

$$\zeta_{\text{изг}} = a_u K_u(\xi) - \frac{\alpha_2(\xi)}{1+m} K_2 a_u - a_{\theta} \frac{1}{6} K''_u(\xi) + C_3 \xi + C_4;$$

$$\zeta'_{\text{изг}} = a_u K_u'(\xi) - \frac{3a_u}{1+m} \alpha_2^3(\xi) K_2 - \frac{m}{1+m} 3a_u K_2 \alpha_1^2(\xi) - a_\theta K_1 + C_5;$$

$$\zeta_{\text{изг}} = a_u K_u(\xi) - \frac{a_u}{1+m} \alpha_2^3(\xi) K_2 - \frac{m}{1+m} a_u \alpha_1^3(\xi) K_2 - a_\theta \frac{1}{6} K_u''(\xi) + C_5 \xi + C_6.$$

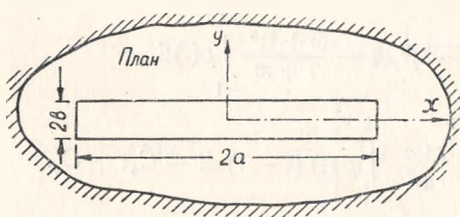
Граничные условия для определения постоянных интегрирования:

1. При $\xi = -\beta$ $\zeta'_{\text{изг}}(\xi)_{\text{Iуч.}} = \zeta'_{\text{изг}}(\xi)_{\text{IIуч.}}$
2. При $\xi = -\beta$ $\zeta_{\text{изг}}(\xi)_{\text{Iуч.}} = \zeta_{\text{изг}}(\xi)_{\text{IIуч.}}$
3. При $\xi = \beta$ $\zeta'_{\text{изг}}(\xi)_{\text{IIуч.}} = \zeta'_{\text{изг}}(\xi)_{\text{IIIуч.}}$
4. При $\xi = \beta$ $\zeta_{\text{изг}}(\xi)_{\text{IIуч.}} = \zeta_{\text{изг}}(\xi)_{\text{IIIуч.}}$
5. При $\xi = -1$ $\zeta_{\text{изг}}(\xi) = 0$.
6. При $\xi = +1$ $\zeta_{\text{изг}}(\xi) = 0$.
7. При $\xi = -\beta \frac{m-1}{m+1} \zeta' = 0$.

При применении граничных условий в уравнениях деформаций изгиба и их производных получим:

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = \frac{1}{2} \left[-a_u K_u(+1) + \frac{a_u}{1+m} (1+\beta)^3 K_2 + \frac{m}{1+m} a_u (1-\beta)^3 K_2 + a_\theta \frac{1}{6} K_u''(+1) \right].$$

Перемещения любой точки упругого полупространства (рис. 5), как известно, выражаются следующим образом:



$$w_0 = \frac{1}{\pi E_0} \int_F \frac{p_1(u, v) du dv}{r(x, y, u, v)}.$$

Рис. 5. Перемещения точки упругого полупространства.

Так как длина шпалы во много раз больше ширины ее, можно не рассматривать зависимость w_0 от координаты v и считать, что давление P зависит только от координаты u , т. е. $p_1[u, v] \rightarrow p_1[u]$, так

$$\text{как } r = \sqrt{(x_1 - u)^2 + (y_1 - v)^2},$$

$$w_0 = \frac{1}{\pi E_0} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \frac{p_1(u) du dv}{\sqrt{(x_1 - u)^2 + (y_1 - v)^2}}.$$

Воспользовавшись относительными координатами и проинтегрировав, получим:

$$w_0 = \frac{a}{\pi E_0} \int_{-1}^{+1} p_1(t) dt \left[\text{arcSh} \frac{\Delta(\eta+1)}{|\xi-t|} - \text{arcSh} \frac{\Delta(\eta-1)}{|\xi-t|} \right],$$

где: $\xi = \frac{x_1}{a}$; $\eta = \frac{y_1}{a}$; $t = \frac{u}{a}$; $s = \frac{v}{b}$; $\Delta = \frac{b}{a}$.

Так как $a \gg b$, можно принять $\gamma_1 = 0$.

Тогда $\omega_0(\xi) = \frac{2a}{\pi E'_0} \int_{-1}^{+1} p_1(t) \operatorname{arc} \operatorname{Sh} \frac{\Delta}{|\xi - t|} dt$, где: $|\xi - t|$ — абсолютное значение разницы $\xi - t$; E'_0 — модуль деформации упругого полупространства. Заменяв $\omega_0(\xi)$ через $\zeta_0(\xi) = a'_0 \zeta_0$ и $p_1(t) = \frac{p(t)}{2b}$, получим:

$$\zeta_0 = \frac{1}{\pi b E'_0} \int_{-1}^{+1} p(t) \operatorname{arc} \operatorname{Sh} \frac{\Delta}{|\xi - t|} dt.$$

Обозначив:

$$a_0 = \frac{1}{\pi b E'_0}; \quad K_0(\xi) = \int_{-1}^{+1} p(t) \operatorname{arc} \operatorname{Sh} \frac{\Delta}{|\xi - t|},$$

будем иметь:

$$\zeta_0 = a_0 K_0(\xi).$$

После подстановки значений $\zeta_{изг}$ и ζ_0 в уравнение деформаций (1) расчетные уравнения принимают вид:

1-й участок

$$2K_0(\xi) - \alpha(\xi) K_0(+1) + (\xi - 1) K_0(-1) - \frac{a_u}{a_0} \left\{ 2K_u(\xi) + \alpha(\xi) \left[\frac{(1+\beta)^3}{1+m} K_2 + \frac{m}{1+m} (1-\beta)^3 K_2 - K_u(+1) \right] \right\} + \frac{a_\theta}{a_0} \left[\frac{1}{3} K_u''(\xi) - \frac{1}{6} K_u''(+1) \alpha(\xi) \right] = 0;$$

2-й участок

$$2K_0(\xi) - \alpha(\xi) K_0(+1) + (\xi - 1) K_0(-1) - \frac{a_u}{a_0} \left\{ 2K_u(\xi) + \alpha(\xi) \left[\frac{m}{1+m} (1-\beta)^3 K_2 + \frac{(1+\beta)^3}{1+m} K_2 - K_u(+1) \right] - \frac{2\alpha_2^3(\xi)}{1+m} K_2 \right\} + \frac{a_\theta}{a_0} \left[\frac{1}{3} K_u''(\xi) - \frac{1}{6} K_u''(+1) \alpha(\xi) \right] = 0;$$

3-й участок

$$2K_0(\xi) - \alpha(\xi) K_0(+1) + (\xi - 1) K_0(-1) - \frac{a_u}{a_0} \left\{ 2K_u(\xi) + \alpha(\xi) \left[\frac{m}{1+m} (1-\beta)^3 K_2 + \frac{(1+\beta)^3}{1+m} K_2 - K_u(+1) \right] - \frac{2\alpha_2^3(\xi)}{1+m} K_2 - \frac{2m}{1+m} \alpha_1^3(\xi) K_2 \right\} + \frac{a_\theta}{a_0} \left[\frac{1}{3} K_u''(\xi) - \frac{1}{6} K_u''(+1) \alpha(\xi) \right] = 0.$$

Обозначив:

$$A = 2K_0(\xi) - \alpha(\xi) K_0(+1) + (\xi - 1) K_0(-1),$$

$$B = \frac{a_\theta}{a_0} \left[\frac{1}{3} K_u''(\xi) - \frac{1}{6} K_u''(+1) \alpha(\xi) \right],$$

$$C = 2K_u(\xi) + \alpha(\xi) \left[\frac{(1+\beta)^3}{1+m} K_2 + \frac{m}{1+m} (1-\beta)^3 K_2 - K_u(+1) \right].$$

получим окончательно следующие уравнения по участкам:

$$\text{1-й участок} \quad A + B - \frac{a_u}{a_0} C = 0;$$

$$\text{2-й участок} \quad A + B - \frac{a_u}{a_0} \left[C - \frac{2\alpha^3(\xi)}{1+m} K_2 \right] = 0;$$

$$\text{3-й участок} \quad A + B - \frac{a_u}{a_0} \left[C - \frac{2\alpha^3(\xi)}{1+m} K_2 - \frac{2m}{1+m} \alpha_1(\xi) K_2 \right] = 0.$$

В выведенных нами уравнениях искомыми неизвестными являются величины давлений в расчетных сечениях. Для решения интегральных уравнений, составленных для нескольких сечений (достаточно для 8 при $\xi = -0,75; -0,5; -0,25; 0; 0,25; 0,5; 0,75$), следует использовать приемы, изложенные в работе В. И. Кузнецова «Статический расчет элементов верхнего строения пути» (Трансжелдориздат, 1956 г.). При составлении линейных уравнений используются методы приближенного интегрирования с применением численных квадратур.

Изложив метод расчета величин давлений в различных сечениях балки, нам остается выяснить зависимость давления в расчетном сечении от величины показателя неравномерности нагрузки ее. Для этого воспользуемся весьма удобным для наших целей методом расчета балки, изложенным в работе И. А. Симвулиди «Расчет балок на сплошном упругом основании» (Изд. «Советская наука», 1955 г.). На основе теории упругого полупространства для любого числа сосредоточенных нагрузок, действующих на балку, М. А. Симвулиди вывел формулу для определения давления в любом сечении на расстоянии x от левого конца балки:

$$p(x) = a_0 + \frac{2a_1}{L} \left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{4a_2}{L^2} \left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + \frac{8a_3}{L^3} \left(x - \frac{L}{2}\right)^3,$$

в которой:

$$a_0 = \frac{(8252 - 34\alpha)A - 13440Ba}{13440 + 29\alpha}; \quad a_1 = 3 \frac{(2C - A)(1280 - \alpha) - 8N\alpha}{2048 + \alpha};$$

$$a_2 = 3 \frac{(5188 + 63\alpha)A + 13440Ba}{13440 + 29\alpha}; \quad a_3 = 10 \frac{(2C - A)(384 + \alpha) + 4N\alpha}{2048 + \alpha};$$

$$A = \frac{1}{L} \sum P_i; \quad C = \frac{1}{L^2} \sum P_i l_{3i}; \quad K = -\frac{1}{L} \sum P_i (L - l_{3i});$$

$$W = \frac{1}{L^4} \sum P_i \frac{\left(\frac{L}{2} - l_{3i}\right)^3}{6}; \quad B = \frac{1}{L^5} \left\{ \sum P_i \frac{(L - l_{3i})^4}{24} - \right. \\ \left. - \frac{L^3}{48} \sum P_i (L - l_{3i}) - WL^5 \right\}; \quad N = \frac{1}{L} \left\{ \Gamma_0^4 \sum P_i + K \right\},$$

где: L — длина балки; l_{3i} — расстояние от левого конца балки до силы P_i ;

$\Gamma^{L/2}$ — двусторонний протяженный прерыватель;

α — показатель гибкости

$$\alpha = \frac{(1 - \mu^2) \pi E_0 b L^3}{(1 - \mu_0^2) EJ};$$

где: b — ширина балки;

μ — коэффициент Пуассона матер. шпалы;

μ_0 — коэффициент Пуассона грунта;

E_0 — модуль упругости грунта;

EJ — жесткость балки.

Составляющие W превращаются в 0 при $l_{ai} \geq \frac{L}{2}$, $\Gamma_0^{L/2}$ превращается в нуль для сил, приложенных на правой половине балки (в остальных случаях он равен 1).

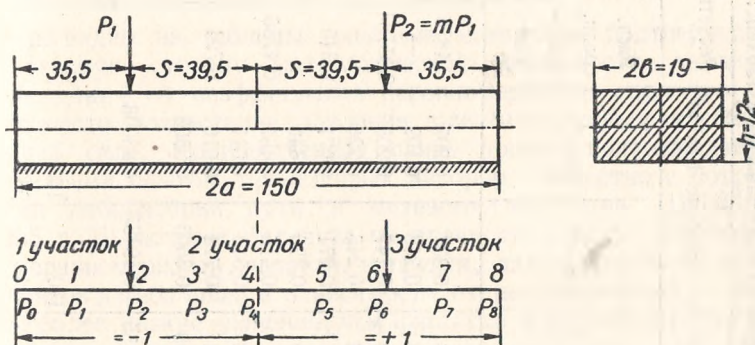


Рис. 6. Расчетная схема.

Для шпалы, изображенной на схеме, при модуле деформации $E_0 = 363 \text{ кг/см}^2$; $\alpha = 262$; $A = \frac{K_2}{150}$; $C = \frac{35,5 + 114,5m}{22500(1+m)} K_2$;

$$K = \frac{-(114,5 + 35,5m)}{150(1+m)} K_2; \quad N = \frac{0,0015777(1-m)}{1+m} K_2;$$

$$W = 0,0000202896 \frac{K_2}{1+m};$$

$$B = -0,00003199891 K_2; \quad a_0 = 0,005148009 K_2;$$

$$a_1 = 0,008937000 \frac{m-1}{m+1} K_2; \quad a_2 = 0,0045539139 K_2;$$

$$a_3 = 0,00266 \frac{m-1}{m+1} K_2; \quad K_2 = (1+m) P_1.$$

Подставив расчетные значения в формулу для $P(x)$, будем иметь:

$$P_0 = +(0,0212989 - 0,001895077m) \frac{K_2}{1+m} \text{ кг/см};$$

$$P_1 = (0,01552659 - 0,000123257m) \frac{K_2}{1+m} \quad \gg \quad ;$$

Величины давлений в соответствующих сечениях при сумме колесных сил, действующих на шпалу, в 1000 кг и 1255 кг в зависимости от величины показателя неравномерности нагрузки m представлены в таблице:

Наименование давления	Расчетные величины средних давлений в кг/см ² при нагрузке 1000 кг							Расчетные и опытные давления при нагрузке 1255 кг. $m=1,5$						
	$m=1$	$m=1,2$	$m=1,3$	$m=1,4$	$m=1,5$	$m=2$	$m=3$	Расч. средн. давления	Коэф. концентр. $m = \frac{8,9}{4,35 + P_1}$	Расч. макс. давления	Опытные макс. давл.		% к расч. макс.	
											макс. из макс.	средн. из макс.	макс. из макс.	средн. из макс.
P_0	0,511	0,455	0,431	0,413	0,388	0,307	0,205	0,4876	1,84	0,897	0,24	0,21	26,8	23,4
P_1	0,405	0,368	0,352	0,339	0,323	0,268	0,199	—	—	—	—	—	—	—
P_2	0,331	0,303	0,298	0,290	0,280	0,247	0,205	0,35184	1,89	0,665	0,667	0,584	100,4	87,8
P_3	0,286	0,275	0,270	0,266	0,262	0,246	0,226	—	—	—	—	—	—	—
P_4	0,271	0,271	0,271	0,271	0,271	0,271	0,271	0,340	1,895	0,664	0,792	0,716	123	108
P_5	0,286	0,297	0,3015	0,305	0,310	0,326	0,346	—	—	—	—	—	—	—
P_6	0,331	0,354	0,364	0,371	0,381	0,415	0,457	0,4786	1,84	0,881	0,960	0,8925	109	101,3
P_7	0,405	0,443	0,459	0,471	0,488	0,543	0,611	—	—	—	—	—	—	—
P_8	0,511	0,566	0,590	0,608	0,633	0,714	0,816	0,794	1,73	1,374	0,09	0,08	—	—
P_{cp}	0,3508	0,3508	0,3508	0,3508	0,3508	0,3508	0,3508	—	—	—	—	—	—	—
Коэф. изгиба шпалы P_n	0,68713	0,61979	0,59445	0,577	0,55455	0,49135	0,43008	—	—	—	—	—	—	—
P_n при $m=1$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
%	100	110,8	115,7	119,3	124	140	160	—	—	—	—	—	—	—
% $\frac{P_n}{P_{cp}}$	145,6	161	168	173	180	204	232	—	—	—	—	—	—	—

$$P_2 = (0,011084937 + 0,001487937m) \frac{K_2}{1+m} \text{ кг/см}^2;$$

$$P_3 = (0,003156816m + 0,00770844) \frac{K_2}{1+m} \text{ » } ;$$

$$P_4 = 0,005148009 K_2 \text{ » } ;$$

$$P_5 = (0,00770844m + 0,003156816) \frac{K_2}{1+m} \text{ » } ;$$

$$P_6 = (0,00148794 + 0,01108494m) \frac{K_2}{1+m} \text{ » } ;$$

$$P_7 = (0,01552659m - 0,000123257) \frac{K_2}{1+m} \text{ » } ;$$

$$P_8 = (0,02129892m - 0,001895077) \frac{K_2}{1+m} \text{ » } ;$$

$$P_{\text{ср}} = \frac{K_2 \text{ кг/см}^2}{Lb} = \frac{K_2 \text{ кг/см}^2}{150} \text{ см}.$$

Как видно из таблицы, опытные материалы подтверждают качественную сторону математической зависимости давления m в сечении ξ от коэффициента неравномерности: при $m = 1,5$ имеет место возрастание давления в сечениях, в направлении к большей силе. Количественная связь прочно подтверждается материалами опытов, проведенных автором совместно с сотрудниками лаборатории пути и путевого хозяйства ЦНИИМЭ в 1955 г. В расчетах балласта на прочность следует учитывать как неравномерность внешней нагрузки, так и величины коэффициентов изгиба шпал в зависимости от неравномерности, имеющие более низкие значения, чем принятые в практике расчетов.

При конструировании нового подвижного состава для хлыстовой вывозки леса по УЖД в целях устранения перенапряже-

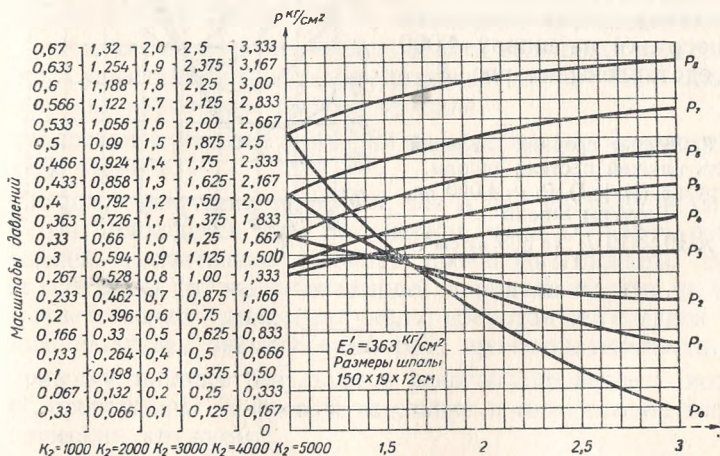


Рис. 7. График изменения средних давлений в 8 сечениях шпалы в зависимости от показателя неравномерности нагрузки колес ската (m).

ний в элементах верхнего строения пути, вызываемых неравномерностями колесных нагрузок, следует предусматривать узел, разрешающий смещение коника с грузом относительно опорного поперечного бруса до контролируемого положения, при котором равнодействующая нагрузки на коник совмещается с осью рельсового пути. Используя для хлыстовой вывозки существующий подвижной состав, прочность элементов пути следует проверять расчетом, учитывая поперечную неравномерность колесной нагрузки, применяя величины m , установленные опытом.

Для получения расчетных величин p_2 при определенных значениях m и конкретных размерах шпалы весьма удобно пользование графиком вида, изображенного на рис. 7. Эпюры давлений под шпалой вдоль нижней ее постели в зависимости от величины коэффициента неравномерности для нагрузки на шпалу 4 000 кг представлены на рис. 8.

Рис. 8. Эпюры средних давлений вдоль нижней постели шпалы.
 Нагрузка $(m + 1) P_1 = 4\,000$ кг.
 Размеры шпалы $150 \times 19 \times 12$ E₀ = 363 кг/см².

